from the author

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES XII.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI PRIORES XII.

EX

COMMANDINI ET GREGORII

VERSIONIBUS LATINIS.

IN USUM JUVENTUTIS ACADEMICÆ.

EDIDIT, PLURIBUS IN LOCIS AUXIT,

ET

IN DEPRAVATIS EMENDAVIT

SAMUEL, EPISCOPUS ROFFENSIS.

OXONII:

E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO.

MDCCCII.

PRÆFATIO.

NIHIL omnino opus est, vel de consiliis nostris hic loci agere, quomodo scilicet Juventutem in disciplinis Mathematicis optime institui posse arbitramur, vel ea singulatim percurrere, quæ in hunc finem conficere, et in lucem emittere nobiscum statuimus. Etenim de omnibus hisce abunde dictum est, in Prolegomenis ad Opuscula ea Mathematica, quæ a nobis concinnata, e PRELO OXONIENSI nuperrime prodierunt; ubi et Euclidem quoque denuo edere in nos suscepimus, et alteram etiam Diatribarum seriem, in quibus eos gnaviter se exercere necesse est, qui id sibi exoptant, in subtili, siqua alia, scientiâ, recto ingredi tramite, et initia ejus accurate ponere.

Impræsentiarum itaque, quod nostri magis officii est, et Lectori etiam magis intererit, paucis eum edoceri volumus, quid in hâc nostrâ Euclidis

Editione a nobis præstitum est, saltem quid ab aliis diversimode, vel posthabitis eorum consiliis; sed neque temere tamen aut infeliciter, uti spes est, nisi fallimur, et magnam in hoc negotio frustra insumpsimus operam.

PRIMO igitur, plerique eorum, qui in usum Studiosæ Juventutis Euclidem ediderunt, secus ac nos fecimus, non nisi priores sex libros cum undecimo et duodecimo typis mandârunt; partim, ut opinamur, quia facile sibi persuaserint, *septimi, octavi*, et *noni* nullam eos jacturam facturos esse, qui vel in puerorum scholis, vel a quocunque demum præceptore *Arithmeticæ* Elementa didicerint; partim quia omnem libri *decimi* utilitatem parvi penderint, præ *Surdorum* doctrinâ, prout ab iis exponitur qui artem Algebraicam tradunt—quod inerudite magis factum sit, nescio, an oscitanter; tam a ratione alienum est, juniores ad Algebram amandare, priusquam Geometriæ Elementa rite calluerint, e quibus pendet etiam regularum Algebraicarum sive veritas omnis, sive evidentia. Etenim has ut artem quandam, si placeat, absque Geometriâ quis condiscat; ut scientiam non intelliget, nullâ Geometriæ ratione habitâ, quæ et ea amplectitur, e quibus generales Numerorum affectus exoriri compertum est. Rectius itaque nos, ut visum est, et viam melius commonstrantes, tres Euclidis libros qui de Numeris agunt, *septimum* scilicet, *octavum* et *nonum*, Editioni nostræ inseruimus. De *decimo*, ut quod verum est confiteamur,

fiteamur, aliquamdiu dubitavimus; quia *Surdorum* doctrina, quatenus ibi traditur, angustior est, nec ullo modo fines eos attingit, ad quos provexerunt eam Scriptores Algebraici. Vicit tamen sententia, et hunc quoque librum ab aliis non divellere, tum ut Elementorum hæc Editio nostra ad libri duodecimi finem omnibus numeris absoluta esset, tum quia *Surdorum* doctrinam mirum est, quanto facilius pro se quisque arrepturus est, qui *Incommensurabilium* Mysteriis prius ab Euclide initiatus fuerit. Ad minimum, *viginti* priorum hujus Libri propositionum notitiam nemo est, qui commode desiderare poterit.

Per priores sex libros, ut et in undecimo et duodecimo, COMMANDINI textum secuti sumus, prout a Cl. *Keil*, Geometriæ Saviliano inter Oxonienses Professore, editus est: quoad libros quatuor intermedios, Latinam eorum versionem dedimus, quæ a GREGORIO concinnâta est, eâ tamen ubique lege, ut quæ vel in hâc vel illâ manifeste depravata erant, ita a nobis emendarentur, ut res postulare visa est. Quod quidem sæpissime in Libris quinto, decimo, et undecimo faciendum erat. Porro autem vix credibile est, quam frequenter ex obscuris perspicua, et ex depravatis sana elicere datum est, immutatâ tantummodo Propositionum vel Definitionum serie, et in ordinem redactis, quæ, nescio quâ Editorum incuriâ, e locis suis turpiter antea amota erant. Hoc, exempli gratiâ, ipsissimum est, quod præter

alia de quibus mox dicturi ſumus, quoad novem priores *Libri quinti* definitiones, audacter fecimus. Simul autem ut intelligant ii, qui Euclidem noſtrum in manus ſumpſerint, quomodo ſingula in aliis item editionibus diſpoſita ſunt, numeros ordinem apud eas indicantes ad oram libri ſemper apponi curavimus, quod et ſemel monuiſſe ſatis eſto.

Verum in his, de quibus loquimur, definitionibus, ordinem earum immutare tantummodo, non erat ſtatim in ſolido quoque locare omnia. Definitionem *ſeptimam* Libri quinti, quæ aliter penes nos *nona* fuiſſet, abjecimus omnino et ablegavimus, et aliam ejus loco adſcripſimus, quæ Veterum Geometrarum ἀκρίβειαν magis ſaperet; rem, de quâ agit, dilucidius exponeret; et ex quâ Propoſitionum, quæ ab ea pendent, demonſtrationes, ope emendationis noſtræ plus in ſe elegantiæ ſuſciperent, et etiam perſpicuitatis. Cæterum ulterius indaganda res eſt, et quæ ad quæſtionem hanc pertinent, altius eruenda; ne aut nimiæ arguamur fiduciæ, aut etiam conſilii, quod minus eſt, male ſuſcepti.

Quotiescunque igitur dicimus duarum magnitudinum proportionem ad ſe invicem, *majorem* vel *minorem* eſſe duarum aliarum magnitudinum proportione, loquimur *Catachreſtice.* Proportio, ſecundum ipſius Euclidis definitionem, ſub illam e Categoriis cadit, quæ vocatur πρός τι. Porro autem illa, inter quæ intercedit relatio hæc, quam

Propor-

Proportionem appellamus, quantitates ſunt; nequit igitur relatio hæc in ſe τὸ πόσον ſuſcipere; nequaquam enim fieri poteſt, unam eandemque rem ſimul et *relatum* eſſe, et *relationem*. Si itaque vocabulis nunquam, niſi legitime, uti conceſſum foret, nullo modo illud dicere liceret, proportionem quam habet A ad B, vel *majorem* eſſe vel *minorem* proportione, quæ inter alias duas magnitudines intercedit. Quam tamen loquendi formulam, quia ita voluit uſus, "quem penes arbitrium eſt," eo, quem obtinuit, loco non ejecimus; tantummodo, quo ſenſu accipienda eſt, oſtendere conati ſumus, novam rei ipſius definitionem adhibentes, quæ verbis antea tam incongruis, et parum idoneis explicata eſt. Exinde etiam, ut ſupra dictum eſt, propoſitiones quæ e definitione de quâ agimus, omnino pendent, perſpicue magis et dilucide demonſtrare licuit. Immo et præter hæc ſuſpicari conſuevimus, definitionem a nobis adhibitam, vel eam eſſe, quam Euclides ipſe poſuit, vel, ad minimum, ei ſimillimam. Saltem, quæ toties ab Editoribus hoc in loco repetita eſt, ab Euclide profluxiſſe nullo modo cenſenda eſt; primo, quod verbis quibus ille nunquam conceptus ſuos in medium profert, exprimitur; tum autem præcipue, quod diſciplinis Mathematicis prima, quod aiunt, labra admoventibus liquido non conſtet, unam eandemque magnitudinem ad ſecundam non poſſe habere *majorem* ſimul et *minorem* proportionem, (ſenſu definitionis illius, quæ vulgo circumfertur,) quam habet ſecunda ad tertiam.

 Satis

Satis profecto scimus omnino hoc fieri non posse: sed in eo subsistimus, *Tyronibus hoc non constare*, neque rem ita se habere aliquem iis comprobaturum esse, nisi propositionum ope, quæ ex aliquâ *majoris* et *minoris* proportionis definitione demonstrandæ sunt. His interea incommodis omnino vacat definitio nostra. Ipsissimis effertur vocabulis, quibus et alibi Euclides utitur, ubi de re eâdem agit, (Vide *Dator. Definit.*) et ambiguitatem, quod maximum est, nullam omnino in se habet.

Cæterum, dum hæc ponimus, litem aliâ ex parte fortasse movebunt aliqui, et Definitioni nostræ objicient, graviter laborare eam, quia *pro concesso sumit*, aliquam semper exstare magnitudinem, quæ ad datam magnitudinem datam quamvis proportionem habeat. Porro ob hoc ipsum inquient Euclidi eam minime omnium accensendam esse, siquidem ille arbitrio suo nunquam ita utitur, nec a nobis exigit, ut concedamus exstare aliquid, quod prius non docuit quomodo inveniamus, vel quibus artificiis in medium proferre possimus; quod est multorum e recentioribus, qui in eum Commentarios scripserunt, tam fidenter et toties prolatum de Euclide judicium. Pace autem tantorum virorum, causâ idcirco non cadimus; nam quod afferunt ii, veritatem sibi consentientem non habet. Lege eâ, de quâ certant, Euclides ipse se non obstringit, ubi in Libro Elementorum quinto de illustribus iis et tam late paten-

patentibus relationibus agit, quas inter ſe habent quantitates continuæ, quicquid illud ſit, quod apud eum uſitatius eſt, (ſed tamen uſitatius tantummodo, non conſtanter et perpetuo factum) dum figurarum affectus ſpeciales tradit, aut effectionem problematum ad hos ſpectantium. Sed ut intra ea, quæ latius patent, diutius me non contineam, *hoc ipſum*, quod in definitione noſtrâ *pro conceſſo ſumitur*, ab Euclide ipso quoque *pro conceſſo ſumptum eſt*, ubi in ſecundæ et aliarum Libri duodecimi propoſitionum demonſtratione verſatur; ſicut et alios omnes facere neceſſe eſt, quotieſcunque per *Exhauſtionum* methodum, aliquid ponere volunt, aut certum eſſe oſtendere; cum iſtius methodi principium et origo, illud nimirum ſine quo nulla omnino eſſet, hoc ipſum ſit, quod et nos in definitione noſtrâ uſurpavimus. Unde obiter quoque notandum, quam inominato nonnulli e Libro quinto propoſitionum decimæ octavæ et aliarum quarundam demonſtrationes ſuſtulerint, quales in *Commandini* Editione juxta Theonem extant, et alias earum loco induxerint, non efficaciores, tædii autem et moliminis longe majoris. Et de his quidem hactenus.

Jam autem ex ipſâ ordinis immutatione, quæ nobis complacuit quoad novem priores Libri quinti definitiones, *tertiæ*, *quintæ*, et *ſextæ* apud nos, olim *tertiæ*, *octavæ*, et *nonæ*, luce clarior eſt utilitas, licet ita hallucinentur nonnulli, ut eas prorſus abjiciant, aut nihili pendant. Siquidem omnia a

nobis ita diſpoſita ſunt, ut tandem aliquando μετά τινος ὁδοῦ καὶ τάξεως explicetur hæc definitionum ſeries, impedita antea, et mire interturbata. Fac enim in iiſdem periculum, prout apud alias Elementorum editiones extant, et nihil inveneris, quod aut perſpicuum, aut ad doctrinam utile, vel denique iis, quibus interponitur, ſatis conſonum eſt—Rem ipſam deinde perpendito, et ſubductis rationibus, quomodo ex ſalebris hiſce quis ſe expediat aliter quam nos fecimus, ut opinor, vix invenies. Inſuper ordinem ipſum a nobis præfinitum aperte comprobant omnia, vel potius eum unice expoſcunt. Primo enim de *Proportionum analogiâ* differere inſulſum fuiſſet, niſi prius, ut per definitionem *ſextam* factum eſt, olim *nonam*, ubi eam inveniremus, commoniti fuerimus; quod tamen ipſum, ubinam invenienda eſſet Analogia, fruſtra indicaſſet aliquis, qui illud etiam prius non oſtenderat, quidnam Analogia ipſa ſit, quod definitionis *quintæ*, olim *octavæ* officium eſt. Porro effatum hoc, analogiam eſſe proportionum ſimilitudinem, nihilo magis quam barbare dictum aliquid nos erudiviſſet, ſi non antea quoque intellexerimus, *quid eſſet* proportio, quod edocere, *tertiæ* definitionis eſt. Totâ enim errant viâ, quod tamen fecerunt nonnulli aliter quidem non ἀγεωμέτρητοι, qui *proportionalitatem* ſive *analogiam* cum *proportione* quodammodo confundunt, et naturam ejus *ſeptima* Definitione, olim *quintâ*, ſatis indicari opinantur. Etenim Definitio iſta neque de Analogiæ, neque de Proportionis naturâ quicquam omnino

omnino agit ἁπλῶς ſumptâ, et prout per ſe exſtat. Non iſtiuſmodi definitio eſt, quam ſummam et optimam eſſe ſtatuunt Dialectici, et quæ apud eos appellatur, λόγος τῆς ὀυσίας. Deſcriptio rei per certa quædam attributa, quæ aſſidue eam comitantur, potius eſt, quam definitio abſoluta, et proprie ita dicta. Indicium ponit proculdubio, quo magnitudines proportionales, id eſt, eæ quæ, binæ comparatæ, ſimilitudine Proportionis inter ſe gaudent, ab aliis dignoſcantur, quæ eandem inter ſe non habent Proportionis convenientiam; quod tamen *Proportione ipſâ* non prius explicata, nihilo magis profuerat, quam ſi nobis dixerat aliquis, exempli gratiâ, quomodo corpora *vi electricâ prædita* ab aliis diſtingueremus, ignaris interea et omnino indoctis, quid ſit, vel in quo conſtaret ipſa *hæc vis electrica*. Rectiſſime igitur, et etiam neceſſario docet Definitio *tertia*, quid ſit *Proportio*, et id etiam per λόγον τῆς ὀυσίας.

Quæritur a nonnullis etiam, quare ullâ omnino opus ſit Proportionis definitione, cum nullam expoſcant homines, ut ope ejus intelligant, quid a vocabulis "majus" aut "minus;" exempli gratiâ, aut "æquale" innuitur. Retorquendum eſt, quia voces illæ, ſimplex aliquid, et perſpicuum, et nullo negotio intelligendum exprimant; Proportio non item, ſed vocabulum ſit, quod licet in ore omnium, pauciſſimis tamen præfinitam aliquam aut perſpicuam rei ipſius cognitionem idcirco ſufficiat. Quod ſi aliter eſſet,

non

non ut ſupra dictum eſt, ita omnia permiſcerent homines, ut interdum etiam *Proportionem* et *Proportionalitatem* unam eandemque rem eſſe, ullo modo exiſtimarent. Ponimus itaque non commodam tantummodo, ſed neceſſariam eſſe *Proportionis* definitionem; ubi Græco ſermone quis uteretur, præcipue, cum ex omnibus vocis λόγυ ſignificationibus, nullam apud Græcos in ſe recipit, vulgo ſaltem et uſitate, quæ proportionem innuere videatur.

Obſtrepunt interea alii, et Euclidi objiciunt, definitionem *Proportionis* quæ ab eo tradita eſt, *Metaphyſicam* eſſe, quod et certiſſime ita ſe habet. Neque tamen ſola eſt, aut unica hujuſce generis definitio, quâ Elementa ſua ab Euclide munita ſunt. Quid enim? Unitatis et Numeri apud eum Definitiones nonne etiam *Metaphyſicæ* ſunt? Quomodo autem ſine harum rerum definitionibus, numerorum affectus explicare potuerat, vel quomodo res, quæ generis generaliſſimi tam fere ſunt, aliter definire licuit, niſi *Metaphyſice?*—Adde, *Metaphyſicam* doctiſſimos e veteribus Geometris non tam averſari ſolitos eſſe, quam e recentioribus complures, qui tamen ſibi mirifice plaudunt, et propter ingenii ſui, et doctrinæ excellentiam.

Nosmet e contra Euclidis cauſam etiam ulterius agere non piget, et efficere, modo poterimus, ut *Definitionem hanc tertiam* in poſterum homines non refugiant, quaſi labem aliquam e *Metaphyſicis*

phyſicis in ſe contraxerit. Nihil uſpiam in Elementis ſuis ad examen adigit Euclides, niſi cujus antea dederit *definitionem eſſentiæ*, ſi excipias tres e figuris ſolidis, Sphæram nimirum, Conum rectum, et Cylindrum rectum; quas, quænam ſint, oſtendit, illud utique indicando, quomodo per motum generari poſſint, unde et vera eorum eſſentia ſtatim mente percipitur. Præter hæc, ut diximus, in aliis omnibus pro definitione utitur λόγῳ αὐτῶν τῆς ἐσίας. Definitiones hujuſcemodi omnes eæ ſunt, quibus oſtendit quid ſit Circulus, quid Rhombus aut Quadratum, quid Priſma aut Pyramis, quid denique Angulus Planus. Si de Proportione igitur diſſerere inceperat, neque tamen prius illam per λόγον τῆς ἐσίας definierat, aliter et minus accurate egiſſet in re ſubtili et difficillimâ, quam pro more ſuo, in iis, quæ diſcentibus multo minus moleſtiæ faceſſunt. Quod ſi, ſimul ac ad Proportionem devenerit, et antequam de eâ ulterius ageret, definienda eſſet et ea quoque, prout cætera, per λόγον τῆς ἐσίας, quomodo aliter hoc, quam ab Euclide factum eſt, fieri potuiſſet, vellem mortalium aliquis mihi indicaret. *Relatio* enim eſt hæc Proportio, et nihil aliud, et *quantitatum* quoque, non aliarum rerum relatio. Eſſentia autem, vel alicujus τὸ τί ἦν εἶναι, alio modo definiri nequit, quam Categoriam indicando ſub quam cadit, et enunciando quoque, quomodo ab aliis ſub eandem Categoriam cadentibus diverſa ſit. Quorum utrumque ab Euclide factum eſt, eâ Proportionis definitione, quæ Libro Elementorum quinto præmittitur.

mittitur. Interea videri hanc definitionem magis *Metaphysicam*, quam eas, quibus Circulus docuit quid esset, aut Quadratum (exemplis tantummodo utimur) evenit propter rei ipsius naturam, tam longe a sensibus remotæ, et a conceptibus quæ per eos intrant. *Figura* scilicet ex eorum genere est, quorum, cum non sint essentiæ primariæ, ἐσίαι πρῶται, ut cum Aristotele loquamur, nulla omnino existentia est præter eam quæ est in subjecto, ἐν ὑποκειμένῳ. Subjectum autem *figuræ* est *Materies*, sive Ὕλη. *Figuræ* itaque, Circuli, Quadrati, aut Trianguli existentia unice in *Corpore* est; non tamen in αἰσθητῷ aliquo, (de *figuris* etenim perfectis jam loquimur, quoniam de illis tantummodo Mathesis agit) sed in ὕλῃ πεπερασμένῃ, (siquidem hoc est quod per "Corpus" significare volumus,) qualis *mente intelligenda est*. In hâc inquam, et nullibi alias est *figurarum* existentia—inter quæ evenit tamen, ut earum adumbrationes quædam in iis quoque appareant, quæ αἰσθητὰ sunt, et quæ *sensibus subjiciuntur*. Porro quoniam quamplurimis contingit εἴδωλα hæc, sive umbras, pro rebus ipsis sumere, Triangulum et aliæ quævis figuræ tam per *phantasiam*, quam per *intellectum* agnoscuntur; et in hisce omnibus, λόγος τῆς ἐσίας *phantasma* rei *perceptioni* necessario objicit, pariter ac *formam* ejus *intellectui*. E quibus, non vulgus tantummodo, sed omnes fere qui Veterum Dialecticâ non imbuti sunt, in *phantasmate* hærere potius quam in *formâ intellectuali* solent, tanquam hoc melius et certius

rem

rem ipsam repræsentaret, contra illud quod verum est. Quoad *Proportionem* interea, quæ *mera Relatio* est, *phantasma* ejus nullum omnino exhiberi potest, quod intueamur, et in quo sensuum ope se defigat animus, quod vitio Euclidi vertitur et definitioni ejus; quasi *per eum* proportionis doctrina difficilis esset et obscura, dum tamen *e rei ipsius naturâ* omnino exoritur, si quid hujuscemodi sit circa eam incommodum. Neque enim non iisdem opprobriis oneratæ fuissent etiam Circuli apud eum, vel Quadrati definitiones, si similitudinem aut adumbrationem quadrati vel circuli in externis rebus nunquam viderimus. Sed ut post unum jam verbum aut alterum disputatio hæc ad finem perducatur—meditati enim sumus præfationem, scripsimus fere commentarios.

Discrepantibus in tantum et conturbatis hominum de hac Matheseos partitione sententiis, nihil mirum est, si inveteraverint etiam loquendi de eâ formulæ, neque veritati, neque sibi ipsis consonæ. Alii itaque vocabula "rationem" et "proportionem," alii "proportionem" et "proportionalitatem" promiscue usurparunt, ut si eadem utriusque significatio esset; "rationem" alii dixerunt "proportionem" esse quam habet magnitudo una ad aliam, quasi Proportio *genus* esset, Ratio interea *species*—omnia multo aliter, quam oportuit. Quod verum et legitimum est, λόγον per Rationem, et ἀναλογίαν, per Proportionem, ubi Græca Latino sermone proferenda sunt, unice exprimere debemus.

Sed

Sed incuriam quæ tam diu invaluit, non noſtri eſt amovere, neque ſatis commodum eſſet jam aliter, quam ex recepto more loqui; unde factum eſt nos etiam Proportionis nomine λόγον indicaſſe, et ἀναλογίαν, ubi Græco vocabulo non utimur, Proportionalitatem appellâſſe, vel potius, ubi noſmet ipſi loquimur, Proportionis convenientiam.

Abſolutis hiſce, in iis quæ de opere hoc noſtro etiamnum dicenda reſtant, Lectorem non diu morabimur. *Decimus* Elementorum Liber, utpote qui minime, vel a doctis, vel a diſcentibus attrectatur, longe majorem quam alii emendationem poſtulabat, et operâ noſtrâ pluries emendatus eſt. Neque tamen opus eſt, ut eorum quæ ibi interjecimus, vel etiam reſtituimus, ratio a nobis ſingulatim reddatur. Adeo cuivis, ut opinamur, pro re natâ manifeſtum erit, quâ de cauſâ et quibus conſiliis hujuſcemodi omnia immutavimus. Quod in Libro *undecimo* a nobis factum eſt, quæ extra dubium deſiderabatur, *Paralleliſmi Rectæ lineæ et Plani* definitionem adjecimus; definitiones ipſas in ordinem redegimus; et *ſimilium Solidarum figurarum* definitionem, (*nonam* olim, penes nos *undecimam*,) eâ ex parte auximus quâ manca erat et imperfecta; ita ut ſtatim ex illâ, et per conſectarium agnoſcenda ſit *ſimilium eorum Solidorum* æqualitas, in quibus *latera homologa ſunt æqualia*. Quare et omnino quoque abjecimus eam, quæ in cæteris editionibus

tradita

tradita est, *æqualium et similium solidorum* Definitionem; quæ eo nomine etiam appellari nunquam debuit, cum nothum tantummodo Theorema sit, quod fusius ostendit SIMSONUS in Euclide suo Anglice reddito; ubi diserte quoque indicavit, quibus in locis res ita se habitura esset, et novas earum propositionum demonstrationes concinnavit, quæ neque ex accuratâ definitione antea derivatæ erant, neque rectâ ratiocinatione absolutæ. Quin et majus aliquod a nobis, et amplius factum est. Emendatâ *Solidorum similium* definitione, et positis accurate iis quæ *æqualitatem* eorum indicare possint, propositiones Libri *undecimi* 25tam, 27mam, 28vam, 29nam, 31mam, et 33iam, una cum *duodecimi* tertiâ et octavâ, quantum conjecturâ assequi possumus, ita demonstratas dedimus, ut ab Euclide ipso verisimile est eas olim prodivisse. Neque temere hoc a nobis dictum esse quivis pro se intelligat. In omnibus enim, quæ ita emendavimus, nihil aliud operâ nostrâ factum est, vel omnino faciendum erat, quam in demonstrationibus reponere, quod in singulis omnino desiderabatur—illud nimirum, quod, nescio quâ incuriâ, e *Solidorum similium* definitione pariter excidisse censendum est, utcunque neque in vetustissimis Elementorum Editionibus, neque etiam in Codicibus MSS. inveniatur. Problematis insuper, de quo agit Propositio Libri *undecimi* vicesima sexta, solutionem adjecimus uberiorem multo, quam, quæ ex angustiis suis principiis a SIMSONO prolata est.

Corollaria,

Corollaria, *Lemmata*, et *Scholia*, quæ locis innumeris in hâc noſtrâ Euclidis Editione interjecta ſunt, et quæ in receptis editionibus non inveneris, ſive ex aliis deſumpta, ſive a nobis concinnata, aſteriſmo notantur. Quibus auctoris nomen non adſcribitur, ea omnia a nobis profecta ſunt. Quæcunque autem ſint ea, vel quales quales, quæ in Editione hâc noſtrâ fecimus emendationes, ducem in pleriſque eorum SIMSONUM certiſſime non ſecuti ſumus; propter quod a nonnullis ſatis certo improbabimur, ab aliis fortaſſe, ut fieri ſolet, diverſum experiemur judicium. Aliud interea nobis propoſitum fuit, et aliud unice in Euclide emendando, Euclide ipſo duntaxat magiſtro uti, per omnia intueri eum, et ad illius mentem, quantum fieri potuit, omnia componere. Porro autem, licet in eandem cum nobis arenam deſcenderit, cum SIMSONO multoties non ſentimus; ubique non aſtipulamur ejus de aliis Elementorum Editoribus judicio; quin et ex iis etiam quæ Operi ſuo inſeruit, ſupervacanea nonnulla, aut infructuoſa, impedita alia, et æquo longiora nobis ſemper viſa ſunt. Immo hoc ipſum erat, ut rem non diffiteamur, quod primo omnium ad Opus hoc noſtrum excitavit nos, et tandem aliquando etiam ad conficiendum impulit—certa nimirum neque unquam immutata opinio, Euclidem a SIMSONO ſermone Anglico donatum Juventutis Academicæ inſtitutioni non ſufficere, aut ſatis fideliter Veterum Geometrarum methodum, quæ nunquam non ἀκριβεστάτη eſt, iis in conſpectu

ſpectu ponere. Sed neque interea quoque, in egregii iſtius Viri exercitationibus, non confitemur iidem ineſſe multa et artificii ſingularis, et exquiſitæ elegantiæ, quibus ſpartam quam nactus eſt feliciter ornavit, et unde laudem ſibi jure adeptus eſt non mediocrem. Valeas, Lector, et quæ tibi in manus tradita ſunt, æqui bonique conſulas.

Dabamus ex Ædibus Bromleianis,
Kal. Mart. MDCCCII.

S.°R.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

PUNCTUM eſt, cujus nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero eſt longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis interjicitur punctis.

V.

Superficies eſt id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini ſunt lineæ.

VII.

Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus eſt duarum linearum in plano ſeſe

contingentium, et non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio *.

IX.

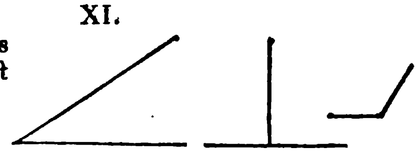
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X.

Cum vero recta linea super rectâ lineâ insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum : et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.



XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

XIV.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana, unâ lineâ contenta, quæ circumferentia appellatur : ad quam ab uno puncto, intra figuram existente, omnes rectæ lineæ pertingentes sunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

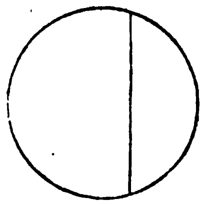
Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, et ex utrâque parte a circumferentiâ circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum secat.

XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, et eâ circuli circumferentiâ, quæ a diametro intercipitur.

* *Cum plures anguli ad unum punctum existunt, designatur quilibet tribus literis; quarum illa quæ est ad verticem anguli, in medio ponitur, e. g. in Fig. Prop.* xiii. *libri primi angulus rectis* A B, B C *comprehensus dicitur angulus* A B C; *et angulus rectis* A B, B E *contentus dicitur angulus* A B E.

XIX.



XIX.

Segmentum circuli eſt figura, quæ rectâ lineâ, et circuli circumferentiâ continetur.

XX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

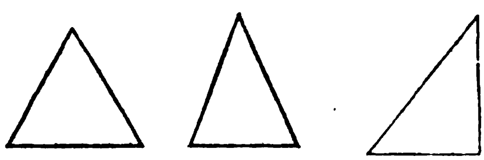
Multilateræ vero, quæ pluribus quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Iſoſceles, ſive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

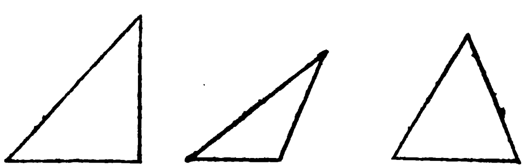


XXVI.

Scalenum vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem eſt triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

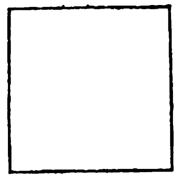
Obtuſangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum eſt, quod et æquilaterum eſt, et rectangulum.



XXXI.

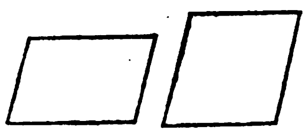
Alterâ parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non eſt.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.

XXXIII.

Rhomboides, quæ et oppoſita latera, et oppoſitos angulos inter ſe æquales habens, neque æquilatera eſt, neque rectangula.



XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, et ex utrâque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.

POSTULATA.

I.

Poſtuletur a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum et directum producere.

III.

Quovis centro, et intervallo, circulum deſcribere.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, et inter ſe ſunt æqualia.

II.

Et ſi æqualibus æqualia adjiciantur, tota ſunt æqualia.

III.

Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.

IV.

Et ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, tota ſunt inæqualia.

V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VII.

Et quæ ejuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VIII.

Et quæ ſibi mutuo congruunt, inter ſe ſunt æqualia.

IX.

Totum eſt ſuâ parte majus.

X.

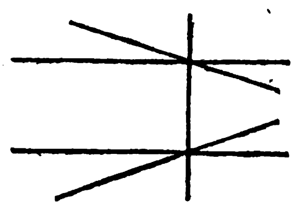
Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

XII.

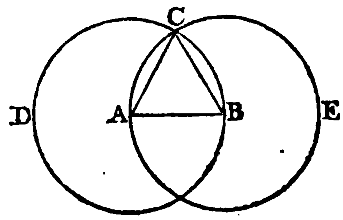
Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, et ex eâdem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ, in infinitum productæ, inter ſe conveniunt ex eâ parte, in quâ ſunt anguli duobus rectis minores. Vid. Cor. Prop. xxviii. 1^{mi}.



[I.] PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum conſtituere.

Sit data recta linea terminata A B. Oportet ſuper ipſâ A B triangulum æquilaterum conſtituere. Centro quidem A, intervallo autem A B, circulus de- ſcribatur B C D[a]. Et rurſus centro B, intervalloque B A, deſcribatur circulus A C E[a], et a puncto C, in quo circuli ſe invicem ſecant, ad A, B ducantur rectæ lineæ C A, C B[b]. Quoniam igitur A centrum eſt circuli D B C, erit A C ipſi A B[c] æqualis. Rurſus quoniam B circuli C A E eſt centrum, erit B C æqualis B A: oſtenſa eſt autem et C A æqualis A B: utraque igitur ipſarum C A, C B ipſi A B eſt æqualis. Quæ autem eidem ſunt æqualia, et inter ſe æqualia ſunt. Ergo C A ipſi C B eſt æqualis: tres igitur C A, A B, B C inter ſe ſunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum eſt A B C, et conſtitutum eſt ſuper datâ rectâ lineâ terminatâ A B. *Q. E. F.*

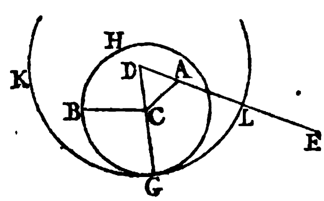


[a] Poſt. 3.
[b] Poſt. 1.
[c] Def. 15.

[II.] PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C: oportet ad A punctum, ipſi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur a puncto A ad C recta linea A C[d]: et ſuper ipſâ conſtituatur triangulum æquilaterum D A C[e]: producanturque in directum ipſis D A, D C rectæ lineæ A E, C G[f]. Et centro quidem C, intervallo autem B C, circulus B G H deſcribatur[g]. Rurſuſque centro D, et intervallo D G, deſcribatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum C centrum eſt B G H circuli, erit B C ipſi C G æqualis[h]. Et



[d] Poſt. 1.
[e] 1. hujus.
[f] Poſt. 2.
[g] Poſt. 3.
[h] Def. 15.

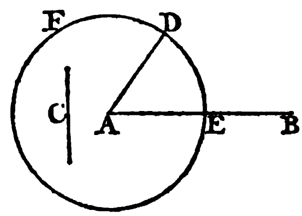
Et rursus quoniam D centrum est circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D C: reliqua igitur A L reliquæ G C est æqualis[i]. Ostensa autem est B C æqualis C G. Quare utraque ipsarum A L, B C est æqualis ipsi C G. Quæ autem eidem æqualia sunt, et inter se sunt æqualia. Ergo, et A L est æqualis B C. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C æqualis posita est A L. *Q. E F.*

[i] Axiom. 3.

PROP. III. PROBL. [III.]

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, a majore minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B et C; quarum major sit A B: oportet a majore A B minori C æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea A D[k]; et centro quidem A, intervallo autem A D, circulus describatur D E F[l]. Et quoniam A centrum est D E F circuli, erit A E ipsi A D æqualis. Sed et C æqualis A D. Utraque igitur ipsarum A E, C ipsi A D æqualis erit. Quare et A E ipsi C est æqualis[m]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus A B et C, a majore A B minori C æqualis abscissa est A E. *Q. E. F.*



[k] Per antecedentem.

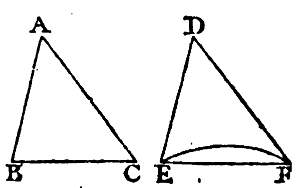
[l] Post. 3.

[m] Axiom. 1.

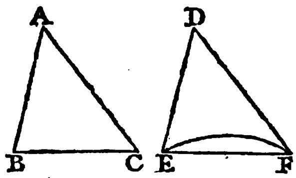
PROP. IV. THEOR. [IV.]

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et basim basi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipsi D F; et angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico,



et baſim B C baſi E F æqualem eſſe, et triangulum A B C æquale triangulo D E F, et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur; nempe angulum A B C angulo D E F; et angulum A C B angulo D F E.



Triangulo enim A B C applicato ipſi D E F, et puncto quidem A poſito in D, rectâ vero lineâ A B ipſi D E applicatâ: et punctum B puncto E congruet; quod A B ipſi D E ſit æqualis. Congruente autem A B ipſi D E; congruet et A C recta linea rectæ lineæ D F, cum angulus B A C ſit æqualis angulo E D F. Quare, et C congruet ipſi F: eſt enim recta linea A C æqualis rectæ D F. Sed, et punctum B congruebat puncto E. Ergo, et baſis B C baſi E F congruet. Nam ſi puncto quidem B congruente ipſi E, C vero ipſi F, baſis B C baſi E F non congruat;
[n] Ax. 10. duæ rectæ lineæ ſpatium comprehendent: quod [n] fieri non poteſt. Congruet igitur B C baſis baſi E F, et ipſi æqualis erit. Quare, et totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, et ipſi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipſis æquales
[o] Ax. 8. erunt [o]. Videlicet angulus A B C angulo D E F, et angulus A C B angulo D F E. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et baſim baſi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. *Q. E. D.*

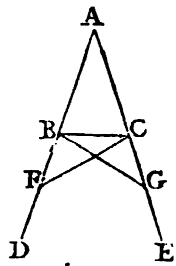
[V.] PROP. V. THEOR.

Iſoſcelium triangulorum qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis, anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt.

Sit iſoſceles triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, et producantur in directum ipſis A B, A C rectæ lineæ B D, C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B, angulum vero C B D angulo B C E æqualem eſſe. Sumatur enim in lineâ B D, quodvis punctum
[p] 3. hujus. F: atque a majore A E minori A F æqualis [p] auferatur A G: junganturque F C, G B. Quoniam igitur A F eſt æqualis A G; A B vero ipſi A C; duæ F A, A C, duabus G A,

A B

A B æquales ſunt, altera alteri; et angulum F A G communem continent. Baſis igitur F C baſi G B eſt æqualis[q], et triangulum A F C æquale triangulo A G B; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: videlicet angulus quidem A C F æqualis angulo A B G; angulus vero A F C angulo A G B. Et quoniam tota A F toti A G eſt æqualis; quarum A B eſt æqualis A C; erit[r] et reliqua B F reliquæ C G æqualis. Oſtenſa eſt autem F C æqualis G B. Duæ igitur B F, F C duabus C G, G B æquales ſunt, altera alteri; et angulus B F C æqualis angulo C G B: eſtque baſis ipſorum B C communis. Ergo et triangulum B F C triangulo C G B æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Angulus igitur F B C eſt æqualis angulo G C B; et angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus C B G eſt æqualis ipſi B C F: erit reliquus[s] A B C reliquo A C B æqualis: et ſunt ad baſim A B C trianguli. Oſtenſus autem eſt et F B C angulus æqualis angulo G C B; qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui ſunt ſub baſi, inter ſe æquales erunt. *Q. E. D.*



[q] 4. hujus.

[r] Ax. 3.

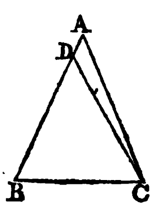
[s] Ax. 3.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum eſt quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR. [VI.]

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.

Sit triangulum A B C, habens angulum A B C angulo A C B æqualem. Dico et A B latus lateri A C æquale eſſe. Si enim inæqualis eſt A B ipſi A C; altera ipſarum eſt major. Sit major A B; atque a majori A B minori A C æqualis[t] auferatur D B; et D C jungatur. Quoniam igitur D B eſt æqualis ipſi A C; communis autem B C: erunt duæ D B, B C duabus A C, C B æquales, altera alteri;



[t] 3. hujus.

teri; et angulus D B C æqualis angulo A C B, ex hyp.
[u] 4. hujus. Basis igitur D C basi A B est[u] æqualis, et triangulum D B C æquale triangulo A C B, minus majori; quod est absurdum. Non igitur inæqualia sunt latera A B, A C. Æqualia sunt igitur. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt. *Q. E. D.*

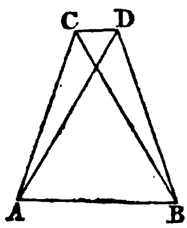
Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum est quoque æquilaterum.

[VII.]

PROP. VII. THEOR.

In eâdem rectâ lineâ, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

Si enim fieri potest, in eâdem rectâ lineâ A B duabus eisdem rectis lineis A C, C B aliæ duæ rectæ lineæ A D, D B æquales, altera alteri, constituantur, ad aliud atque aliud punctum C et D, ad easdem autem partes C et D, eosdem habentes terminos A et B, quos primæ rectæ lineæ; ita ut C A quidem sit æqualis D A, eundem, quem ipsa D A, terminum habens A; C B vero sit æqualis D B, eundem habens B terminum; et C D jungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit, et angulus A C D angulo A D C æqualis[x].

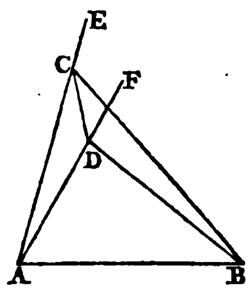


[x] 5. hujus. Major igitur est A D C angulus angulo B C D. Quare angulus B D C angulo B C D multo major erit. Rursus quoniam C B est æqualis D B, et angulus B D C æqualis erit angulo B C D: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eâdem rectâ lineâ, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes. *Q. E. D.*

SCHO-

SCHOLION.*

Si punctorum C, D alterum D angulo A C B subsit, rectis ad alterum ductis comprehenso, demonstratio ad exemplum præcedentis instituenda est, ex parte posteriore propositionis quintæ. Productis enim AC, AD, anguli E C D, F D C, qui ad basim trianguli isoscelis C A D sunt externi, inter se æquales erunt [y]; angulus igitur B D C, angulo ECD major; angulo igitur B C D ille B D C multo major; sed propter æquales B D, B C, angulus B D C angulo B C D [z] æqualis, major minori. Quod est absurdum. [y] 5. hujus. [z] 5. hujus.

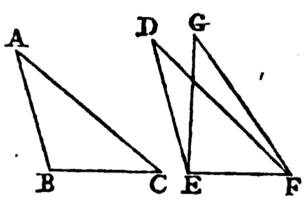


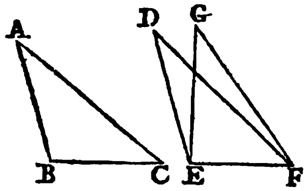
Si autem in alterutrâ ipsarum A C, B C sumatur punctum D, propositio statim constat: aliter enim toti A C vel B C pars ejus A D, vel B D æqualis esset, quod [a] fieri non potest. [a] Ax. 9.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri; ut sit A B quidem æquale D E; A C vero ipsi D F: habeant autem et basim B C basi E F æqualem. Dico angulum quoque B A C angulo E D F æqualem esse. Triangulo enim A B C applicato ipsi D E F triangulo, et puncto quidem B posito in E; rectâ vero lineâ B C ipsi E F applicatâ: congruet et C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente B C ipsi E F; congruent et B A, A C ipsis E D, D F: si enim basis quidem B C basi E F congruat; latera autem B A, A C lateribus E D, D F non congruant, sed situm mutent;



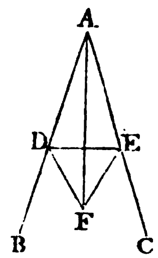


tent; ut E G, G F: conſtituentur in eádem rectâ lineâ, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad eaſdem partes; eoſdem habentes terminos. Non
[b] Per 7. hujus. conſtituuntur autem; ut demonſtratum eſt[b]. Non igitur, ſi baſis B C congruat baſi E F, non congruent et B A, A C latera lateribus E D, D F: congruent igitur. Quare et angulus B A C angulo E D F congruet, et ipſi erit æqualis. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et baſim baſi æqualem: angulum quoque, æqualibus lateribus contentum, angulo æqualem habebunt. *Q. E. D.*

[IX.] PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam ſecare.

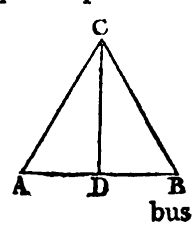
Sit datus angulus rectilineus B A C: oportet autem ipſum bifariam ſecare. Sumatur in lineâ A B quodvis punctum D; et a lineâ A C
[c] 3. hujus. ipſi A D æqualis[c] auferatur A E; junctâ-
[d] 1. hujus. que D E, conſtituatur ſuper eâ[d] triangulum æquilaterum D E F; et A F jungatur. Dico angulum B A C a rectâ lineâ A F bifariam ſecari. Quoniam enim A D eſt æqualis A E; communis autem A F: duæ D A, A F duabus E A, A F æquales ſunt, altera alteri; et baſis D F æqualis
[e] 8. hujus. baſi E F: angulus[e] igitur D A F angulo E A F eſt æqualis. Quare datus angulus rectilineus B A C a rectâ lineâ A F bifariam ſectus eſt. *Q. E. F.*



[X.] PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam ſecare.

Sit data recta linea terminata A B; oportet ipſam A B
[f] 1 hujus. bifariam ſecare. Conſtituatur ſuper[f] eâ triangulum æquilaterum A B C; et ſe-
[g] 9. hujus. cetur A C B angulus[g] bifariam rectâ lineâ C D. Dico A B rectam lineam in puncto D bifariam ſecari. Quoniam enim A C eſt æqualis C B; communis autem C D; duæ A C, C D duabus

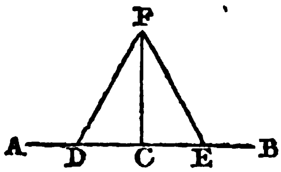


bus B C, C D æquales ſunt, altera alteri; et angulus A C D æqualis angulo B C D: baſis igitur A D baſi B D eſt [h] æqualis. Et ob id recta linea terminata A B bifariam ſecta eſt in puncto D. *Q. E. F.* [h] 4. hujus.

PROP. XI. PROBL. [XI.]

Datæ rectæ lineæ, a puncto in ipſâ dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea A B, et datum in ipſâ punctum C: oportet a puncto C ipſi A B ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quodvis punctum D: ipſique C D æqualis [i] ponatur C E, et ſuper D E conſtituatur [k] triangulum æquilaterum F D E, et F C jungatur. [i] 3. hujus. [k] 1. hujus.

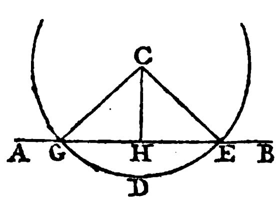


Dico datæ rectæ lineæ A B, a puncto C in ipſa dato, ad rectos angulos ductam eſſe F C. Quoniam enim D C eſt æqualis C E, et F C communis; erunt duæ D C, C F duabus E C, C F æquales, altera alteri; et baſis D F eſt æqualis baſi E F: angulus igitur D C F angulo E C F eſt æqualis; et ſunt deinceps. Quando autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt, angulos æquales inter ſe fecerit: rectus [l] eſt uterque æqualium angulorum: ergo uterque ipſorum D C F, E C F eſt rectus. Datæ igitur rectæ lineæ A B, a puncto in ipſâ dato C, ad rectos angulos ducta eſt F C recta linea. *Q. E. F.* [l] Def. 10.

PROP. XII. PROBL. [XII.]

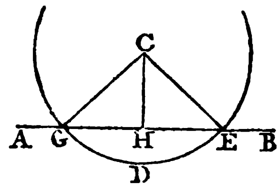
Super datâ rectâ lineâ infinitâ, a dato puncto quod in eâ non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita A B, datum vero punctum C, quod in eâ non eſt. Oportet ſuper datâ rectâ lineâ infinitâ A B, a dato puncto C, quod in eâ non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur ad alteras partes ipſius A B rectæ lineæ quodvis punctum D: et centro quidem C, intervallo autem C D, circulus [m] deſcribatur E D G: et E G in H bifariam [n] ſecetur: jungan- [m] Poſt. 3. [n] 10. hujus.



turque

turque C G, C H, C E. Dico ſuper datâ rectâ lineâ infinitâ A B, a dato puncto C, quod in eâ non eſt, perpendicularem C H ductam eſſe. Quoniam enim æqualis eſt G H ipſi H E, communis autem H C, duæ G H, H C duabus E H, H C æquales ſunt, alter alteri; et baſis C G eſt æqualis baſi



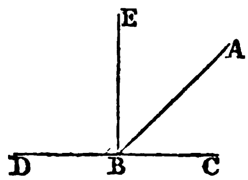
[o] 8. hujus. C E. Angulus igitur C H G angulo C H E eſt[o] æqualis; et ſunt deinceps. Cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt, angulos, æquales inter ſe fecerit; rectus[p] eſt uterque æqualium angulorum, et quæ inſiſtit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui inſiſtit: ergo ſuper datâ rectâ lineâ infinitâ A B, a dato puncto C, quod in eâ non eſt, perpendicularis ducta eſt G H. *Q. E. F.*

[p] Def. 10.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam A B ſuper rectam C D conſiſtens angulos faciat C B A, A B D. Dico C B A, A B D angulos, vel duos rectos eſſe, vel duobus rectis æquales. Si enim C B A eſt æqualis ipſi A B D; duo recti[q] ſunt: ſin minus, ducatur a puncto B ipſi C D ad rectos[r] angulos B E: anguli igitur C B E, D B E ſunt duo recti. Et quoniam C B E duobus C B A, A B E eſt æqualis, communis apponatur E B D: ergo anguli duo C B E, E B D tribus angulis C B A, A B E, E B D ſunt[s] æquales. Rurſus quoniam D B A angulus eſt æqualis duobus D B E, E B A, communis apponatur A B C: anguli igitur duo D B A, A B C tribus D B E, E B A, A B C æquales ſunt. At oſtenſum eſt angulos quoque C B E, E B D eiſdem tribus æquales eſſe: quæ vero eidem ſunt æqualia[t], et inter ſe æqualia ſunt: ergo et anguli C B E, E B D ipſis D B A, A B C ſunt æquales: ſunt autem C B E, E B D duo recti; anguli igitur D B A, A B C duobus rectis æquales erunt. Ergo cum recta linea ſuper rectam lineam conſiſtens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. *Q. E. D.*



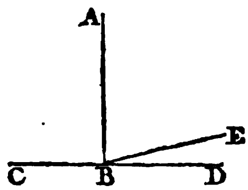
[q] Def. 10.
[r] 11. hujus.
[s] Ax. 2.
[t] Ax. 1.

PROP.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in eâ duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam A B, atque ad punctum in eâ B, duæ rectæ lineæ B C, B D, non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, A B C, A B D duabus rectis æquales faciant. Dico B D ipsi C B in directum esse: si enim B D non est in directum ipsi C B, sit ipsi C B in directum B E.

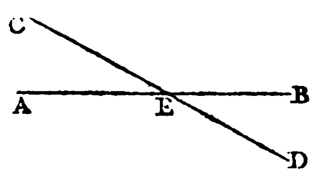


Quoniam igitur recta linea A B, super rectam C B E consistit; anguli A B C, A B E [u] duobus rectis sunt æquales. [u] 13. hujus.
Sed et anguli A B C, A B D sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur C B A, A B E ipsis C B A, A B D æquales erunt. Communis auferatur A B C. Ergo reliquus A B E reliquo A B D est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur B E est in directum ipsi B C. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter B D. Ergo C B ipsi B D in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in eâ duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. *Q. E. D.*

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ A B, C D se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem A E C angulo D E B; angulum vero C E B angulo A E D æqualem esse. Quoniam enim recta linea A E super rectam C D consistens angulos facit C E A, A E D;



erunt hi [x] duobus rectis æquales. Rursus quoniam [x] 13. hujus.
recta linea D E super rectam A B consistens facit angulos A E D, D E B; erunt A E D, D E B anguli æquales [y] duobus [y] 13. hujus.
rectis,

rectis. Ostensum autem est angulos quoque C E A, A E D duobus rectis esse æquales. Anguli igitur C E A, A E D angulis A E D, D E B æquales sunt. Communis auferatur

[z] Ax. 3. A E D. Ergo reliquus [z] C E A reliquo B E D est æqualis. Simili ratione, et anguli C E B, D E A æquales ostendentur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. *Q. E. D.*

Cor. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas, se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

[XVI.]

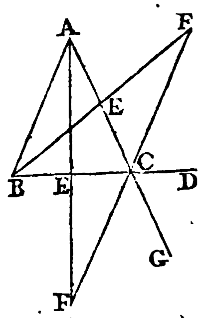
PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore et opposito est major.

Sit triangulum A B C, et unum ipsius latus B C ad D producatur. Dico exteriorem angulum A C D utrovis interiore, et opposito, videlicet C B A, et B A C majorem

[a] 10. hujus. esse. Secetur enim A C bifariam [a] in E, et juncta B E producatur ad F; ponaturque ipsi B E æqualis E F. Jungatur præterea F C, et A C ad G producatur. Quoniam igitur A E quidem est æqualis E C, B E vero ipsi E F; duæ A E, E B, duabus C E, E F æquales sunt, altera alteri: et angu-

[b] 15. hujus. lus A E B angulo F E C est æqualis [b], ad verticem enim sunt. Basis igitur

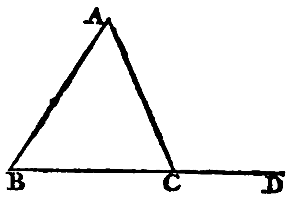


[c] 4. hujus. A B æqualis [c] est basi F C; et A E B triangulum triangulo F E C, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus B A E est æqualis angulo E C F. Sed A C D angulus major est ipso E C F. Major igitur est angulus A C D angulo B A E. Similiter recta linea B C bifariam secta, ostendetur etiam B C G angulus, hoc est A C D angulus, angulo A B C major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore et opposito major est. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.



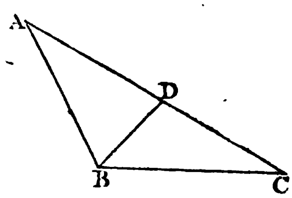
Sit triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duos angulos, quomodocunque sumptos, duobus rectis minores esse. Producatur enim B C ad D. Et quoniam trianguli A B C exterior angulus A C D major [c] est interiore, et opposito A B C: communis apponatur A C B. Anguli igitur A C D, A C B angulis A B C, A C B majores sunt. Sed A C D, A C B sunt [d] æquales duobus rectis. Ergo A B C, B C A duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque B A C, A C B, itemque C A B, A B C duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti. *Q. E. D.*

[c] 16. hujus.

[d] 13. hujus.

PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.



Sit triangulum A B C, habens latus A C latere A B majus. Dico et A B C angulum angulo B C A majorem esse. Quoniam enim A C major est, quam A B, ponatur ipsi A B æqualis A D; et B D jungatur. Et quoniam trianguli B D C exterior angulus est A D B, erit is major [e] interiore, et opposito D C B. Sed A D B æqualis [f] est ipsi A B D, quod et latus A B lateri A D sit æquale; major igitur est et A B D angulus angulo A C B. Quare A B C ipso A C B multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit. *Q. E. D.*

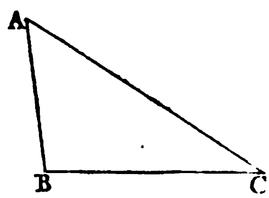
[e] 16. hujus.

[f] 5. hujus.

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum A B C, majorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico et latus A C latere A B majus esse. Si enim non est majus A C, vel æquale est ipsi A B, vel ipso minus; æquale autem non est; nam et angulus A B C angulo A C B æqualis esset [g]; non est autem. Non igitur A C ipsi A B est æquale. Sed neque minus; esset enim et angulus A B C angulo A C B minor [h]; atqui non est. Non igitur A C minus est ipso A B. Ostensum autem est neque æquale esse. Ergo A C ipso A B est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. *Q. E. D.*

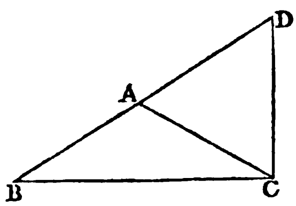


g 5. hujus.
h 18. hujus.

[XX.] PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem B A, A C majora latere B C; latera vero A B, B C majora latere A C: et latera B C, C A majora ipso A B. Producatur enim B A ad punctum D; ponaturque ipsi C A æqualis A D [i]; et D C jungatur. Quoniam igitur D A est æqualis A C, erit et angulus A D C angulo A C D æqualis [k]. Sed B C D angulus major est angulo A C D; angulus igitur B C D angulo A D C est major. Et quoniam triangulum est D C B habens B C D angulum majorem angulo B D C; majorem autem angulum majus latus subtendit [l]; erit latus D B latere B C majus; sed D B est æquale ipsis B A, A C; quare latera B A, A C ipso B C majora sunt. Similiter ostendemus et latera quidem A B, B C majora esse latere C A: latera vero B C, C A ipso A B majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. *Q. E. D.*



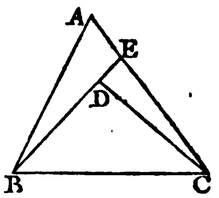
i 3. hujus.
k 5. hujus.
l 19. hujus.

PROP.

PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

Si a terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC a terminis B, C duæ rectæ lineæ intra constituantur BD, DC. Dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. Producatur enim BD ad E; et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora [m], erunt trianguli ABE duo latera BA, AE majora latere BE. Communis apponatur EC. Ergo BA, AC ipsis BE, EC majora [n] sunt. Rursus quoniam CED trianguli duo latera CE, ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB; quare CE, EB ipsis CD, DB sunt majora [n]. Sed ostensum est BA, AC majora esse BE, EC: multo igitur BA, AC ipsis BD, DC majora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito est major [o]; erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. Eâdem ratione et trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major [o]; sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB; multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si a terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. *Q. E. D.*



[m] 20. hujus.
[n] Ax. 4.
[o] 16. hujus.

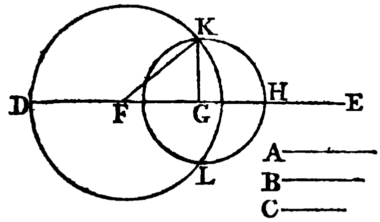
PROP. XXII. PROBL. [XXII.]

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. Oportet autem duas reliquâ majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duæ reliquâ majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A, B quidem sint majores quam C; A, C vero majores quam B; et præterea B, C majores quam A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C triangulum constituere.

 Exponatur

ponatur aliqua recta linea D E, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipsi quidem

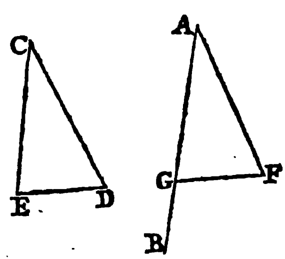


p 3. hujus. A æqualis p D F, ipsi vero B æqualis F G, et ipsi C æqualis G H; et centro F, intervallo autem F D, cir-
q 3. Postul. culus q describatur D K L; rursusque centro G, et intervallo G H, alius circulus K L H describatur, et jungantur K F, K G. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C triangulum K F G constitutum esse. Quoniam enim punctum F centrum est D K L
r Def. 15. circuli, erit F D æqualis r F K; sed F D est æqualis A; ergo et F K ipsi A est æqualis. Rursus quoniam punctum G centrum est circuli L K H, erit G H æqualis r G K; sed G H est æqualis C; ergo et G K ipsi C æqualis erit. Est autem et F G æqualis B. Tres igitur rectæ lineæ K F, F G, G K tribus A, B, C æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis K F, F G, G K, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est K F G. *Q. E. F.*

[XXIII.] PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, et ad datum in eâ punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ipsâ punctum A; et datus angulus rectilineus D C E. Oportet igitur ad datam rectam lineam A B, et ad datum in eâ punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualem angulum rectilineum constituere. Sumantur in utrâque ipsarum C D, C E quævis puncta D, E, ducaturque D E; et ex tribus rectis lineis,



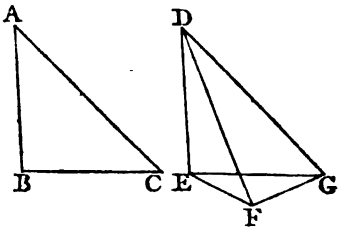
s 22. hujus. quæ æquales sint tribus C D, D E, E C, triangulum s constituatur A F G, ita ut A F sit æqualis C D, et A G ipsi C E, et F G ipsi D E. Itaque quoniam duæ D C, C E duabus F A, A G æquales sunt, altera alteri, et basis D E est æqualis

æqualis basi F G; erit et angulus D C E angulo F A G æqualis [t]. Ad datam igitur rectam lineam A B, et ad datum in eâ punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualis angulus rectilineus constitutus est F A G. *Q. E. F.* [t] 8. hujus.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri; videlicet latus quidem A B æquale lateri D E, latus vero A C æquale D F. At angulus B A C angulo E D F sit major. Dico et basim B C basi E F majorem esse.



Quoniam enim angulus B A C major est angulo E D F, constituatur [u] ad rectam lineam D E, et ad punctum in eâ D, angulo B A C æqualis angulus E D G, ponaturque alterutri ipsarum A C, D F æqualis [x] D G; et G E, F G jungantur. Itaque quoniam A B quidem est æqualis D E, A C vero ipsi D G; duæ B A, A C, duabus E D, D G æquales sunt, altera alteri; et angulus B A C est æqualis angulo E D G; ergo basis B C basi E G est [y] æqualis. Rursus quoniam æqualis est D G ipsi D F; est angulus D F G angulo D G F [z] æqualis; erit itaque D F G angulus angulo E G F major; multo igitur major est E F G angulus ipso E G F. Et quoniam triangulum est E F G, angulum E F G majorem habens angulo E G F; majori autem angulo latus majus subtenditur [a]; erit et latus E G latere E F majus; sed E G latus est æquale lateri B C. Ergo et B C ipso E F majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt. *Q. E. D.*

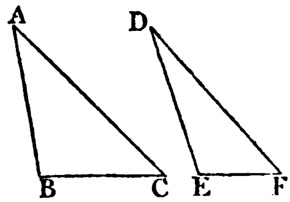
[u] 23. hujus.
[x] 3. hujus.
[y] 4. hujus.
[z] 5. hujus.
[a] 19. hujus.

[XXV.]

PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus A B æquale lateri D E, et latus A C lateri D F. Basis autem B C basi E F sit major. Dico et angulum B A C angulo E D F majorem esse. Si enim non est major,



vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus B A C angulo E D F: esset enim et basis B C basi E F æqualis [b]. Non est autem. Non igitur æqualis est B A C angulus angulo E D F. Sed neque minor; minor enim esset [c] et basis B C basi E F. Atqui non est. Non igitur angulus B A C angulo E D F est minor. Ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus B A C angulo E D F necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. *Q. E. D.*

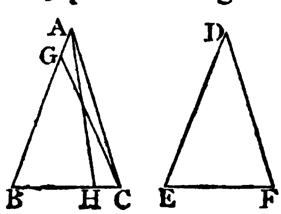
[b] 4. hujus.
[c] 24. hujus.

[XXVI.]

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duos angulos A B C, B C A duobus angulis D E F, E F D æquales habeant, alterum alteri; videlicet angulum quidem A B C æqualem angulo D E F, angulum vero B C A angulo E F D. Habeant autem et unum latus



uni

uni lateri æquale, et primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus B C lateri E F. Dico et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus ſc. A B lateri D E, et latus A C ipſi D F, et reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inæqualis eſt A B ipſi D E, una ipſarum major eſt. Sit major A B, ponaturque G B æqualis D E; et G C jungatur. Quoniam igitur B G quidem eſt æqualis D E, B C vero ipſi E F, duæ G B, B C duabus D E, E F æquales ſunt, altera alteri; et angulus G B C æqualis angulo D E F. Baſis igitur G C baſi D F eſt [d] æqualis; [d] 4. hujus. et G B C triangulum triangulo D E F; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Ergo G C B angulus eſt æqualis angulo D F E; ſed angulus D F E angulo B C A æqualis ponitur; quare et B C G angulus angulo B C A eſt æqualis, minor majori; quod fieri non poteſt. Non igitur inæqualis eſt A B ipſi D E: ergo æqualis erit. Eſt autem et B C æqualis E F. Itaque duæ A B, B C duabus D E, E F æquales ſunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis angulo D E F. Baſis igitur A C baſi [d] D F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F eſt æqualis. Sed rurſus ſint latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur, æqualia, ut A B ipſi D E. Dico rurſus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia eſſe; A C quidem ipſi D F, B C vero ipſi E F; et adhuc reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inæqualis eſt B C ipſi E F, una ipſarum major eſt. Sit major B C, ſi fieri poteſt, ponaturque B H æqualis E F, et A H jungatur. Quoniam igitur B H quidem eſt æqualis E F, A B vero ipſi D E; duæ A B, B H duabus D E, E F æquales ſunt, altera alteri, et angulos æquales continent; ergo [d] baſis A H baſi D F eſt æqualis; et A B H triangulum triangulo D E F; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Æqualis igitur eſt angulus B H A angulo E F D. Sed E F D eſt æqualis [e] angulo B C A. Ergo et B H A [e] ex hyp. angulus angulo B C A eſt æqualis. Trianguli igitur A H C exterior angulus B H A æqualis eſt interiori et oppoſito B C A; quod fieri non poteſt [f]. Quare non in- [f] 16. hujus. æqualis eſt B C ipſi E F; æqualis igitur. Eſt autem et A B æqualis D E. Duæ igitur A B, B C duabus D E, E F æquales ſunt, altera alteri; anguloſque æquales con-

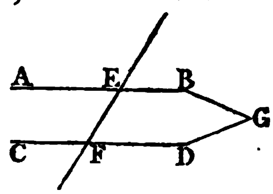
 tinent.

tinent. Quare basis A C æqualis est basi D F, et B A C triangulum triangulo D E F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. *Q. E. D.*

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B, C D recta linea E F incidens alternos angulos A E F, E F D æquales inter se faciat. Dico rectam lineam A B ipsi C D parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ A B, C D, vel ad partes B, D convenient, vel ad partes A, C. Producantur, conveniantque ad partes B, D in puncto G. Itaque



[g] 16. hujus. G E F trianguli exterior angulus A E F major [g] est interiore et opposito E F G; sed et æqualis [h]; quod fieri
[h] ex hyp. non potest. Non igitur A B, C D productæ ad partes B, D convenient. Similiter demonstrabitur neque convenire ad partes A, C. Quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ [i] inter se sunt. Parallela igitur est
[i] Def. 35. A B ipsi C D. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ. *Q. E. D.*

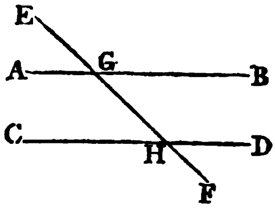
[XXVIII.] PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et opposito et ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B, C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori, et opposito G H D æqualem faciat; vel interiores et ad easdem partes B G H, G H D duobus rectis æquales. Dico rectam lineam A B rectæ C D parallelam esse. Quoniam enim

E G B

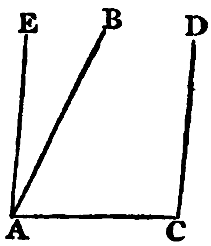
E G B angulus æqualis eſt [k] angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H [l], erit et angulus A G H angulo G H D æqualis; et ſunt alterni. Parallela igitur eſt A B ipſi C D [m]. Rurſus quoniam anguli B G H, G H D duobus rectis ſunt æquales [n], et ſunt A G H, B G H æquales duobus rectis [o]: erunt anguli A G H, B G H angulis B G H, G H D æquales. Communis auferatur B G H. Reliquus igitur A G H eſt æqualis reliquo G H D; et ſunt alterni. Ergo A B ipſi C D parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et oppoſito et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ. *Q. E. D.*



[k] ex hyp.
[l] 15. hujus.
[m] Ex antecedente.
[n] ex hyp.
[o] 13. hujus.

Cor. * Si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores et ex eâdem parte angulos duobus rectis minores fecerit; rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi invicem occurrent ex eâ parte, ex quâ ſunt anguli duobus rectis minores.

Incidat enim in duas rectas lineas A B, C D recta linea A C, ita ut angulos B A C, D C A duobus rectis minores efficiat: dico rectas lineas A B, C D in infinitum productas ex eâ parte, ex quâ angulos cum A C duobus rectis minores efficiunt, ſibi invicem occurſuras eſſe. Rectæ lineæ A C ad punctum A [p] applicetur angulus E A C æqualis angulo, qui anguli D C A ad duos rectos complementum eſt. Itaque anguli E A C, D C A ſimul ſumpti duobus rectis æquales ſunt, et recta linea A E ipſi D C parallela erit, per hanc Prop. Anguli autem B A C, D C A, duobus rectis ex hypotheſi minores, duobus E A C, D C A minores erunt, qui duobus rectis oſtenſi ſunt æquales. Communis auferatur angulus D C A, erit itaque B A C angulus angulo E A C minor. Igitur recta linea A B rectas A E, A C interjacet, angulum E A C dividens; itaque ab A E verſus C D deflectitur; quamobrem producta ipſi C D productæ occurret. Recta enim ea



[p] 23. hujus.

ea demum eſt linea, quæ producta in eâ perſtat directione, quam primo habuerit. Directiones autem rectarum A B, C D erant, ut oſtenſum eſt, ad ſe invicem. Itaque &c. *Q. E. D.*

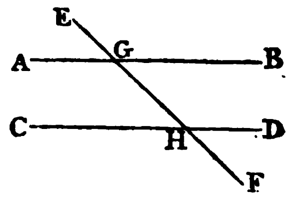
SCHOLION.*

In hoc Corollario verum eſſe illud demonſtravimus, quod in initio libri inter κοινὰς ἐννοίας, ſive Axiomata, poſuit Euclides. Vid. Ax. 12. hujus.

[XXIX.] PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorem interiori et oppoſito et ad eaſdem partes æqualem, et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas A B, C D recta linea incidat E F. Dico alternos angulos A G H, G H D inter ſe æquales efficere, et exteriorem E G B interiori, et ad eaſdem partes G H D æqualem: et interiores et ad eaſdem partes B G H, G H D duobus rectis æquales. Si enim inæqualis



eſt A G H ipſi G H D, unus ipſorum major eſt. Sit major A G H. Et quoniam A G H angulus major eſt angulo G H D; communis apponatur B G H. Anguli igitur A G H, B G H angulis B G H, G H D majores ſunt. Sed
r 13. hujus. anguli A G H, B G H ſunt æquales duobus rectis[r]. Ergo B G H, G H D anguli ſunt duobus rectis minores. Quæ vero a minoribus, quam ſint duo recti, in infinitum
s Ax. 12. producuntur rectæ lineæ, inter ſe conveniunt[s]. Ergo rectæ lineæ A B, C D in infinitum productæ convenient inter ſe. Atqui non conveniunt, cum parallelæ ponantur. Non igitur inæqualis eſt A G H angulus angulo G H D; quare neceſſario eſt æqualis. Angulus autem
t 15. hujus. A G H æqualis eſt angulo E G B[t]. Ergo et E G B ipſi G H D æqualis erit. Communis apponatur B G H. Anguli igitur E G B, B G H ſunt æquales angulis B G H, G H D; ſed E G B, B G H æquales ſunt duobus rectis. Ergo et B G H, G H D duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorem interiori

et

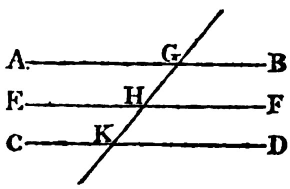
et oppoſito et ad eaſdem partes æqualem, et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.

Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR. [XXX.]

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, et inter ſe parallelæ erunt.

Sit utraque ipſarum A B, C D ipſi E F parallela. Dico et A B ipſi C D parallelam eſſe. Incidat enim in ipſas recta linea G K. Et quoniam in parallelas rectas lineas A B, E F recta linea G K incidit, angulus A G H angulo G H F eſt æqualis [u]. Rurſus quoniam in parallelas rectas lineas E F, C D recta linea incidit G K, æqualis eſt G H F angulus angulo G K D [u]. Oſtenſus autem eſt et angulus A G K angulo G H F æqualis; ergo et A G K ipſi G K D æqualis erit; et ſunt alterni. Parallela igitur eſt A B ipſi C D [x]. Ergo quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, et inter ſe parallelæ erunt. *Q. E. D.*



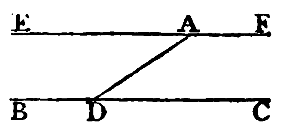
[u] 29. hujus.

[x] 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL. [XXXI.]

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. Oportet per A punctum ipſi B C rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in B C quodvis punctum D, et jungatur A D; conſtituaturque [y] ad rectam lineam D A, et ad punctum in ipſâ A, angulo A D C æqualis angulus D A E; et in directum ipſi E A recta linea A F producatur. Quoniam igitur in duas rectas lineas B C, E F recta linea A D incidens alternos angulos E A D, A D C inter ſe æquales efficit, E F ipſi B C parallela erit [z]. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C parallela ducta eſt recta linea E A F. *Q. E. F.*



[y] 23. hujus.

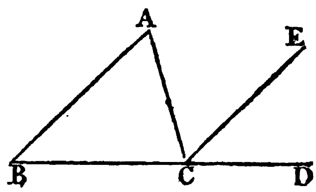
[z] 27. hujus.

PROP.

[XXXII.] PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus et oppositis est æqualis, et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit triangulum ABC; et unum ipsius latus BC in D producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus et oppositis CAB, ABC æqualem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse æquales.



[a] 31. hujus. Ducatur [a] enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE; et quoniam AB ipsi CE parallela est, et in ipsas incidit AC, alterni [b] 29. hujus. anguli BAC, ACE inter se æquales sunt [b]. Rursus quoniam AB parallela est CE, et in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori et opposito ABC est æqualis [b]. Ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. Quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis BAC, ABC. Communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB tribus ABC, BAC, ACB æquales sunt; sed anguli ACD, [c] 13. hujus. ACB sunt æquales [c] duobus rectis. Ergo et ACB, CBA, CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus et oppositis est æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. *Q. E. D.*

Cor. 1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.

Cor. 2. Si in uno triangulo duo anguli, aut singuli, aut simul, æquales sint duobus angulis alterius trianguli; erit reliquus angulus reliquo æqualis.

Cor. 3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unum rectum conficiunt.

Cor. 4. In triangulo isoscele si angulus æquis cruribus contentus rectus sit, reliqui ad basim sunt semirecti.

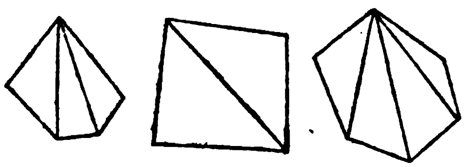
Cor. 5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEO-

THEOREMA I.

Omnes simul interiores anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

Nam figura unaquæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figuræ latera, e. g. *si quatuor latera habeat, resolvitur in duo triangula;*



si quinque in tria triangula; si sex in quatuor et sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est, bis tot rectis, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

Q. E. D.

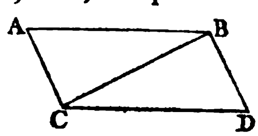
THEOR. II.

Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex præcedente Theor. omnes interiores soli conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ; quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR. [XXXIII.]

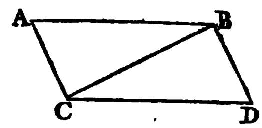
Quæ æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt.



Sint æquales et parallelæ A B, C D; et ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ A C, B D. Dico A C, B D æquales, et parallelas esse. Ducatur enim B C; et quoniam A B parallela est C D, in ipsasque incidit B C, alterni anguli A B C, B C D æquales sunt [d]. [d] 29. hujus.

Rursus

Rursus quoniam A B est æqualis C D, communis autem B C, duæ A B, B C duabus B C, C D sunt æquales; et angulus A B C æqualis angulo B C D. Basis igitur A C basi B D est æqualis [e]; triangulumque A B C triangulo B C D; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus A C B angulo C B D est æqualis. Et quoniam in duas rectas lineas A C, B D recta linea B C incidens, alternos angulos A C B, C B D æquales inter se efficit, parallela est A C ipsi B D [f]. Ostensa autem est et ipsi æqualis. Quæ igitur æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt. *Q. E. D.*



[e] 4. hujus.

[f] 27. hujus.

DEFINITIO.

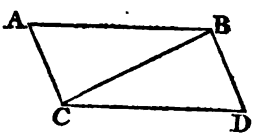
Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela.

[XXXIV.]

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se æqualia sunt; et diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum A B D C, cujus diameter B C. Dico A C D B parallelogrammi latera, quæ ex opposito, et angulos, inter se æqualia esse; et diametrum B C ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est A B ipsi C D, et in ipsas incidit recta linea B C; anguli alterni A B C, B C D inter se æquales sunt [g]. Rursus quoniam A C ipsi B D parallela est, et in ipsas incidit B C, alterni anguli A C B, C B D æquales sunt inter se [g]. Duo igitur triangula sunt A B C, C B D, quæ duos angulos A B C, B C A duobus angulis B C D, C B D æquales habent, alterum alteri; et unum latus uni lateri æquale, scil. quod est ad æquales angulos, utrique commune, B C. Ergo [h] et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. Æquale igitur est latus quidem A B lateri C D, latus vero A C ipsi B D, et angulus B A C angulo B D C æqualis. Et quoniam



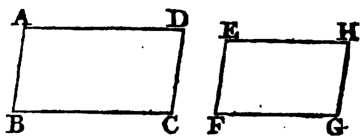
[g] 29. hujus.

[h] 26. hujus.

quoniam angulus A B C est æqualis angulo B C D, et angulus C B D angulo A C B; erit totus angulus A B D æqualis toti A C D. Ostensus autem est et angulus B A C angulo B D C æqualis. Parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se æqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim æqualis est A B ipsi C D, communis autem B C, duæ A B, B C duabus D C, C B æquales sunt, altera alteri; et angulus A B C æqualis est angulo B C D. Basis igitur [i] A C basi D B æqualis; et triangulum A B C triangulo B C D æquale. Ergo diameter B C parallelogrammum A C D B bifariam secat. *Q. E. D.* [i] 4. hujus.

Cor. * Parallelogramma, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, et reliquos reliquis, singulos singulis, æquales habent.

Parallelogramma A B C D, E F G H angulos ad A, E æquales habeant. Dico parallelogrammum A B C D reliquos sui angulos reliquis parallelogrammi E F G H, singulos singulis, æquales habere.



Nam in parallelogrammo A B C D anguli duo A, B simul sumpti duobus rectis æquales sunt [k]. Pari ratione in parallelogrammo E F G H, duo E, F simul sumpti duobus rectis sunt æquales. Duo igitur A, B simul duobus E, F simul sunt æquales. Ablatisque æqualibus A, E, reliquus B reliquo F æqualis [l] erit. Jam vero in parallelogrammo A B C D anguli A, C oppositi inter se æquales sunt, per hanc Prop. et in parallelogrammo E F G H oppositi E, G inter se æquales. Æquales autem A, E [m]. Quare et C, G æquales sunt [n]. Pari ratione angulus D, cui oppositus est B, in parallelogrammo A B C D, æqualis ostendetur angulo H, cui in parallelogrammo E F G H oppositus est F, ipsius B æqualis.

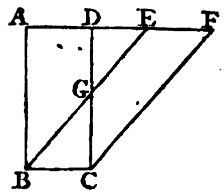
[k] 29. hujus.
[l] Ax. 3.
[m] ex hyp.
[n] Ax. 1.

PROP.

[XXXV.] PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eâdem basi, et in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma A B C D, E B C F super eâdem basi B C, et in eisdem parallelis A F, B C constituta. Dico A B C D parallelogrammum parallelogrammo E B C F æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD,



[o] 34. hujus. æqualis [o] est A D ipsi B C. Eâdem quoque ratione, et E F est æqualis B C. Quare et A D ipsi E F

[p] Ax. 1. æqualis erit [p]; et communis D E.

[q] Ax. 2. Tota igitur A E [q] toti D F est æqualis. Est autem et A B æqualis D C. Ergo duæ E A, A B duabus F D, D C æquales sunt, altera alteri, et angulus F D C æqualis

[r] 29. hujus. angulo E A B, exterior interiori [r]; basis igitur E B basi

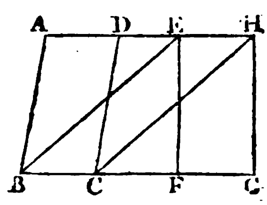
[s] 4. hujus. F C est [s] æqualis, et E A B triangulum æquale triangulo F D C. Commune auferatur D G E. Reliquum igitur

[t] Ax. 3. trapezium A B G D reliquo trapezio E G C F est æquale [t]. Commune apponatur G B C triangulum. Ergo totum parallelogrammum A B C D toti parallelogrammo E B C F æquale erit. Parallelogramma igitur super eâdem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt. *Q. E. D.*

[XXXVI.] PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma A B C D, E F G H super æqualibus basibus B C, F G, et in eisdem parallelis A H, B G constituta. Dico parallelogrammum A B C D parallelogrammo EFGH æquale esse. Conjungantur enim B E,



[u] Hyp. C H. Et quoniam æqualis [u] est B C ipsi F G, et F G æqualis ipsi E H; erit et B C ipsi E H æqualis. Sunt parallelæ, et ipsas conjungunt B E, C H. Quæ autem æquales et parallelas ad easdem partes

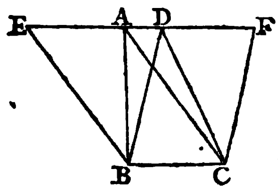
[x] 33. hujus. conjungunt, æquales et parallelæ sunt [x]. Ergo E B, C H et æquales sunt, et parallelæ. Quare E B C H paral-

parallelogrammum eſt, et æquale parallelogrammo A B C D [y]; baſim enim eandem habet B C, et in eiſdem parallelis B C, A D conſtituitur. Simili ratione, et E F G H parallelogrammum eidem parallelogrammo E B C H eſt æquale. Baſim enim eandem habet E H, et in eiſdem parallelis E H, B G conſtituitur. Ergo parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale erit. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. *Q. E. D.* [y] 35. hujus.

PROP. XXXVII. THEOR. [XXXVII.]

Triangula ſuper eâdem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe æqualia ſunt.

Sint triangula A B C, D B C ſuper eâdem baſi B C, et in eiſdem parallelis A D, B C conſtituta. Dico A B C triangulum triangulo D B C æquale eſſe. Producatur A D ex utrâque parte in E, F puncta; et per B quidem ipſi C A parallela ducatur B E, [z] per C vero ipſi B D parallela C F. Parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum E B C A, D B C F; et parallelogrammum E B C A eſt æquale [a] parallelogrammo D B C F; etenim ſuper eâdem ſunt baſi B C, et in eiſdem parallelis B C, E F. Eſtque parallelogrammi quidem E B C A dimidium [b] A B C triangulum, cum diameter A B ipſum bifariam ſecet: parallelogrammi vero D B C F dimidium [b] triangulum D B C; diameter enim D C ipſum bifariam ſecat. Quæ autem [c] æqualium dimidia ſunt, inter ſe æqualia ſunt. Ergo triangulum A B C triangulo D B C eſt æquale. Triangula igitur ſuper eâdem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe æqualia ſunt. *Q. E. D.*



[z] 31. hujus.
[a] 35. hujus.
[b] 34. hujus.
[c] Ax. 7.

PROP. XXXVIII. THEOR. [XXXVIII.]

Triangula ſuper baſibus æqualibus, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

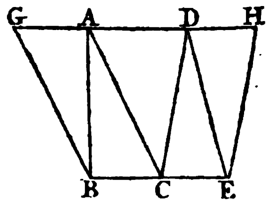
Sint triangula A B C, D C E ſuper æqualibus baſibus B C, C E, et in eiſdem parallelis B E, A D conſtituta. Dico A B C triangulum D C E triangulo æquale eſſe. Producatur enim A D ex utrâque parte in G, H puncta: et per B quidem ipſi C A parallela ducatur B G [d], per E [d] 31. hujus.

[e] 31. hujus. vero ducatur E H parallela ipsi D C[e]. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum G B C A, D C E H. Atque est parallelogrammum G B C A æquale[f] parallelogrammo D C E H; in æqualibus enim sunt basibus B C, C E, et in eisdem B E, G H parallelis. Parallelogrammi vero G B C A dimidium [g] est A B C triangulum, nam diameter A B ipsum bifariam secat: et parallelogrammi D C E H dimidium [g] est triangulum D C E, diameter enim D E ipsum secat bifariam. Quæ autem æqualium dimidia sunt[h], inter se æqualia sunt. Ergo A B C triangulum triangulo D C E est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

[f] 36. hujus.

[g] 34. hujus.

[h] Ax. 7.



[XXXIX.]

PROP. XXXIX. THEOR.

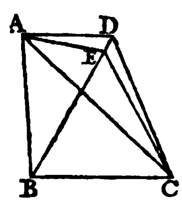
Triangula æqualia super eâdem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C, D B C super eâdem basi B C constituta, et ad easdem partes. Dico et in eisdem parallelis esse. Ducatur enim A D. Dico A D parallelam esse ipsi B C. Si enim non est parallela, ducatur[i] per A punctum ipsi B C parallela recta linea A E, et E C ducatur. Æquale igitur est A B C triangulum triangulo E B C[k], super eâdem enim est basi B C, et in eisdem B C, A E parallelis. Sed A B C triangulum triangulo D B C[l] est æquale. Ergo et triangulum D B C æquale est ipsi E B C triangulo, majus minori; quod fieri non potest. Non igitur A E ipsi B C parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam per A ipsi B C parallelam esse, præter ipsam A D. Ergo A D ipsi B C est parallela. Triangula igitur æqualia super eâdem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis. *Q. E. D.*

[i] 31. hujus.

[k] 37. hujus.

[l] ex hyp.

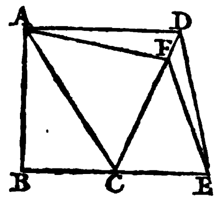


PROP.

PROP. XL. THEOR. [XL.]

Triangula æqualia ſuper baſibus æqualibus, et ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem quoque ſunt parallelis.

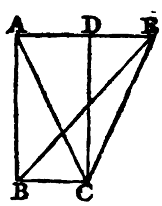
Sint æqualia triangula A B C, C D E ſuper æqualibus baſibus B C, C E conſtituta. Dico etiam in eiſdem eſſe parallelis. Ducatur enim A D. Dico A D ipſi B E parallelam eſſe. Nam ſi non eſt, ducatur[m] per A ipſi B E parallela A F, [m] 31. hujus.
et F E ducatur. Triangulum igitur A B C triangulo F C E eſt æquale[n], [n] 38. hujus.
cum ſuper æqualibus baſibus et in eiſdem parallelis B E, A F conſtituantur. Sed triangulum A B C æquale eſt triangulo D C E. Ergo et triangulum D C E triangulo F C E æquale erit, majus minori; quod fieri non poteſt. Non igitur A F ipſi B E eſt parallela. Similiter demonſtrabimus neque aliam quampiam per A ipſi B E parallelam eſſe, præter A D. Ergo A D ipſi B E parallela erit. Æqualia igitur triangula ſuper baſibus æqualibus, et ad eaſdem partes conſtituta, etiam in eiſdem ſunt parallelis. *Q. E. D.*



PROP. XLI. THEOR. [XLI.]

Si parallelogrammum et triangulum eandem baſim habeant, in eiſdemque ſint parallelis; parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit.

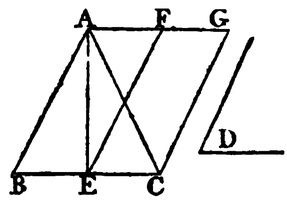
Parallelogrammum enim A B C D, et triangulum E B C, baſim habeant eandem B C, et in eiſdem ſint parallelis B C, A E. Dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum eſſe. Jungatur enim A C. Triangulum igitur A B C triangulo E B C eſt æquale[o]; namque ſuper eâdem baſi B C [o] 37. hujus.
et in eiſdem B C, A E parallelis conſtituuntur. Sed A B C D parallelogrammum duplum eſt trianguli A B C[p], cum diameter A C ipſum [p] 34. hujus.
biſariam ſecet. Quare et ipſius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum et triangulum eandem baſim habeant, et in eiſdem ſint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli. *Q. E. D.*



[XLII.] PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet dato triangulo A B C æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D



[q] 10. hujus. æquali. Secetur B C bifariam [q] in E; et junctâ A E, ad rectam lineam E C, atque ad punctum

[r] 23. hujus. in eâ E, constituatur angulus [r] C E F æqualis ipsi D; et per A quidem ipsi E C parallela

[s] 31. hujus. ducatur [s] A G; per C vero ipsi F E ducatur parallela C G [s]. Parallelogrammum igitur est F E C G. Et quoniam B E

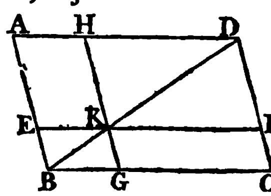
[t] 38. hujus. est æqualis E C, erit et A B E triangulum [t] triangulo A E C æquale, super æqualibus enim sunt basibus B E, E C, et in eisdem B C, A G parallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C est duplum. Est autem et paralle-

[u] 41. hujus. logrammum F E C G duplum [u] trianguli A E C; basim enim eandem habet, et in eisdem est parallelis. Æquale igitur est F E C G parallelogrammum triangulo A B C, habetque C E F angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum F E C G constitutum est, in angulo C E F, qui angulo D est æqualis. *Q. E. F.*

[XLIII.] PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum A B C D, cujus diameter B D; et circa ipsam B D parallelogramma quidem sint F H, E G, quæ vero complementa dicuntur A K, K C. Dico A K complementum complemento K C æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est



[x] 34. hujus. A B C D, et ejus diameter B D, æquale [x] est A B D triangulum triangulo B D C. Rursus quoniam H K F D parallelogrammum est, cujus diameter D K, triangulum

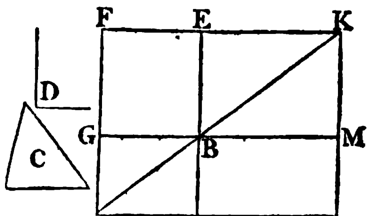
H D K

H D K triangulo D F K æquale [y] erit. Eâdem ratione, et triangulum K G B triangulo K E B eſt æquale. Cum igitur triangulum quidem B E K æquale ſit triangulo B G K, triangulum vero H D K ipſi D F K; erit triangulum B E K una cum triangulo H D K æquale triangulo B G K unà cum D F K triangulo. Eſt autem et totum triangulum A B D æquale toti B D C. Reliquum igitur A K complementum reliquo complemento K C eſt æquale. Ergo omnis parallelogrammi ſpatii eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum complementa inter ſe æqualia ſunt. *Q. E. D.* [y] 34. hujus.

PROP. XLIV. PROBL. [XLIV.]

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. Oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipſi D æquali. Conſtituatur triangulo C æquale [a] parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui eſt æqualis D; et ponatur B E in directum ipſi A B, producaturque F G ad H; et per A alterutri ipſarum B G, E F parallela [a] ducatur A H, et H B jungatur. Quoniam igitur in parallelas A H, E F recta linea H F incidit, anguli A H F, H F E duobus rectis æquales [b] ſunt. Quare B H F, H F E duobus rectis ſunt minores. Quæ vero a minoribus, quam ſunt duo recti, ſi in infinitum producantur, convenient [c] inter ſe. Ergo H B, F E productæ convenient. Producantur, et conveniant in K; perque K alterutri ipſarum E A, F H parallela [a] ducatur K L; et A H, G B ad L, M puncta producantur. Parallelogrammum igitur eſt H L K F, cujus diameter H K, et circa H K parallelogramma quidem ſunt A G, M E; ea vero, quæ complementa dicuntur, L B, B F; ergo L B ipſi B F eſt [d] æquale. Sed et B F æquale eſt triangulo C. Quare et L B triangulo C æquale erit. Et quoniam G B E angulus æqualis [e] eſt angulo A B M, ſed



[a] 42. hujus.

[a] 31. hujus.

[b] 29. hujus.

[c] Ax. 12.

[d] 43. hujus.

[e] 15. hujus.

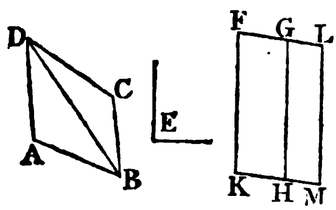
 et

et æqualis angulo D, erit et angulus A B M angulo D
æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato tri-
angulo C æquale parallelogrammum constitutum est L B,
in angulo A B M, qui est æqualis angulo D. *Q. E. F.*

[XLV.] PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum A B C D, datus vero angulus
rectilineus E. Oportet
rectilineo A B C D æquale
parallelogrammum con-
stituere in angulo ipsi E
æquali. Conjungantur
D B, et constituatur tri-



f 42. hujus. angulo A D B æquale [f] pa-
rallelogrammum F H in
angulo H K F, qui est æqualis angulo E. Deinde ad
rectam lineam G H applicetur triangulo D B C æquale
g 44. hujus. [g] parallelogrammum G M, in angulo G H M, qui angulo
E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est utri-
que ipsorum H K F, G H M, erit et H K F angulo G H M
æqualis. Communis apponatur K H G; anguli igitur
H K F, K H G angulis K H G, G H M æquales sunt. Sed
h 29. hujus. H K F, K H G sunt æquales [h] duobus rectis. Ergo, et
K H G, G H M duobus rectis æquales erunt. Itaque ad
aliquam rectam lineam G H, et ad datum in eâ punctum
H, duæ rectæ lineæ K H, H M non ad easdem partes po-
sitæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt;
i 14. hujus. in directum igitur [i] est K H ipsi H M. Et quoniam in
parallelas K M, F G recta linea H G incidit, alterni an-
guli M H G, H G F æquales [h] sunt. Communis appona-
tur H G L; anguli igitur M H G, H G L angulis H G F,
H G L sunt æquales. At anguli M H G, H G L æquales
[h] sunt duobus rectis. Quare et anguli H G F, H G L
duobus rectis æquales erunt. In directum [i] igitur est
F G ipsi G L. Et quoniam K F ipsi H G et æqualis est et
k 30. hujus. parallela; sed et H G ipsi M L; erit K F [k] ipsi M L et
æqualis et parallela. Ipsasque conjungunt rectæ lineæ
l 33. hujus. K M, F L; ergo et K M, F L æquales [l] et parallelæ sunt.
Parallelogrammum igitur est K F L M. At cum trian-
gulum quidem A B D æquale sit parallelogrammo H F;
triangulum vero D B C parallelogrammo G M, erit totum
A B C D

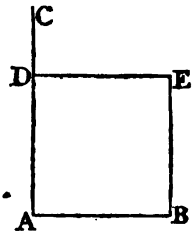
ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM, in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. *Q. E. F.*

Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL. [XLVI.]

Super datâ rectâ lineâ quadratum describere.

Sit data recta linea A B. Oportet super ipsâ A B quadratum describere. Ducatur [m] rectæ lineæ A B a puncto in eâ dato A ad rectos angulos A C; et ipsi A B æqualis [n] ponatur A D; perque punctum D ducatur [o] D E ipsi A B parallela, et per B ipsi A D parallela [o] ducatur B E. Parallelogrammum igitur est A D E B. Et A B quidem est [p] æqualis D E, A D vero ipsi [p] B E; sed B A ipsi A D est æqualis. Quatuor igitur B A, A D, D E, E B inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est A D E B parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas A B, D E recta linea incidit A D, anguli B A D, A D E duobus rectis sunt [q] æquales. Rectus autem est B A D, ergo et A D E rectus erit. Parallelogrammorum vero spatiorum quæ ex opposito sunt latera, et anguli, [p] inter se æqualia sunt. Rectus igitur est uterque oppositorum A B E, B E D angulorum; et ob id rectangulum est A D B E. Ostensum autem est æquilaterum esse. [r] Quadratum igitur sit necesse est, atque est super rectâ lineâ A B descriptum. *Q. E. F.*



[m] 11. hujus.
[n] 3. hujus.
[o] 31. hujus.
[p] 34. hujus.
[q] 29. hujus.
[r] Def. 30.

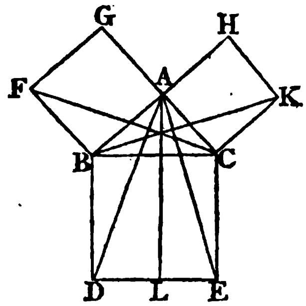
Cor. Hinc omne parallelogrammum, habens unum angulum rectum, est rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR. [XLVII.]

In rectangulis triangulis, quod a latere rectum angulum subtendente describitur quadratum, æquale est quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. Dico quadratum descriptum a rectâ

B C æquale eſſe quadratis, quæ ab ipſis B A, A C deſcri-
[s] 46. hujus. buntur. Deſcribatur [s] enim a B C quidem quadratum B D E C, ab ipſis B A, A C quadrata [s] G B, H C; perque A alterutri ipſarum B D, C E parallela ducatur A L; et A D, F C jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum B A C, B A G rectus



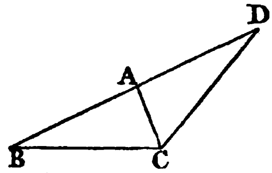
[t] Def. 30. [t] eſt, ad aliquam rectam lineam B A, et ad datum in eâ punctum A, duæ rectæ lineæ A C, A G non ad eaſdem partes poſitæ angulos, qui deinceps ſunt, duobus rectis æquales efficiunt. In di-
[u] 14. hujus. rectum igitur [u] eſt C A ipſi A G. Eâdem ratione, et A B ipſi A H eſt in directum. Et quoniam angulus D B C eſt æqualis angulo F B A, rectus enim uterque eſt, communis apponatur A B C; totus igitur D B A angulus
[x] Ax. 2. toti F B C eſt [x] æqualis. Quod cum duæ A B, B D duabus F B, B C æquales ſint, altera alteri, et angulus D B A æqualis angulo F B C; erit et baſis A D baſi F C
[y] 4. hujus. æqualis [y], et A B D triangulum triangulo F B C æquale.
[z] 41. hujus. Eſtque [z] trianguli quidem A B D duplum B L parallelogrammum, baſim enim eandem habent B D, et in eiſdem B D, A L ſunt parallelis: trianguli [z] vero F B C duplum eſt G B quadratum; rurſus enim baſim habent eandem F B, et in eiſdem ſunt parallelis F B, G C. Quæ
[a] Ax. 6. autem æqualium duplicia, inter ſe æqualia [a] ſunt. Ergo æquale eſt parallelogrammum B L ipſi G B quadrato. Similiter junctis A E, B K, oſtendetur etiam C L parallelogrammum æquale quadrato H C. Totum igitur B D E C quadratum duobus quadratis G B, H C eſt æquale. Et deſcribitur quidem B D E C quadratum a rectâ lineâ B C; quadrata vero G B, H C ab ipſis B A, A C. Quadratum igitur B E, a latere B C deſcriptum, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur a lateribus B A, A C. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod deſcribitur a latere rectum angulum ſubtendente, æquale eſt quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XLVIII. THEOR. [XLVIII.]

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli A B C, quod ab uno latere B C describitur quadratum, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus B A, A C describuntur, dico angulum B A C rectum esse. Ducatur enim a puncto A ipsi A C ad rectos angulos A D; ponaturque A D ipsi B A æqualis; et D C jungatur. Quoniam igitur D A est æqualis A B, erit et quadratum, quod describitur ex D A, æquale quadrato ex A B. Commune apponatur quadratum, quod ex A C. Ergo quadrata, quæ ex D A, A C, æqualia sunt quadratis, quæ ex B A, A C describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex D A, A C, æquale [b] est quod ex D C quadratum; rectus enim angulus est [b] 47. hujus.
D A C: quadratis vero, quæ ex B A, A C, æquale ponitur quadratum, quod ex B C. Quadratum igitur, quod ex D C, æquale est ei, quod ex B C, quadrato. Ergo et latus D C lateri C B est æquale. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C, duæ D A, A C æquales sunt duabus B A, A C; et basis D C est æqualis basi C B. Angulus [c] igitur D A C angulo B A C est æ- [c] 8. hujus.
qualis. Rectus autem est D A C. Ergo et B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. *Q. E. D.*



EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

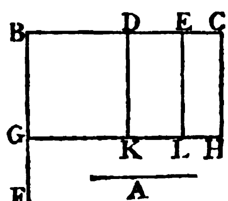
II.

Omnis parallelogrammi ſpatii, unum quodvis eorum quæ circa diametrum ipſius ſunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes; rectangulum, ſub duabus rectis lineis contentum, æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub rectâ lineâ inſectâ, et ſingulis partibus continentur.

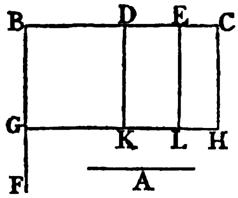
Sint duæ rectæ lineæ A, BC; et ſecta ſit BC utcunque in punctis D, E. Dico rectangulum, rectis lineis A, BC contentum, æquale eſſe rectangulis, quæ ſub A et BD, ſub A et DE, ſub A et EC continentur, ſimul ſumptis. Ducatur enim a puncto B, ipſi BC ad rectos [a] angulos BF; atque ipſi A ponatur [b] æqualis BG; et per G



quidem

[a] 11. primi.
[b] 3. primi.

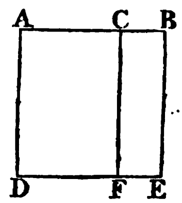
[c] 31. primi. quidem ipſi B C parallela [c] ducatur G H; per D, E, C vero ducantur D K, E L, C H parallelæ [c] ipſi B G. Rectangulum igitur B H eſt æquale rectangulis B K, D L, E H ſimul ſumptis. Atque eſt B H quidem, quod ſub A et B C continetur, etenim continetur ſub G B, B C; et B G ipſi A eſt æqualis. Rectangulum autem B K eſt quod continetur ſub ipſis A et B D; continetur enim ſub G B, B D, quarum G B eſt æqualis A. Et rectangulum D L eſt, quod continetur ſub A et D E, quoniam D K, hoc eſt B G, ipſi A eſt æqualis; et ſimiliter rectangulum E H eſt, quod ſub A et E C continetur. Ergo rectangulum contentum ſub A et B C eſt æquale rectangulis ſub A et D B, ſub A et D E, et ſub A et E C ſimul ſumptis. Si igitur ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes; rectangulum, ſub duabus rectis lineis contentum, eſt æquale eis, quæ ſub rectâ lineâ inſectâ, et ſingulis partibus continentur. *Q. E. D.*



[II.] PROP. II. THEOR.

Si recta linea ſecta fuerit utcunque; rectangula, quæ ſub totâ, et ſingulis partibus continentur, æqualia ſunt ei, quod a totâ fit, quadrato.

Recta enim linea A B ſecta ſit utcunque in puncto C. Dico rectangulum, quod ſub A B, B C continetur, una cum contento ſub A B, A C, æquale eſſe quadrato, quod fit ex
[d] 46. primi. A B. Deſcribatur [d] enim ex A B qua-
[e] 31. primi. dratum A D E B, et per C ducatur [e] alterutri ipſarum A D, B E parallela C F. Æquale igitur eſt A E rectangulis A F, C E. Atque eſt A E quidem quadratum, quod ex A B; A F vero rectangulum contentum ſub B A, A C, etenim ſub D A, A C continetur, quarum A D ipſi A B eſt æqualis; et rectangulum C B continetur ſub A B, B C, cum B E ſit æqualis A B. Ergo rectangulum ſub A B et A C una cum rectangulo ſub A B et B C æquale eſt quadrato ex A B. Si igitur recta linea utcunque ſecta fuerit; rectangula, quæ ſub totâ, et ſingulis partibus continentur, æqualia ſunt ei, quod a totâ fit, quadrato. *Q. E. D.*

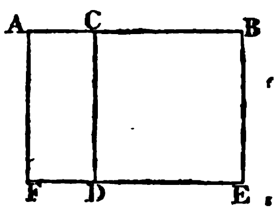


PROP.

PROP. III. THEOR. [III.]

Si recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub totâ, et unâ ejus parte contentum æquale est et rectangulo, quod sub partibus continetur, et ei quod a prædictâ parte fit quadrato.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in puncto C. Dico sub AB et BC rectangulum æquale esse rectangulo sub A C, B C una cum quadrato, quod fit ex B C. Describatur [f] enim ex B C quadratum C D E B; producaturque E D in F: et per A alterutri ipsarum C D, B E parallela [g] ducatur A F. Æquale utique erit rectangulum A E ipsis A D, C E; et est A E quidem rectangulum contentum sub A B, B C; etenim sub A B, B E continetur, quarum BE est æqualis B C: rectangulum vero A D est, quod continetur sub A C, C B, cum D C ipsi C B sit æqualis: et D B est quadratum, quod fit ex B C. Ergo rectangulum sub A B, B C est æquale rectangulo sub A C, C B una cum quadrato, quod ex B C. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub totâ, et unâ ejus parte contentum æquale est rectangulo, quod sub partibus continetur, et ei quod a prædictâ parte fit quadrato. *Q. E. D.*

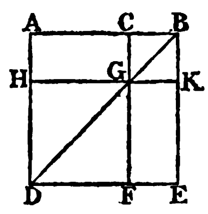


[f] 46. primi.
[g] 31. primi.

PROP. IV. THEOR. [IV.]

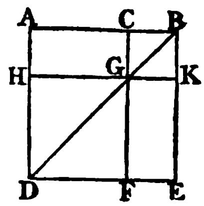
Si recta linea secta fuerit utcunque; quadratum, quod fit a totâ, æquale erit et quadratis, quæ a partibus fiunt, et ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in C. Dico quadratum, quod fit ex A B, æquale esse et quadratis ex A C, C B, et ei rectangulo, quod bis sub A C, C B continetur. Describatur [h] enim ex A B quadratum A D E B, jungaturque B D, et per C quidem alterutri ipsarum A D, B E parallela [i] ducatur C G F; per G vero alterutri ipsarum A B, D E ducatur [i] parallela H K. Et quoniam C F est parallela ipsi A D, et in ipsas incidit B D: erit exterior angulus B G C interiori



[h] 46. primi.
[i] 31. primi.

[k] 29. primi. interiori et opposito A D B æqualis [k]: angulus autem [l] 5. primi. A D B eſt æqualis [l] angulo A B D, quod et latus B A æquale eſt lateri A D. Quare C G B angulus angulo G B C eſt æqualis: ac propterea latus B C lateri [m] 6. primi. C G æquale [m]. Sed et latus C B æ- [n] 34. primi. quale [n] eſt lateri G K, et C G ipſi B K; ergo et G K eſt æquale K B; et C G K B æquilaterum eſt. Dico inſuper etiam rectangulum eſſe. Sed et rectangulum. Angulus enim K B C rectus eſt. Parallelogrammum autem, habens [o] Cor. 46. primi. unum angulum rectum, eſt rectangulum [o]. Rectangulum igitur eſt C G K B; ſed oſtenſum fuit et æquilaterum eſſe; quadratum igitur eſt C G K B, quod quidem fit ex B C. Eâdem ratione et H F eſt quadratum, quod fit ex H G, hoc eſt, ex A C. Ergo H F, C K ex ipſis A C, C B [p] 43. primi. quadrata ſunt. Et quoniam rectangulum A G eſt æquale [p] rectangulo G E; atque eſt A G, quod ſub A C, C B continetur, eſt enim G C ipſi C B æqualis; erit et G E æquale ei, quod continetur ſub A C, C B; quare rectangula A G, G E æqualia ſunt ei, quod bis ſub A C, C B continetur. Sunt autem et H F, C K quadrata ex A C, C B. Quatuor igitur H F, C K, A G, G E, et quadratis ex A C, C B, et ei quod bis ſub A C, C B continetur rectangulo, ſunt æqualia; ſed H F, C K, A G, G E componunt totum A D E B quadratum, quod fit ex A B. Quadratum igitur ex A B æquale eſt et quadratis ex A C, C B, et ei quod bis ſub A C, C B continetur rectangulo. Quare ſi recta linea utcunque ſecta fuerit; quadratum, quod fit a totâ, æquale erit et quadratis, quæ a partibus fiunt, et ei rectangulo, quod bis ſub partibus continetur. *Q. E. D.*



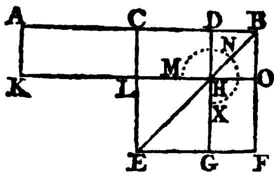
Cor. Ex hoc perſpicue conſtat in quadratis ſpatiis parallelogramma, quæ ſunt circa diametrum, quadrata eſſe.

PROP.

PROP. V. THEOR. [V.]

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod a dimidiâ fit quadrato.

Recta enim linea quævis A B secta sit in partes æquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum sub A D, B D, una cum quadrato, quod fit ex C D, æquale esse ei quod ex C B fit quadrato.



Describatur[q] enim ex B C quadratum C E F B: ducaturque B E; et per D quidem alterutri ipsarum C E, B F parallela[r] ducatur D H G; per H vero ducatur K L O parallela[r] alterutri ipsarum C B, E F; et rursus per A ducatur alterutri C L, B O parallela[r] A K. Et quoniam C H complementum æquale[s] est complemento H F, commune apponatur D O; totum igitur C O toti D F est æquale. Sed C O est æquale[t] A L, quoniam et A C ipsi C B; ergo et A L æquale est D F. Commune apponatur C H. Totum igitur A H ipsis F D, D L æquale erit. Sed A H quidem est, quod sub A D, D B continetur, etenim D H ipsi D B est æqualis[u]; F D, D L vero est gnomon M N X. Igitur M N X æqualis est ei, quod sub A D, D B continetur; commune apponatur L G, æquale[u] scilicet quadrato, quod ex C D. Ergo M N X gnomon, et L G, æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub A D, D B, et ei, quod fit ex C D, quadrato. Sed M N X gnomon, et L G, sunt totum quadratum C E F B, quod quidem fit ex C B. Ergo rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato, quod ex C D, æquale est ei quod ex C B fit quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod a dimidiâ fit quadrato. *Q. E. D.*

[q] 46. primi.
[r] 31. primi.
[s] 43. primi.
[t] 36. primi.
[u] Cor. 4. hujus.

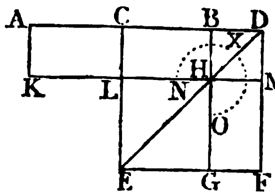
PROP.

[VI.]

PROP. VI. THEOR.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub totâ cum adjectâ, et adjectâ contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur.

Recta enim linea quævis A B secetur bifariam in puncto C, et adjiciatur ipsi in directum B D. Dico rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex B C, æquale esse ei quod fit ex C D quadrato.



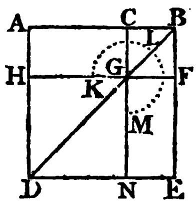
[v] 46. primi. Describatur [v] enim ex C D quadratum C E F D, et jungatur D E; per B alterutri ipsarum [x] 31. primi. C E, D F parallela [x] ducatur B H G; et per H ducatur K L M parallela [x] alterutri ipsarum A D, E F; et adhuc per A alterutri C L, D M parallela [x] A K. Itaque quoniam A C est æqualis C B, erit et rectangulum A L re- [y] 36. primi. [z] 43. primi. ctangulo C H æquale [y]; sed C H æquale [z] est H F; ergo et A L ipsi H F æquale erit. Commune apponatur C M. Totum igitur A M gnomoni N X O est æquale. Atque est A M, quod sub A D, D B continetur, etenim [a] Cor. 4. hujus. D M est [a] æqualis D B. Ergo et gnomon N X O æqualis est rectangulo sub A D, D B. Rursus commune apponatur L G, æquale [a] scilicet quadrato, quod ex C B. Rectangulum igitur sub A D, D B una cum quadrato, quod ex B C, æquale est gnomoni N X O et ipsi L G. Sed gnomon N X O, et L G componunt C E F D quadratum, quod quidem fit ex C D. Ergo rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex B C, æquale est ei quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub totâ cum adjectâ, et adjectâ contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si recta linea utcunque secta fuerit; quæ a totâ, et unâ parte fiunt, utraque quadrata æqualia sunt et rectangulo, quod bis sub totâ ac dictâ parte continetur, et ei quod a reliquâ parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B secta sit utcunque in puncto C. Dico quadrata ex A B, B C æqualia esse et rectangulo, quod bis sub A B, B C continetur, et ei, quod fit ex A C, quadrato. Describatur[b] enim ex A B quadratum A D E B, et figura construatur *. Itaque quoniam A G rectangulum æquale [c] est rectangulo G E, commune apponatur C F; quare totum A F toti C E est æquale. Rectangula igitur A F, C E dupla sunt rectanguli A F. Sed A F, C E sunt K L M. gnomon, et quadratum C F; ergo K L M gnomon, et quadratum C F, dupla erunt rectanguli A F. Est autem id, quod bis sub A B, B C continetur, duplum ipsius A F; etenim B F est [d] æqualis B C. Gnomon igitur K L M, et quadratum C F, æqualia sunt ei, quod bis sub A B, B C continetur. Commune apponatur H N, quod est ex A C quadratum. Ergo gnomon K L M, et quadrata C F, H N æqualia sunt ei, quod bis sub A B, B C continetur, et quadrato ex A C. Sed gnomon K L M, et quadrata C F, H N componunt A D E B, et C F, quæ sunt ex A B, B C quadrata. Quadrata igitur ex A B, B C æqualia sunt rectangulo, quod bis sub A B, B C continetur, una cum eo, quod fit ex A C, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ a totâ et unâ parte fiunt, utraque quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis sub totâ ac dictâ parte continetur, et ei quod a reliquâ parte fit quadrato. *Q. E. D.*



[b] 46. primi.

[c] 43. primi.

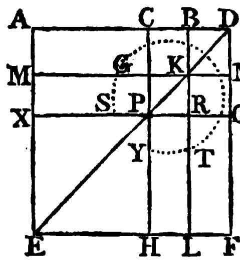
[d] Cor. 4. hujus.

* *Figura dicitur construi, cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ, secantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, et duo complementa. Similiter dupla figura dicitur construi, cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, et quatuor complementa.*

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub totâ, et unâ parte continetur rectangulum, una cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex totâ et dictâ parte, tanquam ex unâ lineâ, describitur.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in C. Dico rectangulum quater sub A B, B C contentum, una cum quadrato, quod ex A C, æquale esse quadrato, quod ex A B, B C, tanquam ex unâ lineâ, describitur. Producatur enim recta linea A B in D; et ipsi C B ponatur æqualis B D; describaturque ex A D quadratum A E F D; et dupla figura construatur. Quoniam igitur C B



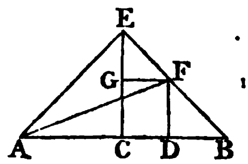
[e] hyp. [f] 34. primi. est [e] æqualis B D, atque est C B ipsi G K æqualis [f]; B D vero ipsi K N: erit et G K æqualis K N. Eâdem ratione, et P R ipsi R O est æqualis. Et quoniam C B est æqualis [g] 36. primi. B D, et G K ipsi K N; erit rectangulum [g] quidem C K rectangulo B N; rectangulum vero G R ipsi R N æquale [g]. [h] 43. primi. Sed C K est [h] æquale R N, complementa enim sunt parallelogrammi C O; ergo et B N æquale est G R, et quatuor rectangula B N, K C, G R, R N inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli C K. Rursus quodiam C B est æqualis B D, et B D quidem ipsi B K, hoc est, ipsi C G æqualis; C B vero ipsi G K, hoc est, G P: erit et C G æqualis G P. Est autem et P R ipsi R O æqualis, rectangulum igitur A G rectangulo M P, et rectangulum P L ipsi R F æquale erit. Sed M P est æquale P L; complementa enim sunt M L parallelogrammi; quare et A G ipsi R F est æquale. Quatuor igitur A G, M P, P L, R F inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius A G quadrupla. Ostensum autem est et quatuor C K, B N, G R, R N quadrupla esse C K. Quare octo continentia gnomonem S T Y ipsius A K quadrupla sunt. Et quoniam A K est, quod sub A B, B C continetur; etenim B K est æqualis B C; erit contentum quater sub A B, B C ipsius A K quadruplum. At demonstratus est gnomon S T Y quadruplus ipsius A K; quod igitur quater sub A B, B C continetur, æquale est gnomoni S T Y. Commune apponatur X H, quod quidem quadrato ex [i] Cor. 4. hujus. A C est [i] æquale. Ergo quod quater sub A B, B C continetur

tinetur, una cum quadrato ex A C, æquale eſt ipſi S T Y gnomoni, et quadrato X H. Sed S T Y gnomon, et X H, totum ſunt A E F D quadratum, quod deſcribitur ex A D. Rectangulum igitur quater ſub A B, B C contentum, una cum quadrato ex A C, æquale eſt ei, quod ex A D, hoc eſt ex A B, B C, tanquam ex unâ lineâ, deſcribitur, quadrato. Ergo ſi recta linea utcunque ſecta fuerit; quod quater ſub totâ, et unâ parte continetur rectangulum, una cum quadrato reliquæ partis, æquale eſt quadrato, quod ex totâ et dictâ parte, tanquam ex unâ lineâ, deſcribitur. *Q. E. D.*

PROP. IX. THEOR. [IX.]

Si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales ſecta fuerit; quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur, dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ ejus, quæ inter ſectiones interjicitur.

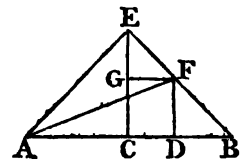
Recta enim linea quævis A B ſecta ſit in partes æquales ad C, et in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla eſſe. Ducatur [l] enim a puncto C ipſi A B ad rectos angulos C E, et utrivis ipſarum A C, C B æqualis ponatur; junganturque E A, E B. [l] 11. primi.



Ac per D quidem ipſi C E parallela [m] ducatur D F; per [m] 31. primi.
F vero ipſi A B parallela [m] F G; et A F ducatur. Itaque quoniam A C eſt æqualis C E; erit [n] et angulus E A C [n] 5. primi.
angulo A E C æqualis. Et cum rectus ſit angulus ad C, reliqui A E C, E A C uni recto æquales [o] erunt; et [o] 3. Cor. 32. primi.
ſunt æquales inter ſeſe; utervis igitur ipſorum A E C, E A C recti eſt dimidium. Eâdem ratione, et recti dimidium eſt utervis ipſorum C E B, E B C. Quapropter et illi inter ſe ſunt æquales, et totus angulus A E B rectus eſt. Jam vero, cum in rectas parallelas, G F, C B recta E B incidat; angulus exterior E F G interiori F B D æqualis erit [p], cui etiam F E G æqualis. Anguli igitur [p] 29. primi.
E F G, F E G inter ſe æquales ſunt [q], ac proinde in trian- [q] Ax. 1.
gulo G E F latera G E, G F inter ſe ſunt æqualia [r]. Pari [r] 6. primi.
ratione cum in rectas parallelas D F, C E recta B E incidat; angulus exterior B F D interiori B E C æqualis erit, cui etiam angulus F B D æqualis eſt. Anguli igitur B F D, F B D ſunt inter ſe æquales, ac proinde in triangulo D F B latera D F, D B ſunt inter ſe æ-

 qualia

qualia. Et quoniam A C est æqualis C E, erit et ex A C quadratum æquale quadrato ex C E. Quadrata igitur ex A C, C E dupla sunt quadrati ex A C; quadratis autem ex



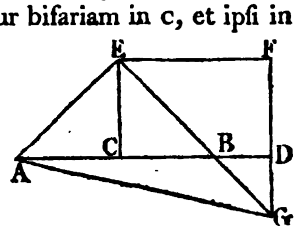
[s] 47. primi. A C, C E æquale[s] est quadratum ex E A, siquidem rectus est angulus A C E. Ergo quadratum ex E A quadrati ex A C est duplum. Rursus quoniam E G æqualis est G F, et quadratum ex E G quadrato ex G F est æquale. Quadrata igitur ex E G et G F dupla sunt quadrati ex G F; at quadratis ex E G, G F æquale[s] est quod ex E F quadratum. Ergo quadratum ex E F quadrati ex G F duplum erit. Æqualis[t] autem est G F ipsi C D; quadratum igitur ex E F duplum est quadrati C D. Sed et quatum ex A E quadrati ex A C est duplum. Ergo quadrata ex A E, E F dupla sunt quadratorum ex A C, C D; quadratis vero ex A E, E F æquale[s] est ex A F quadratum; quoniam angulus A E F rectus est; quadratum igitur ex A F quadratorum ex A C, C D est duplum. Sed quadrato ex A F æqualia sunt ex A D, D F quadrata; rectus enim est angulus, qui ad D. Ergo ex A D, D F quadrata dupla sunt quadratorum ex A C, C D. Est autem D F ipsi D B æqualis; quadrata igitur ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales secta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata, dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ ejus, quæ inter sectiones interjicitur. *Q. E. D.*

[t] 34. primi.

[X.] PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, et ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ a totâ cum adjectâ, et adjectâ fiunt, utraque quadrata dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur.

Recta enim linea A B secetur bifariam in C, et ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea B D. Dico quadrata ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla esse. Ducatur enim a puncto C ipsi A B ad rectos[u] angulos C E, et utrique ipsarum A C, C B æqualis ponatur; junganturque



[u] 11. primi.

A E,

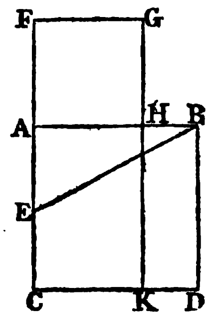
A E, E B; et per E quidem ipsi A D parallela[x] ducatur [x] 31. primi.
E F; per D vero ducatur D F parallela[x] ipsi C E. Et quoniam in parallelas E C, F D recta quædam linea E F incidit, anguli C E F, E F D æquales [y] sunt duobus rectis. [y] 29. primi.
Anguli igitur F E B, E F D duobus rectis sunt minores. Quæ autem a minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur, convenient inter se[z]. Ergo E B, [z] Ax. 12.
F D productæ ad partes B, D convenient. Producantur, et conveniant in puncto G; et A G ducatur. Itaque quoniam A C est æqualis C E, et angulus A E C angulo E A C æqualis[a] erit; atqui est rectus qui ad C; uterque [a] 5. primi.
igitur ipsorum C A E, A E C est recti dimidium. Eâdem ratione, et recti dimidium est uterque C E B, E B C. Quapropter et illi inter se sunt æquales, et totus A E B est rectus. Jam vero anguli G B D, E B C, cum sint ad verticem, sunt inter se æquales[b]. Quare et anguli G B D, [b] 15. primi.
B E C inter se æquales[c]. Et præterea, cum in rectas [c] Ax. 1.
parallelas G D, E C recta G E incidat; anguli alterni B G D, B E C erunt inter se æquales[d]. Quare angulus [d] 29. primi.
D B G angulo D G B æqualis[c]. Ac proinde in triangulo D B G, latera B D, D G sunt inter se æqualia[e]. Rursum [e] 6. primi.
cum in rectas parallelas B D, E F recta G E incidat; angulus exterior G B D interiori G E F æqualis erit. Idem autem G B D ipsi E G D æqualis. Quare anguli G E F, E G F inter se sunt æquales, et in triangulo F G E, latera F G, F E inter se æqualia. Et cum E C sit æqualis C A; et quadratum ex E C æquale est ei, quod ex C A fit, quadrato. Ergo quadrata ex E C, C A dupla sunt quadrati ex C A. Quadratis autem ex E C, C A æquale[f] est quadratum ex E A; [f] 47. primi.
quadratum igitur ex E A quadrati ex A C est duplum. Rursus quoniam G F est æqualis F E, æquale est et ex G F quadratum quadrato ex F E. Quadrata igitur ex G F, F E quadrati ex E F sunt dupla. At quadratis ex G F, F E æquale est[f] quod ex E G quadratum; ergo quadratum ex E G duplum est quadrati ex E F; æqualis autem est E F ipsi C D; quadratum igitur ex E G quadrati ex C D duplum erit. Sed ostensum est quadratum ex E A duplum quadrati ex A C. Ergo ex A E, E G quadrata quadratorum ex A C, C D sunt dupla. Quadratis vero ex A E, E G æquale est[f] quod ex A G quadratum; quadratum igitur ex A G duplum est quadratorum ex A C, C D. At quadrato ex A G æqualia[f] sunt ex A D, D G quadrata; ergo quadrata ex A D, D G sunt dupla

dupla quadratorum ex A C, C D; ſed D G eſt æqualis D B; quadrata igitur ex A D, D B quadratorum ex A C, C D ſunt dupla. Ergo ſi recta linea bifariam ſecetur, et ipſi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ a totâ cum adjectâ, et adjectâ fiunt, utraque quadrata dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ conſtat, tanquam ab unâ lineâ, deſcribitur. *Q. E. D.*

[XI.] PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam ſecare, ita ut quod ſub totâ, et alterâ parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod a reliquâ parte ſit, quadrato.

Sit data recta linea A B. Oportet ipſam A B ita ſecare, ut quod ſub totâ, et alterâ parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod a reliquâ parte ſit, quadrato.



[f] 46. primi. Deſcribatur [f] igitur ex A B quadratum A B C D, ſeceturque A C bifariam in E, et B E ducatur; deinde, productâ C A in F, ponatur ipſi B E æqualis E F; deſcribaturque ex A F quadratum F G H A, et G H ad K producatur. Dico A B ſectam eſſe in H, ita ut ſub A B, B H rectangulum æquale ſit quadrato ex A H. Quoniam enim recta linea A C bifariam ſecatur in E, adjiciturque ipſi in directum A F; rectangulum ſub C F, F A, una cum

[g] 6. hujus. quadrato ex A E, æquale [g] erit quadrato ex E F; ſed E F eſt æqualis E B; rectangulum igitur ſub C F, F A, una cum quadrato ex A E, æquale eſt ei, quod fit ex E B, qua-

[h] 47. primi. drato. Quadrato autem ex E B æqualia ſunt [h] quadrata ex B A, A E; etenim angulus ad A rectus eſt; ergo rectangulum ſub C F, F A, una cum quadrato ex A E, æquale eſt quadratis ex B A, A E. Commune auferatur quod ex A E fit quadratum. Reliquum igitur rectangulum ſub C F, F A æquale eſt quadrato ex A B. Eſt autem rectangulum F K ſub C F, F A; ſiquidem A F eſt æqualis F G: quadratum autem ex A B eſt ipſum A D. Rectangulum igitur F K æquale eſt quadrato A D. Commune auferatur A K. Ergo reliquum F H reliquo H D eſt æquale. Atqui eſt H D rectangulum ſub A B, B H, cum A B ſit æqualis B D, et F H eſt quadratum ex A H.

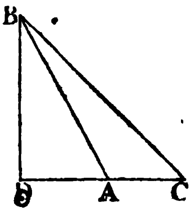
Rectan-

Rectangulum igitur sub A B, B H quadrato ex A H æquale erit. Quare data recta linea A B secta est in H, ita ut sub A B, B H rectangulum quadrato ex A H sit æquale. *Q. E. F.*

PROP. XII. THEOR. [XII.]

In obtusangulis triangulis, quod a latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est quam quadrata, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, et lineâ assumptâ exterius a perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum A B C, obtusum angulum habens B A C; et ducatur [i] a puncto B ad C A protractam perpendicularis B D. Dico quadratum ex B C majus esse, quam quadrata ex B A, A C, rectangulo quod bis sub C A, A D continetur. Quoniam enim recta linea C D secta est utcunque in puncto A; erit quadratum ex C D æquale [k] et quadratis ex C A, A D, et ei, quod bis sub C A, A D continetur rectangulo. Commune apponatur ex D B quadratum. Quadrata igitur ex C D, D B æqualia sunt et quadratis ex C A, A D, D B, et rectangulo quod bis sub C A, A D continetur. Sed quadratis ex C D, D B æquale est [l] quadratum ex C B, rectus enim est angulus ad D, cum sit B D perpendicularis. Quadratis vero ex A D, D B æquale est [l] quadratum ex A B. Quadratum igitur ex C B, æquale est et quadratis ex C A, A B, et rectangulo bis sub C A, A D contento. Ergo quadratum ex C B majus est quam quadrata ex C A, A B, rectangulo quod bis sub C A, A D continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit a latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, et lineâ assumptâ exterius a perpendiculari ad angulum obtusum. *Q. E. D.*



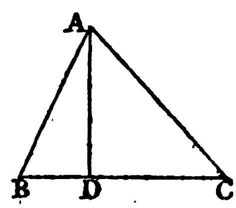
i 12. primi.

k 4. hujus.

l 47. primi.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod a latere acutum angulum subtendente fit quadratum, minus est quam quadrata, quæ fiunt lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et lineâ a perpendiculari intus assumtâ ad angulum acutum.



Sit acutangulum triangulum A B C, acutum habens angulum ad B; et ducatur a puncto A [m] ad B C perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C, minus esse quam quadrata, quæ ex C B, B A fiunt, rectangulo, quod bis sub C B, B D continetur. Quoniam enim recta linea C B secta est utcunque in D, erunt quadrata ex C B, B D æqualia [n] et rectangulo, quod bis sub C B, B D continetur, et quadrato ex D C. Commune apponatur ex A D quadratum. Quadrata igitur ex C B, B D, D A æqualia sunt et rectangulo bis sub C B, B D contento, et quadratis ex A D, D C. Sed quadratis ex B D, D A æquale est [o] ex A B quadratum, rectus enim angulus est qui ad D; quadratis vero ex A D, D C æquale [o] est quadratum ex A C; quadrata igitur ex C B, B A sunt æqualia quadrato ex A C, et ei, quod bis sub C B, B D continetur, rectangulo. Quare solum quadratum ex A C minus est quam quadrata ex C B, B A, rectangulo, quod bis sub C B, B D continetur. In acutangulis igitur triangulis, quadratum, quod a latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata, quæ fiunt a lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et lineâ a perpendiculari intus assumptâ ad angulum acutum. *Q. E. D.*

[m] 12. primi.

[n] 7. hujus.

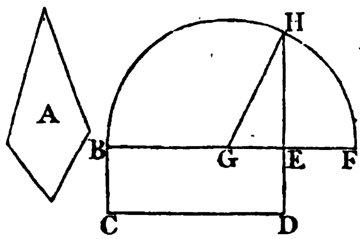
[o] 47. primi.

PROP.

PROP. XIV. PROBL. [XIV.]

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

Sit datum rectilineum A. Oportet ipſi A rectilineo æquale quadratum conſtituere. Conſtituatur [p] rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum B C D E. Si igitur B E eſt æqualis E D, factum jam erit quod proponebatur; etenim rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt B D. Si B E, E D ſint inæquales, producatur earum alterutra ad F, ponaturque ipſi E D æqualis E F. Deinde ſectâ F B bifariam [q] in G; centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G B, G F, ſemicirculus deſcribatur B H F; producaturque D E in H, et G H ducatur. Quoniam igitur recta linea B F ſecta eſt in partes æquales ad G, inæquales ad E; erit rectangulum ſub B E, E F, una cum quadrato, quod fit ex E G [r], æquale quadrato ex G F. Eſt autem G F æqualis G H; rectangulum igitur ſub B E, E F, una cum quadrato ex G E, æquale eſt quadrato ex G H. Sed quadrato ex G H æqualia [s] ſunt ex H E, E G quadrata. Ergo rectangulum ſub B E, E F, una cum quadrato ex E G, æquale eſt quadratis ex H E, E G. Commune auferatur ex E G quadratum. Reliquum igitur rectangulum ſub B E, E F eſt æquale quadrato ex E H. Sed rectangulum ſub B E, E F eſt ipſum B D parallelogrammum, quoniam E F eſt æqualis E D; ergo B D parallelogrammum quadrato ex E H eſt æquale. Parallelogrammum autem B D eſt æquale rectilineo A; rectilineum igitur A quadrato ex E H deſcripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt, quod videlicet ex ipſâ E H deſcribitur. *Q. E. F.*



[p] 45. primi.
[q] 10. primi.
[r] 5. hujus.
[s] 47. primi.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

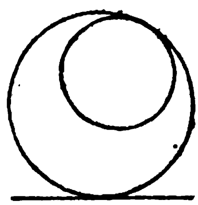
ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

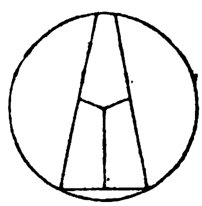
Definitio I. [II.]

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ circumferentiam circuli in occursu non secat.



II. [III.]

Circuli contingere se dicuntur, quorum circumferentiæ in occursu se mutuo non secant.



III. [IV.]

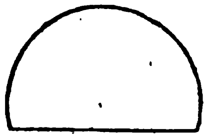
In circulo æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales.

IV. [V.]

Magis autem distare a centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

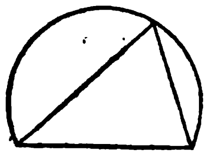
V.

[VI.] V.



Segmentum circuli eſt figura, quæ circumferentiâ circulari et lineâ rectâ continetur. Quæ quidem recta baſis dicitur ſegmenti.

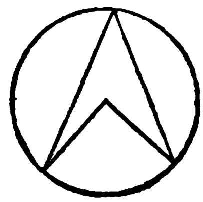
[VII.] VI.



Segmenti autem angulus eſt, qui baſi, et circumferentiâ circulari comprehenditur.

[VIII.] VII.

In ſegmento eſt angulus, lineis rectis comprehenſus a puncto quovis in circumferentiâ ſegmenti utcunque ſumpto ad terminos baſis ductis.



[IX.] VIII.

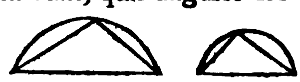
Quando autem continentes angulum rectæ lineæ intercipiunt circumferentiam; angulus in illâ conſiſtere dicitur.

[X.] IX.

Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumferentiâ ipſis interceptâ.

[XI.] X.

Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.



DEF. I. AXIOMA.

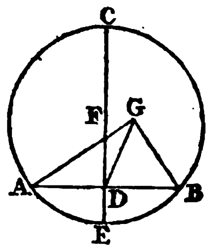
Æquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

PROPO-

PROPOSITIO I. PROBLEMA. [I.]

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus A B C; oportet circuli A B C centrum invenire. Ducatur in ipſo recta linea A B utcunque; quæ in puncto D bifariam [a] ſecetur. A puncto autem D ipſi A B ad rectos angulos [b] ducta D C in E producatur; et ſecetur C E bifariam [a] in F. Dico punctum F circuli A B C centrum eſſe. Non enim; ſed ſi fieri poteſt, ſit G centrum, et G A, G D, G B ducantur. Itaque quoniam D A eſt æqualis D B, communis autem D G, erunt duæ A D, D G duabus D B, G D æquales, altera alteri: et baſis G A æqualis [c] eſt baſi G B; ſunt enim ex centro G. Angulus igitur A D G angulo G D B eſt [d] æqualis. Cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, [e] rectus eſt uterque æqualium angulorum. Ergo angulus G D B eſt rectus; ſed et rectus F D B; æqualis igitur eſt angulus F D B angulo G D B, major minori; quod fieri non poteſt. Quare G non eſt circuli A B C centrum. Similiter oſtendemus neque aliud eſſe, præter ipſum F. Ergo F centrum eſt circuli A B C. *Q. E. F.*



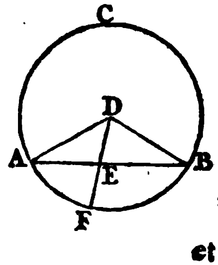
[a] 10. primi.
[b] 11. primi.
[c] Def. 15. primi.
[d] 8. primi.
[e] Def. 10. primi.

Cor. Si in circulo quævis recta linea lineam quandam bifariam et ad angulos rectos ſecet, in ſecante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR. [II.]

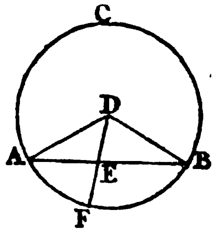
Si in circumferentiâ circuli duo quævis puncta ſumantur, quæ ipſa conjungit recta linea, intra circulum cadet.

Sit circulus A B C; in circumferentiâ ipſius ſumantur duo quævis puncta A, B. Dico rectam lineam, quæ a puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. Sumatur enim in rectâ A B punctum quodvis E; jungantur D A, D E, D B; et in D E, ſi opus ſit, productâ, capiatur D F ipſi D A vel D B æqualis. Quoniam D A eſt æqualis D B, erit [f] angulus D A B æqualis angulo D B A;



[f] 5. primi.

et quoniam trianguli D A E latus A E producitur, erit
g 16. primi. g angulus D E B angulo D A E major; angulus autem D A E æqualis est angulo D B E, ergo D E B angulus angulo D B E est major. Sed majori angulo majus latus subtenditur; major igitur est D B ipsâ D E. Quare et D F, quæ ipsi D B sumpta est æqualis, major est quam D E. Punctum igitur E punctis D, F necessario interjacet. Sed propter æquales D B, D F punctum F ad ipsam erit circuli circumferentiam. Punctum igitur E necesse est intus cadat. Similiter de alio omni puncto rectæ A B inter ipsa A, B ostendi potest, intra circumferentiam esse. Si igitur in circumferentiâ &c. *Q. E. D.*



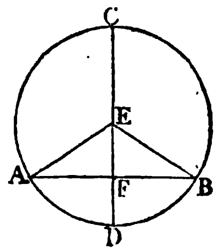
Cor. Hinc si recta circulum tangit, in unico puncto eum tangit.

[III.]

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea, per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, et ad angulos rectos ipsam secabit; quod si ad angulos rectos ipsam secet, et bifariam secabit.

Sit circulus A B C; et in ipso recta linea per centrum ducta, C D, rectam lineam quandam, A B, non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. Dico ad angulos rectos ipsam secare. Su-
h 1. hujus. matur enim circuli A B C centrum [h], quod sit E; et E A, E B jungantur. Quoniam igitur A F est æqualis F B, communis autem F E, duæ A F, F E duabus B F, F E æquales sunt; et basis E A basi E B est æqualis. Ergo
i 8. primi. et angulus A F E angulo B F E æqualis [i] erit. Cum autem recta linea super rectam insistens angulos, qui dein-
k Def. 10. primi. ceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est [k] uterque æqualium angulorum; uterque igitur A F E, B F E est rectus. Quare recta linea C D per centrum ducta rectam lineam A B non ductam per centrum bifariam secans, et ad angulos rectos ipsam secabit. Si vero C D secet A B ad rectos angulos, dico et bifariam ipsam secare, hoc est,



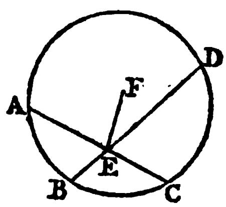
A F

A F ipsi F B æqualem esse. Iisdem enim constructis, quoniam E A, quæ ex centro, est æqualis E B, et angulus E A F angulo [l] E B F æqualis erit; est autem et A F E [l] rectus æqualis recto B F E; duo igitur triangula E A F, E B F duos angulos duobus angulis æquales habent; unumque latus uni lateri æquale, E F scilicet utrisque commune, quod uni angulorum æqualium subtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia [m] habebunt; atque erit A F ipsi F B æqualis. Si igitur in circulo recta linea, per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, et ad angulos rectos ipsam secabit; quod si ipsam secet ad rectos angulos, et bifariam secabit. *Q. E. D.*

[l] 5. primi.
[m] 26. primi.

PROP. IV. THEOR. [IV.]

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent, non ductæ per centrum; sese bifariam non secabunt.



Sit circulus A B C D; et in ipso duæ rectæ lineæ A C, B D se invicem secent in puncto E, non ductæ per centrum. Dico eas sese bifariam non secare. Si enim fieri potest, secent sese bifariam, ita ut A E sit æqualis E C, et B E ipsi E D; sumaturque [n] centrum A B C D circuli, quod sit E; et E F jungatur. Quoniam igitur recta linea F E per centrum ducta rectam lineam quandam A C non ductam per centrum bifariam secat, et ad rectos angulos ipsam secabit [o]; quare rectus est F E A angulus. Rursus quoniam recta linea F E rectam lineam quandam B D non ductam per centrum bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam [o] secabit; rectus igitur angulus est F E B. Ostensus autem est rectus et F E A. Ergo F E A angulus ipsi F E B æqualis erit, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur A C, B D sese bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent, non ductæ per centrum; sese bifariam non secabunt. *Q. E. D.*

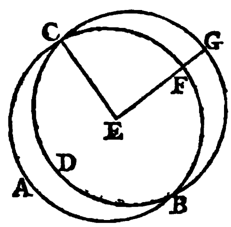
[n] 1. hujus.
[o] 3. hujus.

PROP.

[V.] PROP. V. THEOR.

Si duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum.

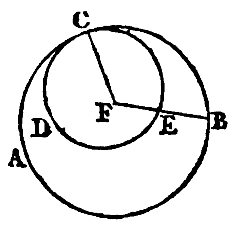
Duo enim circuli A B C, C D G ſe invicem ſecent in puncto C. Dico ipſorum idem centrum non eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit centrum E; jungaturque E C; et ſumatur in circumferentiâ C G D punctum aliquod G, quod non ſit circumferentiis utriſque commune. Juncta E G circumferentiæ A C B in F occurrat. Quoniam E centrum eſt circuli A B C, erit C E ipſi E F æqualis. Rurſus quoniam E centrum eſt C D G circuli, æqualis eſt C E ipſi E G. Sed oſtenſa eſt C E æqualis E F; ergo E F ipſi E G æqualis erit, minor majori; quod fieri non poteſt. Non igitur punctum E centrum eſt circulorum A B C, C D G. Quare ſi duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum. *Q. E. D.*



[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli A B C, C D E contingant ſeſe intra in puncto C. Dico ipſorum non eſſe idem centrum. Si enim fieri poteſt, ſit F; jungaturque F C, et ſumatur in circumferentiâ A B C punctum aliquod B, quod non ſit circumferentiis utriſque commune. Juncta F B circumferentiæ C E D in E occurrat. Quoniam igitur F centrum eſt circuli A B C, æqualis eſt C F ipſi F B. Rurſus quoniam F centrum eſt circuli C D E, erit C F æqualis F E. Oſtenſa autem eſt C F æqualis F B; ergo et F E ipſi F B eſt æqualis, minor majori; quod fieri non poteſt. Non igitur F punctum centrum eſt circulorum A B C, C D E. Quare ſi duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit. *Q. E. D.*



PROP.

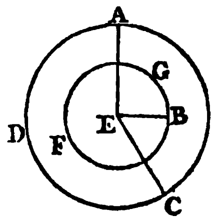
SCHOLION.*

Melius esset, nostro saltem judicio, si pro duabus propositionibus, quintâ et sextâ, hæc una substitueretur, quæ utramque complexa est.

PROPOSITIO.*

Circuli, eodem centro inæqualibus intervallis descripti, sibi mutuo nullibi occurrunt.

Centro quodam communi E, intervallis inæqualibus E A, E B descripti sint circuli A C D, F G B. Dico circulos illos sibi mutuo non occurrere. Occurant enim, si fieri potest, in C. Jungatur E C. Recta E A ipsi E C æqualis erit[p]. Sed eidem E C æqualis erit E B[p]. Æquales igitur E A, E B[q]. Quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Circuli igitur A C D, F G B, sibi mutuo in puncto C non occurrunt. Pari ratione, nec in alio quovis puncto. Nullibi igitur. *Q. E. D.*



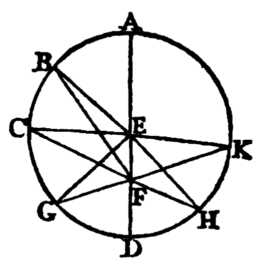
[p] Def. 15. primi.

[q] Ax. 1. primi.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

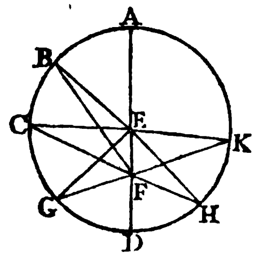
Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, et ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in quâ centrum: minima vero reliqua: aliarum autem, propinquior ei, quæ per centrum transit, semper remotiore major est: at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus A B C D, cujus diameter A D, et in ipsâ A D sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: et a puncto F in circulum A B C D cadant quædam rectæ lineæ F B, F C, F G. Dico F A maximam esse, et F D minimam: aliarum vero, F B quidem majorem quam F C, et F C majorem quam F G. Jungantur enim B E, C E, G E. Et quoniam omnis trianguli duo latera[r] reliquo sunt majora;



[r] 20. primi.

majora; erunt B E, E F majores quam B F. Eſt autem A E æqualis B E; ergo B E, E F ipſi A F ſunt æquales; major igitur eſt A F quam F B. Rurſus quoniam B E eſt æqualis C E, communis autem F E; duæ B E, E F duabus C E, E F æquales ſunt: ſed B E F angulus major eſt angulo C E F: baſis igitur B F baſi



[s] 24. primi. F C eſt [s] major. Eadem ratione, et C F major eſt quam F G. Rurſus

[t] 20. primi. quoniam G F, F E majores [t] ſunt quam G E, æqualis autem G E ipſi E D; erunt G F, F E majores quam E D; communis auferatur F E; ergo reliqua G F major eſt quam reliqua F D. Maxima igitur eſt F A, et F D minima: major vero B F quam F C, et F C quam F G major. Dico et a puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum A B C D ad utraſque partes minimæ F D.

[u] 23. primi. Conſtituatur [u] enim ad lineam E F atque ad datum in eâ punctum E, angulo G E F æqualis angulus F E H: et F H jungatur. Quoniam igitur G E eſt æqualis E H, communis autem E F; duæ G E, E F duabus H E, E F æquales ſunt: et angulus G E F eſt æqualis angulo

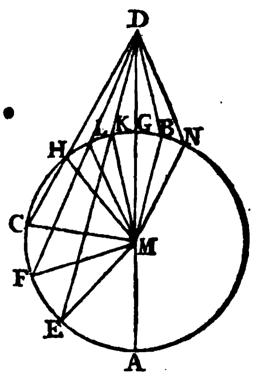
[x] 4 primi. H E F; baſis igitur F G baſi F H æqualis [x] erit. Dico a puncto F in circulum non cadere aliam ipſi F G æqualem. Si enim fieri poteſt, cadat F K; et quoniam F K eſt æqualis F G, eſtque ipſi F G æqualis F H, erit et F K ipſi F H æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum tranſit, æqualis remotiori, quod fieri non poteſt. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, &c. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcunque: earum quidem, quæ in cavam circumferentiam cadunt, maxima est, quæ per centrum transit; aliarum autem, propinquior ei, quæ per centrum, semper remotiore major est: at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est, quæ inter punctum et diametrum interjicitur; aliarum vero, quæ propinquior minimæ, semper remotiore est minor: duæ autem tantum æquales a puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.

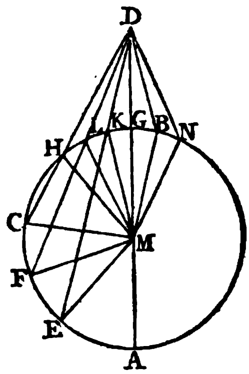
Sit circulus A B C, et extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam D A, D E, D F, D C: sitque D A per centrum. Dico earum quidem, quæ in cavam A E F C circumferentiam cadunt, maximam esse D A, quæ per centrum transit; et minimam, quæ inter punctum D et diametrum A G interjicitur, videlicet D G: majorem autem D E quam D F; et D F majorem quam D C: earum vero, quæ in convexam circumferentiam H L K C cadunt, quæ propinquior est minimæ D G, semper remotiore esse minorem; hoc est, D K minorem quam D L, et D L minorem



quam D H. Sumatur[y] enim centrum circuli A B C, quod sit M, et jungantur M E, M F, M C, M H, M L, M K. Et quoniam A M est æqualis M E, communis apponatur M D; ergo A D est æqualis ipsis E M, M D; sed E M, M D sunt majores[z] quam E D: ergo et A D quam E D est major. Rursus quoniam æqualis est M E ipsi M F, communis apponatur M D; erunt E M, M D ipsis M F, M D æquales; at angulus E M D major est angulo F M D; basis igitur E D basi F D major[a] erit. Similiter demonstrabimus, et F D majorem esse quam C D. Ergo maxima est D A; major autem D E quam D F, et D F quam D C major. Præterea quoniam M K, K D sunt majores[z] quam M D, et M K est

[y] 1. hujus.
[z] 20. primi.
[a] 24. primi.

[b] Ax. 4. primi. æqualis M G; erit reliqua K D quam reliqua[b] G D major: quare G D minor quam K D. Et quoniam trianguli M L D in uno latere M D, duæ rectæ lineæ M K, K D intra conſtituuntur; erunt



[c] 21. primi. [c] M K, K D minores ipſis M L, L D, quarum M K eſt æqualis M L; reliqua igitur D K minor eſt quam reliqua D L. Similiter oſtendemus, et D L quam D H minorem eſſe. Ergo D G minima eſt: minor vero D K quam D L, et D L minor quam D H. Dico etiam duas tantum æquales a puncto D in circulum cadere ad utraſque minimæ partes. Conſtituatur ad rectam lineam M D,

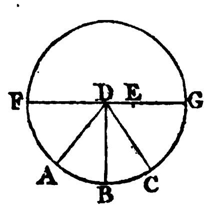
[d] 23. primi. ad datumque in eâ punctum M, angulo K M D æqualis[d] angulus D M B, et D B jungatur. Itaque quoniam M K eſt æqualis M B, communis autem M D; duæ K M, M D duabus B M, M D æquales ſunt, altera alteri; et angulus K M D æqualis angulo B M D; baſis igitur D K baſi D B eſt æ-

[e] 4. primi. qualis[e]. Dico a puncto D aliam ipſi D K æqualem in circulum non cadere. Si enim fieri poteſt, cadat D N: et quoniam D K eſt æqualis D N, et D K ipſi D B eſt æqualis; erit et D B æqualis D N, propinquior ſcilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, &c. *Q. E. D.*

[IX.] PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod ſumitur, circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum A B C punctum aliquod D: atque a puncto D in circulum A B C cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales D A, D B, D C. Dico punctum D, quod ſumitur, circuli A B C eſſe centrum. Non enim; ſed ſi fieri poteſt, ſit E centrum, et juncta D E in F, G producatur; ergo F G diameter eſt A B C circuli. Itaque



quoniam in F G diametro circuli A B C ſumptum eſt aliquod

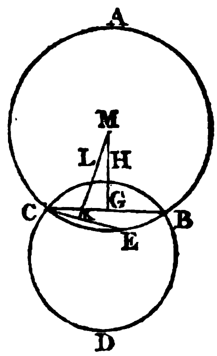
aliquod punctum D, quod non est centrum circuli, maxima quidem erit D G, major [f] autem D C quam D B, et D B quam D A; sed et æquales [g] D C, D B, D A; quod fieri non potest; non igitur E centrum est circuli A B C. Similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse, præter ipsum D. Ergo D circuli B C centrum erit. *Q. E. D.*

[f] 7. hujus.
[g] ex hyp.

PROP. X. THEOR. [X.]

Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

Nam si fieri potest circuli duo A B C, D B C tribus punctis B, C, et E, se mutuo secent. Jungantur C B, C E. Media dividatur recta C B in puncto G, et a puncto G ad perpendiculum educatur recta G H. Media etiam dividatur recta C E in puncto K, et a puncto K ad perpendiculum educatur K L. Rectæ G H, K L, duabus C B, C E non parallelis ad perpendiculum eductæ, sibi mutuo non erunt parallelæ. Occurrent igitur. Occursus esto M. Jam cum puncta C, B ad peripheriam sint circuli A B C, recta C B intra circulum erit [h]. Recta autem H G rectam C B, in circulo A B C inscriptam, mediam dividit, et ad rectos [i]. Centrum igitur circuli A B C erit ad rectam G H [k]. Pari ratione centrum circuli A B C erit ad rectam K L, quæ rectam C B circulo inscriptam mediam dividit, et ad rectos. Centrum igitur circuli A B C commune est rectarum G H, K L punctum. Sed harum rectarum solum est commune M, punctum utique concursûs. Punctum igitur M centrum est circuli A B C. Sed simili modo ostendemus punctum illud idem M circuli D B C centrum esse. Nimirum ad cujus peripheriam, æque ac alterius A B C, sunt puncta B, C, E [l]. Circulorum igitur A B C, D B C, se mutuo secantium idem est centrum M. Quod est absurdum [m]. Duo igitur circuli A B C, D B C in punctis tribus B, C, E sibi mutuo non occurrunt. Simili ratione nec in aliis tribus. Circulus igitur circulum &c. *Q. E. D.*

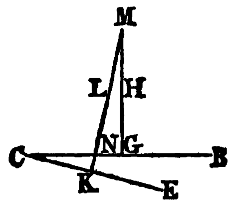


[h] 2. hujus.
[i] Per construct.
[k] Cor. 1. hujus.
[l] ex hyp.
[m] 5. hujus.

SCHOLION.*

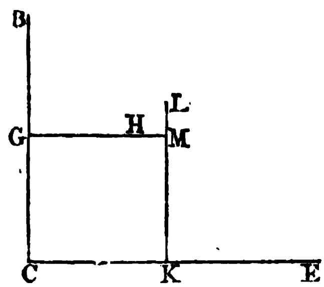
Illud autem quod aſſumpſimus, duas rectas non eſſe parallelas, ſi duabus aliis ad perpendiculum ſint non parallelis, ſic oſtendimus.

Duabus rectis C B, C E non parallelis ad perpendiculum ſint duæ G H, K L. Dico duas G H, K L non eſſe parallelas. Recta enim L K, quæ duarum C B, C E in C occurrentium alteri C E ad perpendiculum eſt [n], alteri C B vel occurret, vel ei parallela erit. Occurrat primum. Occurſus ſit N. In triangulo igitur C N K, angulus ad K rectus eſt. Duo igitur C N K, K C N ſimul ſumpti recto ſunt æquales [o]. Angulus igitur C N K, et illi æqualis L N G, recto minor. Sed angulus ad G rectus [p]. Duo igitur H G N, L N G ſimul ſumpti duobus rectis ſunt minores. Rectæ igitur G H, N L, ſeu K L, productæ inter ſe convenient [q]. Non ſunt igitur parallelæ.



[n] ex hyp.
[o] 32. primi.
[p] ex hyp.
[q] Ax. 12. primi.

CAS. 2. Sed parallela ſit K L ipſi C B. Si eadem K L parallela ſit ipſi G H, erunt G H, C B inter ſe parallelæ [r]. Quod eſt abſurdum. Cum recta G H illam C B in puncto G ad perpendiculum inſiſtat [s]. Non igitur ſunt parallelæ G H, K L. *Q. E. D.*



[r] 30. primi.
[s] ex hyp.

*Cor.** Rectis K L, G H, occurſum uſque in M productis, angulus ad M angulo ad C æqualis erit. Nam in caſu primo, triangulorum M G N, C K N, anguli ad G, K æquales ſunt. Uterque enim rectus. Sed anguli M N G, C N K æquales, ad verticem ſcilicet. Reliquus igitur N M G reliquo N C K æqualis.

In caſu ſecundo, quoniam L K, C B ſunt parallelæ, propter angulum ad K rectum [t], rectus erit angulus ad C [u]. Sed angulus ad G rectus [x]. Rectæ igitur G M, C K ſunt inter

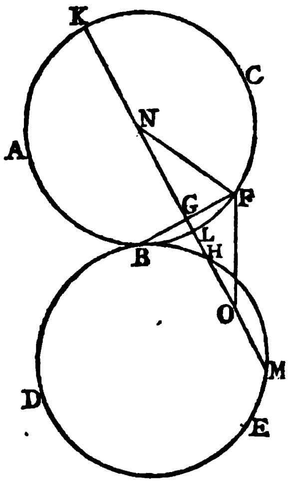
[t] ex hyp.
[u] 29. primi.
[x] ex hyp.

inter se parallelae [y]. Figura igitur C M K C est parallelogrammum. Anguli igitur oppositi C et M sunt inter se aequales [z], et eorum uterque rectus est. [y] 28. primi. [z] 34. primi.

PROP. XI. THEOR. [XIII.]

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingat.

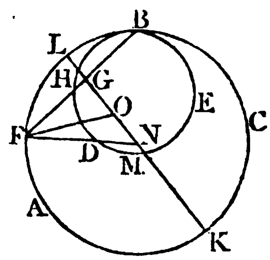
Circuli duo A B C, D B E puncto B se mutuo contingant. Dico in alio praeter B puncto sibi mutuo non occurrere. Nam si fieri potest, in alio puncto F occurrant. Juncta B F, media dividatur in puncto G; rectaque G K ad perpendiculum educta peripheriae circuli A B C in punctis K, L, circuli autem D B E in H, M occurrat. Jam cum puncta B, F ad peripheriam sint circuli A B C, recta B F intra circulum cadet [a], et ad rectam G K erit centrum circuli A B C [b]. Simili modo ostendetur centrum circuli D B E esse ad rectam G K. Media igitur dividatur recta L K puncto N, rectaque H M puncto O. Erit N centrum circuli A B C, et O centrum circuli D B E. Jungantur F N, F O. Circuli A B C, D B E vel extra, vel intus, se mutuo contingunt. Contingant extra primum.



[a] 2. hujus.
[b] Cor. 1. hujus.

CAS. I. Jam cum N centrum sit circuli A B C, erunt N F, N L inter se aequales. Et cum O centrum sit circuli D B E, erunt O H, O F inter se aequales. Duae igitur F N, F O simul sumptae duabus N L, O H simul sumptis sunt aequales. Duae autem N L, O H simul sumptae totâ rectâ N O sunt minores. Duae igitur F N, F O simul sumptae rectâ O N sunt minores. Trianguli igitur N F O latera duo F N, F O simul reliquo minora. Quod est absurdum [c]. Circuli igitur se mutuo extra non contingunt plus uno punctis. [c] 20. primi.

CAS. 2. Sed intus contingant. Et interior ſit D B E. Jam cum O centrum ſit circuli D B E, æquales erunt inter ſe O F, O H. Addatur O N. Duæ igitur O F, O N ſimul ſumptæ rectæ N H ſunt æquales. Recta autem N H rectâ N L minor, propter peripheriam circuli DBE interiorem. Duæ igitur O F, O N ſimul ſumptæ rectâ N L ſunt minores. Sed cum punctum N centrum ſit circuli A B C, æquales inter ſe ſunt N L, N F. Duæ igitur O F, O N ſimul ſumptæ rectâ N F ſunt minores. Trianguli igitur F O N, latera duo O F, O N

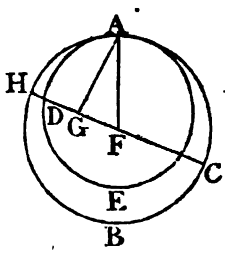


[d] 20. primi. ſimul reliquo ſunt minora. Quod eſt abſurdum [d]. Circuli igitur intus ſe mutuo non contingunt plus uno punctis. Quare circulus circulum &c. *Q. E. D.*

[XI.] PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intus contingant, et ſumantur centra ipſorum; recta linea, ipſorum centra conjungens, producta, in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli A B C, A D E ſeſe intus contingant in puncto A, et ſumatur circuli quidem A B C centrum, quod ſit F, circuli vero A D E centrum G. Dico rectam lineam a puncto G ad F ductam, ſi producatur, in punctum A cadere. Non enim; ſed ſi fieri poteſt, cadat ut F G D H; et A F, A G jungantur. Itaque quoniam



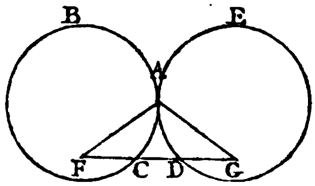
[d] 20. primi. A G, G F majores [d] ſunt quam F A, hoc eſt, quam F H, communis auferatur F G; reliqua igitur A G major eſt quam reliqua G H. Sed A G eſt æqualis G D; ergo G D ipſâ G H eſt major, minor majore, quod fieri non poteſt. Non igitur a puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet; quare in ipſum cadat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe intus contingant, recta linea, ipſorum centra conjungens, ſi producatur, in contactum circulorum cadet. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XIII. THEOR. [XII.]

Si duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit.

Duo enim circuli A B C, A D E ſeſe extra contingant in puncto A; et ſumatur circuli quidem A B C centrum, quod ſit F; circuli vero A D E centrum G. Dico rectam lineam, quæ a puncto F ad G ducitur, per contactum A tranſire. Non enim; ſed, ſi fieri poteſt, cadat ut F C D G; et F A, A G jungantur. Quoniam igitur F centrum eſt circuli A B C, erit A F æqualis F C. Rurſus quoniam G centrum eſt A D E circuli, erit A G ipſi G D æqualis. Oſtenſa eſt autem et A F æqualis F C; ſunt igitur F A, A G ipſis F C, D G æquales, ergo tota F G major eſt quam F A, A G; ſed et minor[c]; quod fieri non poteſt. Non igitur a puncto F ad G ducta recta linea per contactum A non tranſibit; quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit. *Q. E. D.*



[c] 20. primi.

SCHOLION.*

Inverſam Theoni Propoſitionum ſeriem in melius mutavimus. Primum ſcilicet docendum erat, circulorum contactus quid ſit; merum nempe punctum geometricum; dein demonſtrandum, rectam centra jungentem in punctum illud neceſſario incidere. Hæc nobiſcum meditati, in locum undecimæ revocandam judicavimus, quæ Theoni decima tertia eſt.

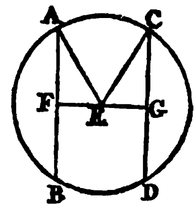
PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro diſtant; et quæ æqualiter a centro diſtant, inter ſe ſunt æquales.

Sit circulus A B D C, et in ipſo æquales rectæ lineæ A B, C D. Dico eas a centro æqualiter diſtare. Sumatur enim circuli A B D C centrum, quod ſit E, et ab ipſo ad A B, C D perpendiculares ducantur E F, E G; et A E, E C jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta E F rectam lineam quandam A B non

ductam

ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit[f]; quare A F est æqualis F B, ideoque A B ipsius A F dupla. Eâdem ratione, et C D dupla est C G; atque est A B ipsi C D æqualis; æqualis igitur et A F ipsi C G; et quoniam A E est æqualis E C, erit et quadratum ex A E quadrato ex E C æquale; sed quadrato quidem ex A E æqualia sunt ex A F, F E quadrata[g]; rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex E C æqualia sunt quadrata ex E G, G C, cum angulus ad G sit rectus. Quadrata igitur ex A F, F E æqualia sunt quadratis ex C G, G E, quorum quadratum ex A F quadrato ex C G æquale, etenim æqualis est A F ipsi C G: reliquum igitur quod fit ex F E quadratum, æquale est reliquo quod ex E G; ac propterea F E ipsi E G est æqualis. In circulo autem æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales[h] sunt. Ergo A B, C D a centro æqualiter distant. Sed si A B, C D æqualiter distent a centro, hoc est, si æqualis sit F E ipsi E G; dico A B ipsi C D æqualem esse. Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A B duplam esse ipsius A F, C D duplam ipsius C G. Et quoniam æqualis est A E ipsi E C, erit et ex A E quadratum quadrato ex E C æquale; sed quadrato quidem ex A E æqualia[g] sunt quadrata ex E F, F A; quadrato autem ex E C æqualia[g] quadrata ex E G, G C. Quadrata igitur ex E F, F A quadratis ex E G, G C æqualia sunt, quorum quadratum ex E G æquale est quadrato ex E F, est enim E G ipsi E F æqualis: reliquum igitur ex A F quadratum æquale est reliquo ex C G: ergo A F ipsi C G est æqualis. Atqui est A B ipsius A F dupla, et C D dupla ipsius C G. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; et quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales. *Q. E. D.*



[f] 3. hujus.

[g] 47. primi.

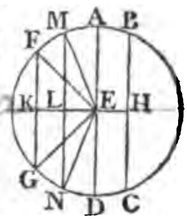
[h] Def. 3. hujus.

[XV.] PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus A B C D, cujus diameter A D, centrum E; et propinquior quidem diametro A D sit B C; remotior vero

vero F G. Dico A D maximam esse, et B C majorem quam F G. Ducantur enim a centro E ad B C, F G perpendiculares E H, E K. Et quoniam B C propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem F G; erit E K quam E H major. Ponatur ipsi E H æqualis E L; et per L ipsi E K ad rectos angulos ducta L M in N producatur; et jungantur E M, E N, E F, E G. Quoniam igitur E H est æqualis E L, erit et B C ipsi M N æqualis [i]. Rursus quoniam æqualis est A E ipsi E M, et D E ipsi E N; erit et A D ipsis M E, E N æqualis; sed M E, E N [k] majores sunt quam M N; ergo et A D major est quam M N; et M N est æqualis B C, erit igitur A D quam B C major. Quod cum duæ E M, E N duabus F E, E G æquales sint, angulusque M E N major angulo F E G; et basis M N basi F G major [l] erit. Ostensa autem est M N æqualis B C; ergo et B C quam F G est major. Maxima igitur est A D diameter, et B C major quam F G. Quare in circulo maxima est diameter; aliarum vero, semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore est major. *Q. E. D.*



[i] 14. hujus.
[k] 20. primi.
[l] 24. primi.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

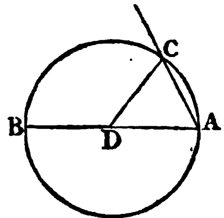
Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum; et in locum, qui inter rectam lineam et circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet: et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

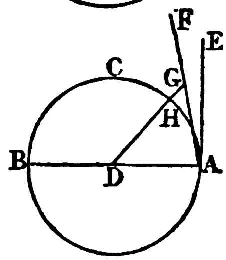
Sit circulus A B C circa centrum D, et diametrum A B. Dico rectam lineam, quæ a puncto A ipsi A B ad rectos angulos ducitur, extra circulum cadere. Non enim; sed, si fieri potest, cadat intus, ut A C; et D C jungatur. Itaque quoniam æqualis est D A ipsi D C, erit et angulus D A C angulo A C D æqualis [m]; rectus autem est D A C; ergo et A C D est rectus; ac propterea anguli D A C, A C D duabus rectis æquales sunt; quod fieri non potest [n]. Non igitur a puncto A ipsi B A ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. Extra igitur cadat necesse est. Cadat ut A E. Dico in locum, qui inter rectam lineam A E et circumferentiam C H A interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat ut F A, et

[m] 5. primi.
[n] 17. primi.

o 12. primi. et a puncto D ad F A perpendicularis[o] ducatur D G. Et quoniam rectus est angulus A G D, minor autem recto D A G, erit D A

p 19. primi. quam D G major[p]; æqualis autem est D A ipsi D H; major igitur est D H ipsâ D G, minor majore; quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam et circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui rectâ lineâ B A et circumferentiâ C H A continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentiâ C H A et rectâ lineâ A E omni angulo rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, aut aliquis minor contento C H A circumferentiâ et rectâ lineâ A E; in locum, qui inter circumferentiam C H A et rectam lineam A E interjicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum majorem quidem contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, qui scilicet rectis lineis continetur; minorem vero contento circumferentiâ C H A, et A E rectâ lineâ.





q ex prius demonstratis. Non cadit autem[q]; non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, major angulo contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, neque minor contento circumferentiâ C H A et A E rectâ lineâ. *Q. E. D.*

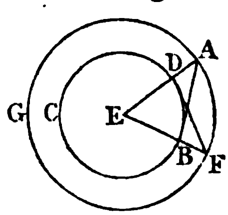
Cor. Ex hoc manifestum est rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere.

[XVII.] PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus B C D. Oportet a puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum B C D contingat. Sumatur centrum circuli E; et junctâ A E, quæ circumferentiæ B D C in D occurrat, centro quidem E, intervallo autem E A, circulus A F G describa-

describatur; et a puncto D ipsi E A ad rectos angulos [r] [r] 11. primi.
ducatur D F, quæ circumferentiæ A F G in F occurrat; jungaturque E F, quæ circumferentiæ C D B in B occurrat; jungatur denique A B. Dico a puncto A ductam esse A B, quæ circulum B C D contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum B C D, A F G; erit E A æqualis E F, et E D ipsi E B. Duæ igitur A E, E B duabus F E, E D æquales sunt, et angulum communem continent, qui est ad E. Ergo basis D F basi A B est [s] æqualis, triangulumque D E F æquale triangulo E B A, et reliqui anguli reliquis angulis. Æqualis igitur est angulus E B A angulo E D F; et E D F rectus est; quare et rectus E B A; atque est E B ex centro. Quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulum contingit [t]. Ergo A B contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea A B, quæ circulum B C D contingit. *Q. E. F.*

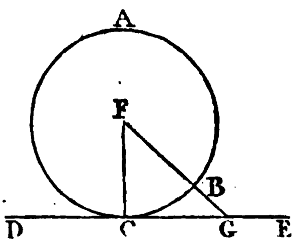


[s] 4. primi.
[t] 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

Si circulum contingat quædam recta linea, a centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim A B C contingat quædam recta linea D E in puncto C; et circuli A B C centrum sumatur F, a quo ad C ducatur F C. Dico F C ad ipsam D E perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur a puncto F ad D E perpendicularis [u] F G. Quoniam igitur angulus F G C rectus est, erit G C F acutus [x], ac propterea F G C angulus major angulo F C G. Majorem autem angulum majus latus [y] subtendit; major igitur est F C quàm F G. Æqualis autem F C ipsi F B; ergo F B ipsâ F G est major, minor majore; quod fieri non potest. Non igitur F G est perpendicularis ad D E. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter ipsam F C. Ergo F C ad D E est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, a centro autem



[u] 12. primi.
[x] 32. primi.
[y] 19. Primi.

autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. *Q. E. D.*

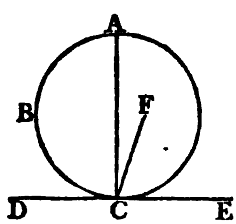
Cor. 1.* Rectæ duæ, quæ in oppositis diametri terminis peripheriam circuli contingunt, inter se sunt parallelæ.

Cor. 2.* Si duæ rectæ parallelæ circulum contingant, in oppositis diametri terminis necessario illum contingent; neque plures duabus parallelæ eundem circulum contingere possunt.

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in eâ circuli centrum erit.

Circulum enim A B C contingat quædam recta linea D E in C, et a puncto C ipsi D E ad rectos angulos ducatur C A. Dico in ipsâ A C circuli centrum esse. Non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, et jungatur C F. Quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta linea D E, et a centro ad contactum ducta est F C; erit F C ad ipsam D E perpendicularis [z]. Rectus igitur angulus est F C E; est autem et A C E rectus [a]; ergo F C E angulus est æqualis angulo A C E, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur F centrum est A B C circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquam in ipsâ A C. Quare si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in eâ circuli erit centrum. *Q. E. D.*



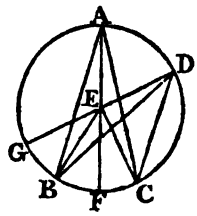
[z] 18. hujus.
[a] ex hyp.

[XX.] PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus, qui ad centrum, duplex est ejus, qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus A B C, ad cujus centrum quidem angulus sit B E C, ad circumferentiam vero B A C, et eandem circumferentiam B C pro basi habeant. Dico B E C angulum anguli B A C duplum esse. Jungatur enim A E, et

et ad F producatur. Itaque quoniam E A est æqualis E B, erit et angulus E A B angulo E B A [b] æqualis. Anguli igitur E A B, E B A duplices sunt ipsius anguli E A B; sed angulus B E F est æqualis [c] angulis E A B, E B A; ergo B E F angulus anguli E A B est duplex. Eâdem ratione et angulus F E C duplex est ipsius E A C. Totus igitur B E C totius B A C duplex erit. Rursus inflectatur, et sit alter angulus B D C, junctaque D E ad G producatur. Similiter ostendemus angulum G E C anguli G D C duplum esse; quorum G E B duplus est ipsius G D B. Ergo reliquus B E C reliqui B D C est duplus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum, duplex est ejus, qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant. *Q. E. D.*

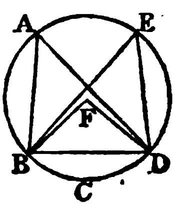


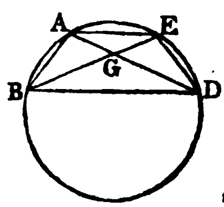
[b] 5. primi.
[c] 32. primi.

PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

In circulo qui in eodem segmento sunt anguli, inter se æquales sunt.

Sit circulus A B C D E, et in eodem segmento B A E D anguli sint B A D, B E D. Dico eos inter se æquales esse. Sumatur enim circuli A B C D E centrum, quod sit F; junganturque B F, F D. Quoniam angulus quidem B F D est ad centrum, angulus vero B A D ad circumferentiam, et circumferentiam eandem B C D pro basi habent; erit B F D angulus [d] anguli B A D duplus. Eâdem ratione angulus B F D duplus est etiam anguli B E D. Ergo angulus B A D angulo B E D æqualis erit. Si anguli B A D, B E D sunt in segmento minore semicirculo, ducatur A E, eruntque omnes anguli trianguli A B G æquales [e] omnibus angulis trianguli D E G. Et anguli A B E, A D E sunt æquales per hactenus demonstrata, et anguli A G B, D G E sunt etiam æquales [f], ad verticem enim sunt. Quare et reliquus B A G reliquo G E D æqualis erit. In circulo igitur qui in eodem segmento sunt anguli, inter se æquales sunt. *Q. E. D.*





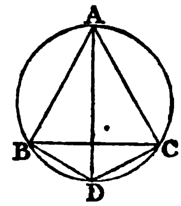
[d] 20. hujus.
[e] 32. primi.
[f] 15. primi.

PROP.

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus A B D C, et in ipso quadrilaterum A B D C. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur A D, B C. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales [g], erunt trianguli A B C tres anguli C A B, A B C, B C A æquales duobus rectis. Sed angulus A B C est æqualis [h] angulo A D C, in eodem enim sunt segmento A B D C. Et angulus A C B æqualis [h] ipsi A D B, quod sint in eodem A C D B segmento: totus igitur angulus B D C angulis A B C, A C B æqualis est. Communis apponatur B A C angulus; erunt anguli B A C, A B C, A C B angulis B A C, B D C æquales. Sed B A C, A B C, A C B sunt æquales [g] duobus rectis; ergo et anguli B A C, B D C duobus rectis æquales erunt. Similiter ostendemus angulos quoque A B D, A C D duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. *Q. E. D.*

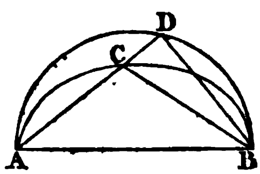


[g] 32. primi.
[h] 21. hujus.

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

Super eâdem rectâ lineâ duo circulorum segmenta similia, et incongrua ex eâdem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eâdem rectâ lineâ A B duo circulorum segmenta similia, et incongrua constituantur ex eâdem parte, A C B, A D B; circumferentiæ A C B, A B D, cum in punctis duobus A, B sibi mutuo occurrant, nullum aliud punctum præter illa A, B commune habent [i]. Sed inter A, B altera omnis interior, altera exterior omnis erit. Capiatur in interiori punctum quodvis C; junctaque A C exteriori producta in D occurrat; et C B, B D jungantur. Itaque quoniam segmentum A C B simile est segmento A D B, similia autem circulorum segmenta sunt, quæ angulos suscipiunt [k] æquales; erit A C B angulus æqualis angulo A D B, exterior



[i] 10. hujus.
[k] Def. 10. hujus.

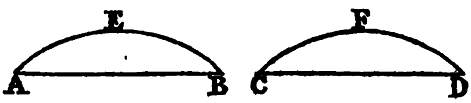
terior interiori; quod fieri non poteft[l]. Non igitur fu- [l] 16. primi.
per eâdem rectâ lineâ, duo circulorum fegmenta fimilia et incongrua ex eâdem parte conftituentur. *Q. E. D.*

Cor. * Segmentorum inæqualium fuper eâdem bafi ad partes eafdem conftitutorum, quod angulum majorem capit, ejus peripheria interior omnis erit.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Super æqualibus rectis lineis fimilia circulorum fegmenta inter fe æqualia funt.

Sint enim fuper æqualibus rectis lineis A B, C D fimilia circulorum fegmenta A E B, C F D. Dico fegmentum A E B fegmento C F D æquale effe. Applicato enim



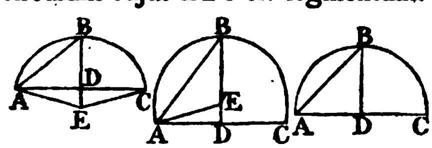
A E B fegmento fegmento C F D, et pofito puncto quidem A in C, rectâ vero lineâ A B in C D; congruet et B punctum puncto D, propterea quod A B ipfi C D fit æqualis. Congruente autem rectâ lineâ A B rectæ C D; congruet et A E B fegmentum fegmento C F D[m]; con- [m] 23. hujus.
gruens autem, ipfi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis fimilia circulorum fegmenta inter fe æqualia funt. *Q. E. D.*

Cor. * Segmentorum fimilium, bafibus æqualibus infiftentium, peripheriæ funt inter fe æquales.

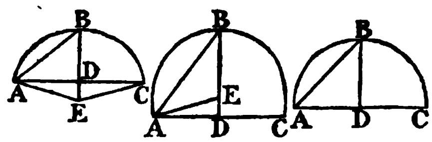
PROP. XXV. PROBL. [XXV.]

Circuli fegmento dato, defcribere circulum cujus eft fegmentum.

Sit datum circuli fegmentum A B C. Oportet defcribere circulum cujus A B C eft fegmentum. Secetur



A C bifariam [n] in D: et a puncto D ipfi A C ad rectos [n] 10. primi.
angulos ducatur[o] D B, et A B jungatur. Vel igitur [o] 11. primi.
angulus A B D major eft angulo B A D, vel minor, vel ipfi æqualis. Sit primum major, et ad rectam lineam



B A, atque ad datum in eâ punctum A constituatur angulus B A E æqualis [p] angulo A B D; productæ autem B D, A E sibi invicem in E occurrant, jungaturque E C. Quoniam igitur angulus A B E est æqualis angulo B A E, [q] erit et B E recta linea ipsi E A æqualis: et quoniam A D est æqualis D C, communis autem D E; duæ A D, D E duabus C D, D E æquales sunt, altera alteri; et angulus A D E æqualis angulo C D E, rectus enim uterque est; ergo et basis A E basi E C est [r] æqualis. Sed ostensa est A E æqualis E B; quare et B E ipsi E C est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ A E, E B, E C, inter se æquales sunt. Centro igitur E, intervallo autem unâ ipsarum A E, E B, E C, circulus descriptus etiam per reliqua [s] transibit puncta, et circulus descriptus erit. Quare circuli segmento dato, descriptus est circulus cujus segmentum est. Sed et illud constat, segmentum A B C semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. Similiter, et si angulus A B D sit æqualis angulo B A D; recta A D utrique ipsarum B D, D C æqualis erit; tres igitur rectæ lineæ A D, D B, D C inter se æquales erunt; quapropter erit D circuli descripti centrum, et segmentum A B C semicirculus. Si vero angulus A B D minor sit angulo B A D; constituatur ad rectam lineam B A, et ad punctum in eâ datum A, angulo A B D æqualis angulus B A E intra segmentum A B C; erit E centrum in ipsâ D B, atque erit A B C segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus cujus segmentum est. *Q. E. F.*

[p] 23. primi.
[q] 6. primi.
[r] 4. primi.
[s] 9. hujus.

[XXVI.]

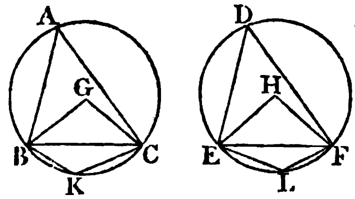
PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli A B C, D E F, et in ipsis æquales anguli ad centra quidem B G C, E H F, ad circumferentias vero B A C, E D F. Dico B A C circumferentiam circumferentiæ E D F æqualem esse; jungantur enim

B C,

B C, E F. Quoniam æquales ſunt A B C, D E F circuli, erunt et quæ ex centris æquales[t]; duæ igitur B G, G C duabus E H, H F æquales ſunt: et angulus ad G æqualis angulo ad H; ergo et baſis B C baſi E F eſt [u] æqualis. Rurſus quoniam æqualis



[t] Def. 1.
[u] 4. primi.

eſt angulus ad A angulo ad D, ſegmentum B A C ſimile [v] erit ſegmento E D F: et ſunt ſuper æqualibus rectis lineis B C, E F. Segmentorum autem ſimilium, baſibus æqualibus inſiſtentium, circumferentiæ æquales ſunt[w]. Æquales ſunt igitur circumferentiæ B A C, E D F.

[v] Def. 11.
[w] Cor. 24. hujus.

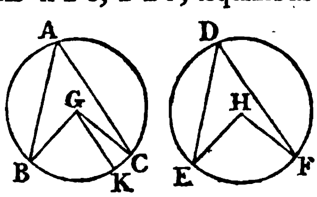
Dico inſuper circumferentias B K C, E L F inter ſe æquales. Sumatur enim in circumferentia B K C punctum quodvis K, et in E L F punctum quodvis L. Jungantur B K, C K, E L, F L. Quadrilateri A B K C circulo inſcripti anguli duo oppoſiti B A C, B K C ſimul ſumpti duobus rectis ſunt æquales[x]. Simili ratione, quadrilateri D E L F anguli duo oppoſiti E D F, E L F ſimul ſumpti duobus rectis ſunt æquales. Duo igitur B A C, B K C ſimul ſumpti duobus E D F, E L F ſimul ſumptis ſunt æquales. Angulus autem B A C angulo E D F æqualis eſt[y]. Reliquus igitur B K C reliquo E L F æqualis erit. Similia igitur ſunt ſegmenta B K C, E L F. Sed rectis æqualibus B C, E F inſiſtunt. Circumferentias igitur B K C, E L F æquales habent. In æqualibus igitur circulis, æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant. *Q. E. D.*

[x] 22. hujus.
[y] ex hyp.

PROP. XXVII. THEOR. [XXVII.]

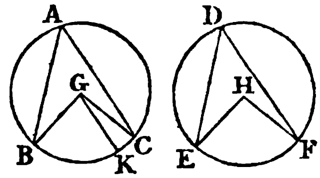
In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus inſiſtunt circumferentiis, inter ſe æquales ſunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant.

In æqualibus enim circulis A B C, D E F, æqualibus circumferentiis B C, E F inſiſtant anguli ad centra quidem B G C, E H F, ad circumferentias vero B A C, E D F. Dico angulum B G C angulo E H F, et angulum B A C angulo E D F æqualem



 eſſe.

esse. Si quidem inæquales sint anguli B G C, E H F; alter ipsorum erit major. Sit major B G C, et constituatur ad rectam lineam B G, et ad punctum in ipsa G, an-
[y] 23. primi. gulo E H F æqualis [y] angulus B G K. Æquales autem
[z] 26. hujus. anguli æqualibus insistunt [z] circumferentiis, quando ad centra fuerint; ergo circumferentia B K æqualis est circumferentiæ E F. Sed circumferentia E F æqualis est ipsi B C; ergo et B K ipsi B C est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est angulus B G C angulo E H F: ergo est æqualis. Atque est anguli quidem B G C dimidium angulus, qui ad A; anguli vero E H F dimidium qui ad D; angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis, inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. *Q. E. D.*

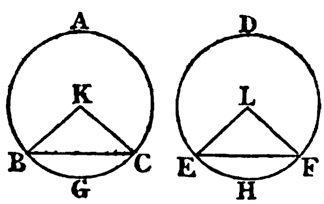


[XXVIII.]

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli A B C, D E F; et in ipsis æquales rectæ lineæ B C, E F, quæ circumferentias quidem B A C, E D F majores auferant, circumferentias vero B G C, E H F minores. Dico circumferentiam B A C majorem majori circumferentiæ E D F, et minorem circumferentiam B G C minori E H F æqualem esse.
[a] 1. hujus. Sumantur enim centra [a] circulorum K, L; junganturque B K, K C, E L, L F. Quoniam circuli æquales sunt, erunt
[b] Def. 1. et quæ ex centris æquales [b]; duæ igitur B K, K C sunt æquales duabus E L, L F; et basis B C æqualis est basi
[c] 8. primi. E F; ergo angulus B K C angulo E L F est [c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis,
[d] 26. hujus. quando ad centra fuerint [d]; quare circumferentia B G C æqualis est circumferentiæ E H F. Sed et totus A B C circulus toti D E F est æqualis; reliqua igitur circumferentia



ferentia B A C reliquæ E D F æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. *Q. E. D.*

PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

In æqualibus circulis, æquales sunt rectæ lineæ quæ circumferentias æquales subtendunt.

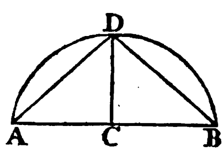
Sint æquales circuli A B C, D E F; et in ipsis æquales assumantur circumferentiæ B G C, E H F; et B C, E F jungantur. Dico rectam lineam B C rectæ E F æqualem esse. Sumantur enim centra [e] circulorum K, L; et jungantur B K, K C, E L, L F. Quoniam igitur circumferentia B G C est æqualis circumferentiæ E H F, erit et angulus B K C angulo E L F æqualis [f]; et quoniam circuli A B C, D E F sunt æquales, et quæ ex centris æquales erunt [g]; duæ igitur B K, K C sunt æquales duobus E L, L F; et æquales angulos continent; quare basis B C, basi E F est [h] æqualis. In æqualibus igitur circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. *Q. E. D.*

Vide figur. Prop. præcedentis.
[e] 1. hujus.
[f] 27. hujus.
[g] Def. 1.
[h] 4. primi.

PROP. XXX. PROBL. [XXX.]

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia A D B. Oportet A D B circumferentiam bifariam secare. Jungatur A B, et in C bifariam [i] secetur. A puncto autem C ipsi A B ad rectos angulos ducatur C D; et jungantur A D, D B. Quoniam igitur A C est æqualis C B, communis autem C D; duæ A C, C D duabus B C, C D æquales sunt; et angulus A C D æqualis angulo B C D, rectus enim uterque est: ergo basis A D, basi B D est [k] æqualis. Æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales [l] auferunt. Quare circumferentia A D circumferentiæ B D æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. *Q. E. F.*

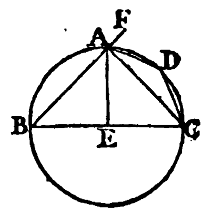


[i] 10. primi.
[k] 4. primi.
[l] 28. hujus.

[XXXI.] PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est; qui vero in majori segmento, minor est recto; et qui in minori, major recto: et insuper majoris quidem segmenti angulus, recto major est, minoris vero segmenti angulus, recto minor.

Sit circulus A B C D, cujus diameter B C, centrum autem E; et jungantur B A, A C, A D, D C. Dico angulum quidem, qui est in semicirculo B A C, rectum esse; qui vero in segmento A B C, quod majus est semicirculo, videlicet angulum A B C, minorem esse recto; et qui est in segmento A D C, quod minus est semicirculo, hoc est, angulum A D C, recto majorem. Jungatur A E, et B A ad F producatur. Itaque quoniam B E est æqualis E A, erit et angulus E A B, angulo E B A æqualis [l]. Rursus quoniam A E est æqualis E C, et angulus A C E angulo C A E æqualis [l] erit; totus igitur angulus B A C est æqualis duobus A B C, A C B angulis. Est autem et angulus F A C extra triangulum A B C, duobus A B C, A C B æqualis [m]; angulus igitur B A C est æqualis angulo F A C; ac propterea uterque ipsorum rectus [n]. Quare in semicirculo B A C angulus B A C rectus est. Et quoniam trianguli A B C duo anguli A B C, B A C duobus rectis sunt [o] minores, rectus autem B A C; erit A B C angulus recto minor, atque est in segmento A B C, quod majus est semicirculo. Quod cum in circulo quadrilaterum sit A B C D, quadrilaterorum vero, qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sint [p] æquales; erunt A B C, A D C anguli æquales duobus rectis, et angulus A B C minor est recto, reliquus igitur A D C recto major erit, atque est in segmento A D C, quod minus est semicirculo. Dico præterea majoris segmenti angulum, qui continetur A B C circumferentiâ et rectâ lineâ A C, recto majorem esse; angulum vero minoris segmenti, contentum circumferentiâ A D C et rectâ lineâ A C, recto minorem. Quod quidem perspicue apparet; quoniam angulus, qui rectis lineis B A, A C continetur, rectus est, erit et contentus A B C circumferentiâ et rectâ lineâ A C recto major. Rursus quoniam angulus, contentus rectis lineis



[l] 5. primi.
[m] 32. primi.
[n] Def. 10. primi.
[o] 17. primi.
[p] 22. hujus.

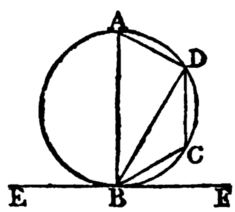
C A, A F, rectus eſt, erit qui continetur rectâ lineâ C A, et A D C circumferentiâ, minor recto. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt; qui vero in majori ſegmento, minor eſt recto; et qui in minori, major recto: et inſuper majoris quidem ſegmenti angulus, recto major eſt, minoris vero, recto minor. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi trianguli unus angulus ſit æqualis duobus, eum rectum eſſe; propterea quod et qui deinceps eſt, iiſdem eſt æqualis. Quando autem anguli deinceps ſunt æquales, neceſſario recti ſunt [q]. [q] Def. 10. primi.

PROP. XXXII. THEOR. [XXXII.]

Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli, quos ad contingentem facit, æquales erunt iis, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt.

Circulum enim A B C D contingat quædam recta linea E F in B, et a puncto B ad circulum A B C D ducatur recta linea B D ipſum utcunque ſecans. Dico angulos, quos B D cum E F contingente facit, æquales eſſe iis, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt; hoc eſt, angulum F B D eſſe æqualem angulo, qui conſtituitur in D A B ſegmento; angulum vero D B E æqualem angulo, qui in ſegmento D C B conſtituitur. Ducatur enim a puncto B ipſi E F ad rectos [r] angulos B A; et in circumferentiâ B D ſumatur quodvis punctum C; junganturque A D, D C, C B. Quoniam igitur circulum A B C D contingit quædam recta linea E F in puncto B; et a contactu B ad rectos angulos contingenti ducta eſt B A, erit in ipſâ B A centrum [s] A B C D circuli. Quare B A ejuſdem circuli diameter eſt, et angulus A D B in ſemicirculo eſt [t] rectus. Reliqui igitur anguli B A D, A B D uni recto [u] æquales ſunt. Sed et A B F eſt rectus; ergo angulus A B F æqualis eſt angulis B A D, A B D. Communis auferatur A B D. Reliquus igitur D B F ei, qui in alterno circuli ſegmento conſiſtit, videlicet angulo B A D, eſt æqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum eſt A B C D, et anguli ejus oppoſiti æquales [w] ſunt duobus rectis; erunt



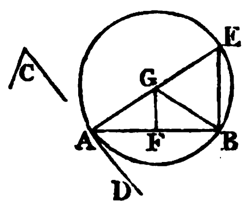
[r] 11. primi.
[s] 19. hujus.
[t] 31. hujus.
[u] 32. primi.
[w] 22. hujus.

D B F, D B E anguli angulis B A D, B C D æquales; quorum D B F ostensus est æqualis ipsi B A D. Ergo reliquus D B E ipsi D C B, ei scilicet, qui in alterno circuli segmento D C B constituitur, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, a contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt. *Q. E. D.*

[XXXIII.] PROP. XXXIII. PROBL.

Super datâ rectâ lineâ describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea A B, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. Itaque oportet super datâ rectâ lineâ A B describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum æqualem angulo, qui est ad C. Ad rectam lineam A B, et ad punctum in eâ datum A, constituatur angulus B A D angulo, qui est ad C, æqualis [x]; et a puncto A ipsi A D ad rectos angulos [y] ducatur A E. Secetur autem A B bifariam [z] in F; atque a puncto F ducatur F G ad rectos angulos ipsi A B; et G B jungatur. Quoniam igitur A F est æqualis F B, communis autem F G; duæ A F, F G duabus B F, F G æquales sunt; et angulus A F G æqualis angulo B F G. Ergo basis A G basi G B est [a] æqualis. Itaque centro G, intervallo autem A G, circulus descriptus transibit etiam per B. Describatur, et sit A B E; circumferentiæ autem A B E recta A G producta iterum in E occurrat, jungaturque E B. Quoniam igitur ab extremitate diametri A E, et a puncto A, ipsi A E ad rectos angulos ducta est A D; ipsa A D circulum [b] continget. Et quoniam circulum A B E contingit quædam recta linea A D, et a contactu qui est ad A, in circulum A B E ducta est recta linea A B; erit angulus D A B æqualis [c] angulo, qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet ipsi A E B. Sed angulus D A B angulo ad C est æqualis; ergo et angulus ad C angulo A E B æqualis erit. Super datâ igitur rectâ lineâ A B, segmentum circuli descriptum est A E B, suscipiens angulum A E B dato angulo, qui est ad C, æqualem. *Q. E. F.*



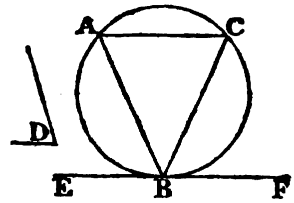
[x] 23. primi.
[y] 11. primi.
[z] 10. primi.
[a] 4. primi.
[b] Cor. 16. hujus.
[c] 32. hujus.

PROP.

PROP. XXXIV. PROBL. [XXXIV.]

A dato circulo ſegmentum abſcindere, quod ſuſcipiat angulum, dato rectilineo æqualem.

Sit datus circulus A B C, datus autem angulus rectilineus, qui ad D. Oportet a circulo A B C ſegmentum abſcindere, quod ſuſcipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur[d] recta linea E F circulum A B C in puncto B contingens; et ad rectam lineam B F, et ad punctum in eâ B,



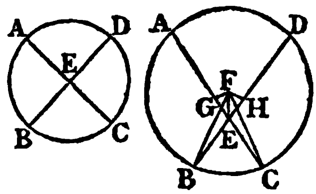
conſtituatur angulus F B C angulo, qui eſt ad D, æqualis[e]. Quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta linea E F in B puncto, et a contactu B ducta eſt B C, erit angulus F B C æqualis[f] ei, qui in alterno circuli ſegmento B A C conſtituitur. Sed F B C angulus angulo, qui ad D, eſt æqualis; ergo et angulus in ſegmento B A C angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo A B C abſciſſum eſt ſegmentum quoddam B A C, ſuſcipiens angulum dato angulo rectilineo, qui eſt ad D, æqualem. *Q. E. F.*

[d] 17. hujus.
[e] 23. primi.
[f] 32. hujus.

PROP. XXXV. THEOR. [XXXV.]

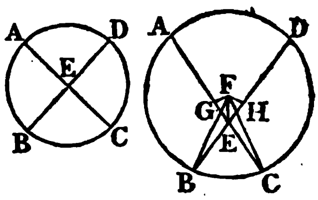
Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum, ſub ſegmentis unius contentum, æquale eſt ei, quod ſub alterius ſegmentis continetur, rectangulo.

In circulo enim A B C D, duæ rectæ lineæ A C, B D ſeſe mutuo in puncto E ſecent. Dico rectangulum, contentum ſub A E, E C, æquale eſſe ei, quod ſub D E, E B continetur. Si A C, B D per centrum tranſeant, ita ut E ſit centrum A B C D circuli; manifeſtum eſt,



æqualibus exiſtentibus A E, E C, D E, E B, et rectangulum contentum ſub A E, E C æquale eſſe ei, quod ſub D E, E B continetur. Si A C, D B non tranſeant per centrum, ſumatur centrum circuli A B C D, quod ſit F; et ab F ad rectas lineas A C, D B perpendiculares ducantur F G, F H: junganturque F B, F C, F E. Quoniam igitur recta quædam linea G F, per centrum ducta, rectam lineam quandam

quandam A C, non ductam per centrum, ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit[g]; quare A G ipsi G C est æqualis. Et quoniam recta linea A C secta est in partes æquales in puncto G, et in partes inæquales in E; erit rectangulum sub A E, E C contentum,



[g] 3. hujus.

una cum ipsius E G quadrato[h], æquale quadrato ex G C; commune addatur ex G F quadratum. Ergo rectangulum sub A E, E C, una cum iis, quæ ex E G, G F, quadratis, æquale est quadratis ex C G, G F; sed quadratis, quæ ex E G, G F, æquale[l] est quadratum ex F E: quadratis vero ex C G, G F æquale est[l], quod ex F C fit, quadratum. Rectangulum igitur sub A E, E C, una cum quadrato ex F E, æquale est quadrato ex F C. Est autem C F æqualis F B; ergo rectangulum sub A E, E C, una cum quadrato ex E F, æquale est ei, quod ex F B fit, quadrato. Eâdem ratione et rectangulum sub D E, E B, una cum quadrato ex F E, æquale est quadrato ex F B. Ostensum autem est et rectangulum sub A E, E C, una cum quadrato ex F E, æquale ei, quod fit ex F B, quadrato. Ergo rectangulum sub A E, E C, una cum quadrato ex F E, æquale est rectangulo sub D E, E B, una cum quadrato ex F E; commune auferatur ex F E quadratum; reliquum igitur rectangulum sub A E, E C, reliquo sub D E, E B rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum, sub segmentis unius contentum, æquale est ei, quod sub alterius segmentis continetur. *Q. E. D.*

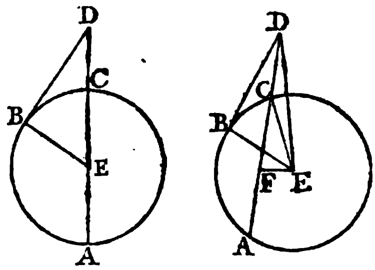
[h] 5. secundi.
[l] 47. primi.

[XXXVI.]

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, et ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum, quod sub totâ secante, et exterius assumptâ inter punctum et convexam circumferentiam, continetur, æquale erit ei, quod a contingente fit, quadrato.

Extra circulum enim A B C sumatur aliquod punctum D, et ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ D C A, D B; et D C A quidem circulum secet; D B vero contingat. Dico rectangulum sub A D, D C quadrato

drato, quod fit ex D B, æquale eſſe. Namque D C A vel


tranſit per centrum,
vel non tranſit. Pri-
mum tranſeat D A per
centrum circuli A B C,
quod ſit E; et E B jun-
gatur. Erit angulus
E B D rectus[k]; itaque k 18. hujus.
quoniam recta linea
A C bifariam ſecta eſt in
E, et ipſi adjicitur C D,
rectangulum ſub A D, D C una cum quadrato ex E C,
æquale[l] erit ei, quod fit ex E D, quadrato; æqualis l 6. ſecundi.
autem eſt C E ipſi E B; ergo rectangulum ſub A D,
D C una cum quadrato, quod ex E B, æquale eſt qua-
drato ex E D; ſed quadratum ex E D eſt æquale qua-
dratis [m] ipſarum E B, B D; rectus enim angulus eſt m 47. primi.
E B D. Rectangulum igitur ſub A D, D C, una cum
quadrato ex E B, æquale eſt ipſarum E B, B D quadra-
tis; commune auferatur quadratum, quod ex E B; ergo
reliquum ſub A D, D C rectangulum quadrato, quod
fit a contingente D B, æquale erit. Secundo D C A non
tranſeat per centrum A B C circuli: ſumaturque[n] cen- n 1. hujus.
trum E, et ad A C perpendicularis agatur E F, et jun-
gantur E B, E C, E D. Rectus igitur eſt E F D angulus.
Et quoniam recta linea quædam E F per centrum ducta,
rectam lineam quandam A C, non ductam per centrum,
ad rectos angulos ſecat, et bifariam ipſam ſecabit[o]; o 3. hujus.
quare A F ipſi F C eſt æqualis. Rurſus quoniam recta
linea A C bifariam ſecta eſt in F, atque ipſi adjicitur C D,
erit rectangulum ſub A D, D C, una cum quadrato ex
F C, æquale [l] quadrato quod ex F D; commune appona-
tur quod ex F E quadratum; rectangulum igitur ſub
A D, D C una cum quadratis ex F C, F E eſt æquale qua-
dratis ex D F, F E. Sed quadratis quidem ex D F, F E
æquale eſt [m] ex D E quadratum; etenim rectus eſt an-
gulus E F D: quadratis vero ex C F, F E æquale eſt
[m] quadratum ex C E. Ergo rectangulum ſub A D, D C,
una cum quadrato quod ex C E, eſt æquale quadrato ex
E D; æqualis autem eſt C E ipſi E B; rectangulum igitur
ſub A D, D C, una cum quadrato ex E B, æquale eſt ex
E D quadrato. Sed quadrato ex E D æqualia ſunt qua-
drata [m] ex E B, B D; ſiquidem rectus eſt angulus E B D.
Ergo

Ergo rectangulum ſub A D, D C, una cum quadrato ex E B æquale eſt eis, quæ ex E B, B D fiunt, quadratis; commune auferatur quadratum ex E B; reliquum igitur ſub A D, D C rectangulum quadrato, quod fit ex D B, æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, &c. *Q. E. D.*

Cor. 1.* (Clavii) Ex hâc Propoſitione xxxvi. manifeſtum eſt, ſi a puncto quovis extra circulum plures lineæ rectæ, circulum ſecantes, ducantur; rectangula, comprehenſa ſub totis lineis et partibus exterioribus, inter ſe eſſe æqualia.

Cor. 2.* (Clavii) Conſtat etiam duas rectas, ab eodem puncto ductas, quæ circulum contingant, inter ſe eſſe æquales.

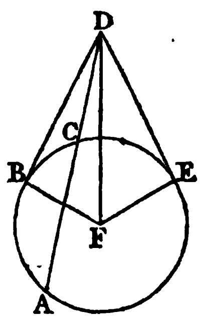
Cor. 3.* (Clavii) Perſpicuum quoque eſt, ab eodem puncto duas tantum rectas duci poſſe, quæ circulum contingant.

[XXXVII.]

PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero incidat: ſit autem, quod ſub totâ ſecante, et exterius aſſumptâ inter punctum et convexam circumferentiam, continetur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente ſit, quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim A B C ſumatur aliquod punctum D, atque ab ipſo in circulum cadant duæ rectæ lineæ D C A, D B; D C A quidem circulum ſecet, D B vero incidat: ſitque rectangulum ſub A D, D C æquale quadrato, quod fit ex D B. Dico ipſam D B circulum A B C contingere. Ducatur enim recta linea D E [p] contingens circulum A B C; et ſumatur circuli A B C centrum, quod ſit F; junganturque F E, F B, F D; ergo angulus F E D rectus eſt[q]. Et quoniam D E circulum A B C contingit, ſecat autem D C A; rectangulum ſub A D, D C æquale erit[r] quadrato ex D E; ſed rectangulum ſub A D, D C ponitur æquale quadrato ex

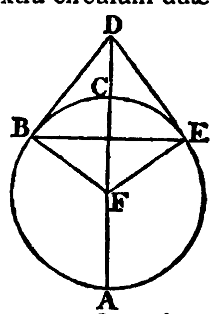


[p] 17. hujus.
[q] 18. hujus.
[r] Ex antecedente.

ex D B; quadratum igitur, quod ex D E, quadrato ex D B æquale erit; ac propterea linea D E erit ipsi D B æqualis; est autem et F E æqualis F B. Duæ igitur D E, E F duabus D B, B F æquales sunt; et basis communis F D; angulus igitur D E F est æqualis angulo D B F; rectus autem est D E F, ergo et D B F est rectus; atque est F B producta diameter. Quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, [a] circulum contingit; ergo D B circulum A B C contingat necesse est. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. *Q. E. D.* [a] Cor. 16. hujus.

Cor. 1.* (Clavii) Si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam extra circulum in peripheriam incidant; earum autem una circulum contingat; et altera eundem continget.

Cor. 2.* Si a puncto quopiam D extra circulum duæ rectæ ducantur, D B, D E, circulum in punctis B, E contingentes; recta B E, contactus jungens, peripheriam integram in partes inæquales B C E, B A E dividit; quarum minor est B C E, quæ angulum B D E convexa respicit; major B A E, quæ cava angulo obversa est.

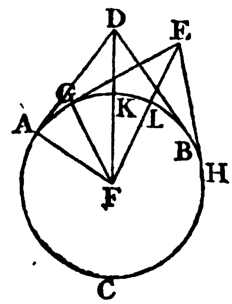


Circuli B A E sumatur centrum F. Juncta F D peripheriæ in punctis A, C occurrat. Jungantur F B, F E. Propter angulum F B D rectum, angulus B F D recto minor erit. Duo autem B F D, B F A simul duobus rectis sunt æquales. Angulus igitur B F A recto major. Multo major igitur quam B F C. Arcus igitur B A arcu B C major. Simili modo ostendetur arcus E A arcu E C major. Totus igitur B A E, ex duobus B A, E A compositus, toto B C E major, ex duobus B C, E C composito.

Cor. 3.* Si a punctis duobus extra circulum, distantiis æqualibus a centro remotis, rectæ ducantur, circulum contingentes; arcus, contingentibus intercepti, æquales erunt, convexus convexo, cavus cavo.

Extra circulum A C B, cujus centrum F, sint puncta D, E, distantiis æqualibus a centro F remota. A puncto D ducantur D A, D B, quæ in punctis A, B; et a puncto

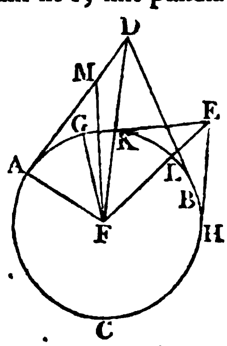
a puncto E ducantur E G, E H, quæ in punctis G, H, circulum contingant. Junctæ autem F D, F E, peripheriæ circuli, quâ parte convexa respicit puncta D, E, in punctis K, L occurrant. Dico arcus A K B, A C B arcubus G L H, G C H æquales: convexum A K B convexo G L H; cavum A C B, cavo G C H. Jungantur enim F A, F G. Anguli F A D, F G E sunt recti. Sed rectæ F A, F D rectis F G, F E, singulæ singulis, æquales. Quare in triangulis D A F, E G F latus



[t] 47. primi. D A, lateri E G æquale [t]. Latera igitur D F, F A lateribus E F, F G, singula singulis, æqualia; et basis D A basi E G æqualis. Quare angulus D F A angulo E F G
[u] 8. primi. æqualis [u]. Arcus igitur A K arcui G L æqualis. Simili modo ostendetur arcus B K æqualis arcui H L. Totus igitur A K B, ex duobus A K, B K compositus, æqualis toti G L H, ex duobus G L, H L composito. Arcus autem A K B, A C B simul integram circuli peripheriam complent; quam similiter complent G L H, G C H. Duo igitur A K B, A C B, simul sumpti, duobus G L H, G C H, simul sumptis, æquales sunt. Ablatisque A K B, G L H æqualibus, relinquentur A C B, G C H inter se æquales. *Q. E. D.*

Cor. 4. * Si a punctis duobus extra circulum, distantiis inæqualibus a centro remotis, rectæ ducantur circulum contingentes; arcus inæquales intercipient; et convexum minorem, majorem vero cavum, quæ a puncto propiore ductæ fuerint.

Extra circulum ACB, cujus centrum sit F, sint puncta duo D, E, distantiis inæqualibus a centro remota. Hoc est, junctæ F D, F E inæquales sint. Inæqualium autem altera major erit. Sit F D major. Ducantur a puncto D duæ rectæ D A, D B, quæ in punctis A, B, a puncto autem E, duæ E G, E H, quæ in punctis G, H circulum contingant. Rectæ autem F D, F E circuli peripheriæ, quâ parte puncta D, E convexa respicit, in punctis K, L occurrant. Dico arcus A K B, G L H, necnon A C B, G C H,



G C H esse inæquales, et arcum G L H arcu A K B minorem, arcum autem G C H arcu A C B majorem. Jungantur enim F A, F G; propter angulum ad A rectum, quadratum ex F D duobus quadratis ex F A, A D est æquale [w]. Similiter propter angulum ad G rectum, quadratum ex F E duobus ex F G, G E est æquale. Sed quadratum ex F E minus erit quadrato ex F D, propter rectam F E rectâ F D [x] minorem. Duo igitur ex F G, G E duobus ex F A, A D sunt minora. Auferantur æqualia ex rectis æqualibus F G, F A; jam reliquum ex E G quadratum reliquo ex D A minus erit. Recta igitur E G rectâ D A minor. In A D igitur a puncto A capiatur A M illi E G æqualis. Minor erit A M quam A D, et punctum M duobus A, D necessario interjacebit. Quapropter, si jungatur F M, angulus A F M angulo A F D minor erit. Sed in triangulis F A M, F G E, propter latera F A, A M, lateribus F G, G E, singula singulis, æqualia, et angulos ad A, G æquales (etenim uterque rectus), anguli A F M, E F G erunt inter se æquales [y]. Angulus igitur G F E angulo A F D minor. Quare et arcus G L arcu A K minor. Simili modo ostendetur arcus H L arcu B K minor. Totus igitur G L H toto A K B minor. Et qui reliquus fuerit ex integrâ circuli peripheriâ, ablato G L H, major eo, qui reliquus fuerit, ablato A K B. Arcus nempe G C H arcu A C B major. *Q. E. D.*

[w] 47. primi.

[x] ex hyp.

[y] 4. primi.

Cor. 5. * Recta, quæ centrum circuli et contingentium occursum jungit, arcum contingentibus interceptum, necnon rectam contactus jungentem, bifariam dividit.

Cor. 6. * Recta, quæ arcum circuli, duabus contingentibus interceptum, in medio ipsius puncto contingit, rectæ, quæ contingentium primo positarum contactus jungit, parallela est.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

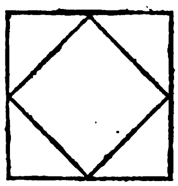
ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

Definitio I.

FIGURA rectilinea in figurâ rectilineâ deſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ deſcriptæ angulus unumquodque latus ejus, in quâ deſcribitur, contingit.

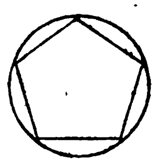


II.

Figura ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ, unumquemque angulum ejus, circa quam deſcribitur, contingit.

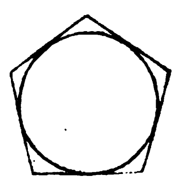
III.

Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſque deſcriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ circuli circumferentiam contingit.



V.

Circulus ſimiliter in figurâ rectilineâ deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus, in quâ deſcribitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus, circa quam deſcribitur, contingit.

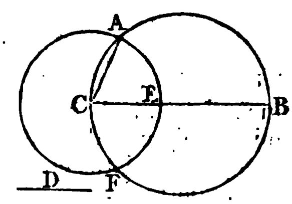
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentiâ fuerint.

[I.] PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, datæ rectæ lineæ, quæ diametro ejus major non ſit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus A B C, data autem recta linea, non major circuli diametro, D. Oportet in circulo A B C rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli A B C diameter B C. Si quidem igitur B C ſit æqualis ipſi D, factum jam erit quod proponebatur; etenim in circulo A B C aptata eſt B C rectæ lineæ D æqualis. Sin minus, major eſt B C quam D; ponatur igitur [a] ipſi D æqualis C E; et centro quidem C, intervallo autem C E, circulus deſcribatur A E F, qui circulo A B C in A occurrat; et C A jungatur. Itaque quoniam punctum C centrum eſt A E F circuli; erit C A ipſi C E æqualis; ſed D eſt æqualis C E. Ergo et D ipſi A C æqualis erit. In dato igitur circulo A B C datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata eſt A C. *Q. E. F.*



[a] 3. primi.

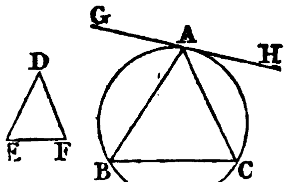
[II.] PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. Oportet in A B C circulo deſcribere triangulum triangulo D E F æquiangulum. Ducatur recta linea G A H contingens [b] circulum A B C in puncto A; et ad rectam lineam A H, et ad punctum in eâ A, angulo D E F æqualis

[b] 17. tertii.

æqualis [c] angulus constituatur H A C. Rursus ad rectam lineam A G, et ad punctum in ipsâ A, angulo D F E æqualis [c] constituatur angulus G A B; et B C jungatur. Quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta H A G; a contactu autem in circulum ducta est A C; erit H A C angulus æqualis [d] ei, qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi A B C; sed H A C angulus æqualis est angulo D E F, ergo et angulus A B C angulo D E F est æqualis. Eâdem ratione et angulus A C B est æqualis angulo D F E. Reliquus igitur B A C angulus reliquo E D F æqualis [e] erit. Ergo triangulum A B C trangulo D E F est æquiangulum, et descriptum est in circulo A B C. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. *Q. E. F.*



[c] 23. primi.

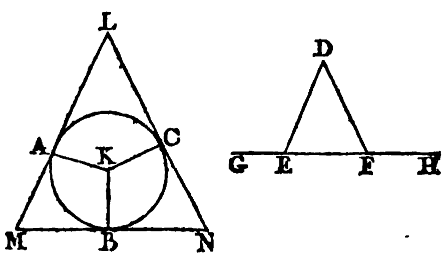
[d] 32. tertii.

[e] 2. Cor. 32. primi.

PROP. III. PROBL. [III.]

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

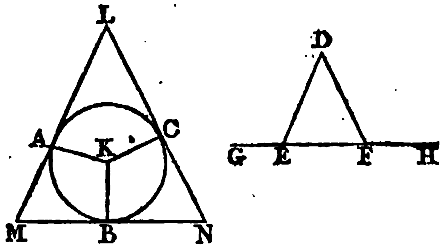
Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. Oportet circa circulum A B C describere triangulum triangulo D E F æquiangulum. Protrahatur E F ex utrâque parte ad puncta H, G, et sumatur circuli A B C centrum K; et recta linea K B utcunque ducatur:



constituaturque ad rectam lineam K B, et ad punctum in eâ K, angulo quidem D E G æqualis [f], angulus B K A, angulo autem D F H æqualis, [f] angulus B K C; et per A, B, C puncta ducantur rectæ lineæ L A M, M B N, N C L circulum A B C contingentes. Jam cum rectæ A K, B K

[f] 23. primi.

 angulo



angulo A K B sibi invicem inclinantur, angulo D E G æquali, directa non est linea A K B [g]. Rectæ igitur A M, N B, quæ circulum in punctis A, B, contingunt, ex diametro non oppositis, non erunt inter se parallelæ [h]. Rectæ igitur A M, N B sibi mutuo occurrent. Occurrant in puncto M. Similiter propter angulum B K C angulo D F H æqualem [i] directa non est linea C K B. Rectæ igitur M B, N C sibi mutuo occurrent. Occurrant in puncto N. Quoniam rectæ M A, M B N, N C circulum A B C in punctis A, B, C contingunt, a centro autem K ad puncta A, B, C ducuntur rectæ K A, K B, K C; erunt anguli ad puncta A, B, C recti. In quadrilatero igitur A M B K, cujus anguli quatuor quatuor rectis sunt æquales (per Theorema primum eorum, quæ Prop. 32. Lib. i. subjunxit Keillius) cum duo K A M, K B M sint recti; erunt reliqui duo A K B, A M B duobus rectis æquales. Duo autem D E G, D E F simul sumpti æquales sunt duobus rectis. Duo igitur A K B, A M B simul sumpti duobus D E G, D E F sunt æquales. Horum autem A K B ipsi D E G est æqualis. Quare et reliquus A M B reliquo D E F æqualis erit. Similiter ostendetur angulus C N B angulo D F E æqualis. Duo igitur A M B, C N M simul sumpti duobus D E F, D F E simul sumptis sunt æquales. Duo autem D E F, D F E duobus rectis sunt minores [k]. Duo igitur A M B, C N B duobus rectis sunt minores. Rectæ igitur M A, N C productæ inter se convenient [l]. Conveniant in puncto L. Triangulum igitur est figura L M N, et propter angulos duos L M N, L N M duobus D E F, D F E æquales (id enim ostensum) reliquus M L N reliquo E D F æqualis est. Æquiangulum igitur est triangulum L M N triangulo D E F, et circulo A B C circumscriptum est. *Q. E. F.*

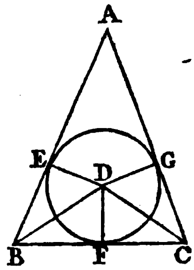
[g] 13. primi.
[h] 2. Cor. 18. tertii.
[i] Per construct.
[k] 17. primi.
[l] Ax. 12. primi.

PROP.

PROP. IV. PROBL. [IV.]

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum A B C. Oportet in triangulo A B C circulum describere. Secentur[m] anguli A B C, B C A bifariam rectis lineis B D, C D, quæ conveniant inter se in D puncto; et a puncto D ad rectas lineas A B, B C, C A perpendiculares[n] ducantur D E, D F, D G. Quoniam angulus E B D est æqualis angulo F B D, est autem et rectus B E D recto B F D æqualis; duo triangula E B D, D B F duos angulos duobus angulis æquales habent, et unum latus uni lateri æquale; utrique scilicet commune B D, quod uni æqualium angulorum subtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia[o] habebunt, atque erit D E æqualis D F. Et eâdem ratione D G æqualis D F. Ergo et D E ipsi D G est æqualis. Tres igitur rectæ lineæ D E, D F, D G inter se æquales sunt; quare centro D, intervallo autem unius ipsarum D E, D F, D G, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas A B, B C, C A continget; propterea quod recti sunt ad E, F, G anguli. Si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet, quod est absurdum[p]. Non igitur centro D, intervallo autem unius ipsarum D E, D F, D G, circulus descriptus secabit rectas lineas A B, B C, C A, quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo A B C. In dato igitur triangulo A B C circulus E F G descriptus est. Q. E. F.



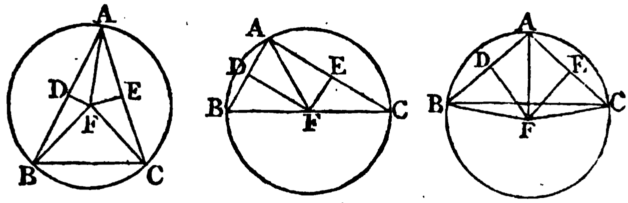
[m] 9. primi.
[n] 12. primi.
[o] 26. primi.
[p] 16. tertii.

PROP. V. PROBL. [V.]

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datum triangulum A B C. Oportet circa datum triangulum A B C circulum describere. Secentur A B, A C bifariam[q] in D, E punctis; et a punctis D, E ipsis A B, A C ad rectos angulos[r] ducantur D F, E F, quæ quidem vel intra triangulum A B C convenient, vel in rectâ lineâ B C, vel extra ipsam. Conveniant primo intra triangulum in puncto F; et B F, F C, F A jungantur. Quoniam igitur A D est æqualis D B, communis autem,

[q] 10. primi.
[r] 11. primi.



[a] 4. primi. et ad rectos angulos, D F; erit basis A F basi F B æqualis[a]. Similiter ostendetur et C F æqualis F A. Ergo et B F est æqualis F C. Tres igitur F A, F B, F C inter se æquales sunt. Quare centro F, intervallo autem unius ipsarum F A, F B, F C, circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit circulus descriptus circa triangulum A B C. Secundo, D F, E F conveniant in rectâ lineâ B C, in puncto F, ut in secundâ figurâ; et A F jungatur. Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum A B C descripti. Postremo D F, E F conveniant extra triangulum A B C rursus in F puncto, ut in tertiâ figurâ; et jungantur A F, F B, F C. Et quoniam rursus A D est æqualis D B, communis autem, et ad rectos angulos, D F; basis A F basi F B æqualis erit. Similiter demonstrabimus et C F ipsi F A æqualem esse. Quare et B F est æqualis F C. Rursus igitur centro F, intervallo autem unius ipsarum F A, F B, F C, circulus descriptus et per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum A B C descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. *Q. E. F.*

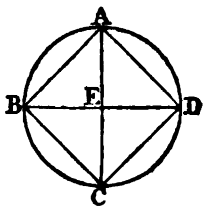
Cor. Si triangulum sit rectangulum, centrum circuli cadet in latus, angulo recto oppositum. Si acutangulum, cadet centrum intra triangulum; si obtusangulum,
[t] 31. tertii. cadet extra[t].

[VI.] PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D. Oportet in A B C D circulo quadratum describere. Ducantur circuli A B C D diametri ad rectos angulos inter se A C, B D; et A B, B C, C D, D A jungantur. Quoniam igitur B E est æqualis E D, etenim centrum est E, communis autem, et ad

ad rectos angulos, E A; erit basis B A æqualis[u] basi A D. [u] 4. primi.
Et eâdem ratione utraque ipsarum B C, C D utrique B A, A D est æqualis; æquilaterum igitur est A B C D quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea B D diameter est A B C D circuli, erit B A D semicirculus; quare angulus B A D rectus[w] est. Et eâdem ratione unusquisque ipsorum A B C, B C D, C D A est rectus. [w] 31. tertii.



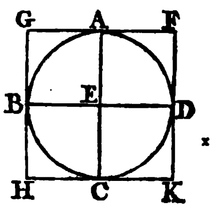
Rectangulum igitur est A B C D quadrilaterum. Ostensum autem est et æquilaterum esse. Ergo quadratum necessario erit, et descriptum est in circulo A B C D. In dato igitur A B C D circulo quadratum A B C D descriptum est. *Q. E. F.*

PROP. VII. PROBL. [VII.]

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D. Oportet circa A B C D circulum quadratum describere. Ducantur circuli A B C D duæ diametri A C, B D ad rectos inter se angulos, et per puncta A, B, C, D ducantur circulum A B C D contingentes[x] F G, G H, H K, K F. Quoniam igitur F G contingit circulum A B C D, a centro autem E ad contactum, qui est ad A, ducitur E A; erunt [y] anguli ad A recti. Eâdem ratione, et anguli ad puncta B, C, D, recti sunt. Et quoniam angulus A E B rectus est, est autem et rectus E B G; erit G H ipsi A C parallela[z]. Eâdem ratione, et A C parallela est F K. Similiter demonstrabimus et utramque ipsarum G F, H K ipsi B E D parallelam esse. Quare et G F est parallela H K. Parallelogramma igitur sunt G K, G C, A K, F B, B K, ac propterea G F quidem est [a] æqualis H K; G H vero ipsi F K. Et quoniam A C æqualis est B D; sed A C quidem utrique ipsarum G H, F K est [a] æqualis; B D vero æqualis utrique G F, H K; et utraque G H, F K utrique G F, H K æqualis erit. Æquilaterum igitur est F G H K quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est G B E A, atque est rectus A E B angulus, et ipse A G B rectus erit. Similiter demon-

[x] 17. tertii.
[y] 18. tertii.
[z] 28. primi.
[a] 34. primi.

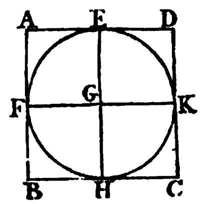


ſtrabimus angulos etiam ad puncta H, K, F, rectos eſſe. Rectangulum igitur eſt quadrilaterum F G H K. Demonſtratum autem eſt et æquilaterum. Ergo quadratum ſit neceſſe eſt, et deſcriptum eſt circa circulum A B C D. Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt. *Q. E. F.*

[VIII.] PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum deſcribere.

Sit datum quadratum A B C D. Oportet in quadrato A B C D circulum deſcribere. Secetur utraque ipſarum A B, A D, bifariam



[b] 10. primi. [b] in punctis F, E. Et per E quidem alterutri ipſarum A B, C D parallela

[c] 31. primi. [c] ducatur E H: per F vero ducatur F K parallela [c] alterutri A D, B C. Parallelogrammum igitur eſt unumquodque ipſorum A K, K B, A H, H D, A G, G C, B G, G D; et latera ipſorum, quæ ex oppoſito,

[d] 34. primi. ſunt æqualia [d]. Et quoniam D A eſt æqualis A B; et ipſius quidem A D dimidium eſt A E, ipſius vero A B dimidium A F; erit A E ipſi A F æqualis; quare et oppoſita latera æqualia ſunt. Ergo F G eſt æqualis G E. Similiter demonſtrabimus et utramque ipſarum G H, G K utrique F G, G E æqualem eſſe. Quatuor igitur G E, G F, G H, G K inter ſe ſunt æquales. Itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G E, G F, G H, G K, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; et rectas lineas A B, B C, C D, D A continget, propterea quod anguli ad E, F, H, K recti ſunt. Si enim circulus ſecabit rectas lineas A B, B C, C D, D A, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos

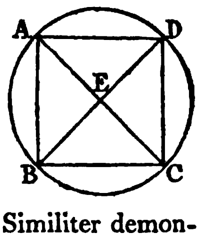
[e] 16. tertii. ducitur, intra circulum cadet; quod [e] eſt abſurdum. Non igitur centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G E, G F, G H, G K, circulus deſcriptus rectas lineas A B, B C, C D, D A ſecabit. Quare ipſas neceſſario continget; atque erit deſcriptus in quadrato A B C D. In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt. *Q. E. F.*

PROP.

PROP. IX. PROBL. [IX.]

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum A B C D. Oportet circa A B C D quadratum circulum describere. Junganturr A C, B D, quæ se invicem in puncto E secent. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C; duæ D A, A C duabus B A, A C æquales sunt; et basis D C æqualis basi B C. Angulus igitur D A C angulo B A C æqualis [f]. Angulus igitur D A B bifariam sectus est rectâ lineâ A C. Similiter demonstrabimus unumquemque angulorum A B C, B C D, C D A rectis lineis A C, D B bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus D A B angulo A B C est æqualis, atque est anguli quidem D A B dimidium angulus E A B, anguli vero A B C dimidium E B A; et E A B angulus angulo E B A æqualis erit. Quare et latus E A lateri E B est [g] æquale. Similiter demonstrabimus et utramque rectarum linearum E C, E D utrique E B, E A æqualem esse. Ergo quatuor rectæ lineæ E A, E B, E C, E D inter se sunt æquales. Centro igitur E, intervallo autem unius ipsarum E A, E B, E C, E D, circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa A B C D quadratum. Describatur ut A B C D. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. *Q. E. F.*



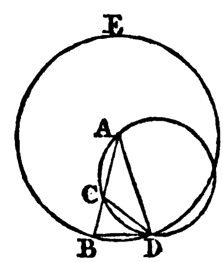
[f] 8. primi.

[g] 6. primi.

PROP. X. PROBL. [X.]

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui.

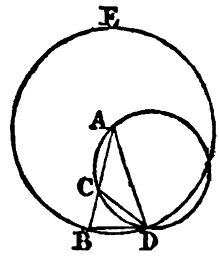
Exponatur recta quædam linea A B, et secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum sub A B, B C æquale [h] sit ei quod ex C A describitur quadrato; et centro quidem A, intervallo autem A B, circulus describatur B D E; aptetur que in B D E circulo recta linea B D æqualis [i] ipsi A C, quæ non est major diametro circuli B D E. Junctâque D A, dico factum esse, quod fieri oportebat. Constitutum est enim triangulum isosceles B A D, habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim B D, duplum reliqui B A D. Jungatur enim D C, et circa A D C triangulum [k] circulus A C D describatur.



[h] 11. secundi.

[i] 1. hujus.

[k] 5. hujus.



describatur. Itaque quoniam rectangulum A B C æquale est quadrato, quod fit ex A C; æqualis autem est A C ipsi B D; erit sub A B, B C rectangulum quadrato ex B D æquale. Et quoniam extra circulum A C D sumptum est aliquod punctum B, et a puncto B in circulum A C D cadunt duæ rectæ lineæ B C A, B D, quarum altera quidem secat, altera vero incidit; atque est rectangulum sub A B, B C æquale qua-
l 37. tertii. drato ex B D: recta linea B D circulum A C D[l] continget. Quoniam igitur B D contingit, et a contactu ad D ducta
m 32. tertii. est D C; erit B D C angulus æqualis[m] ei, qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo D A C. Quod cum angulus B D C æqualis sit ipsi D A C, communis apponatur C D A; totus igitur B D A est æqualis duobus angulis C D A, D A C. Sed ipsis C D A, D A C exterior angulus
n 32. primi. B C D est [n] æqualis. Ergo et B D A æqualis est ipsi B C D.
o 5. primi. Sed B D A angulus est[o] æqualis angulo C B D, quoniam et latus A D lateri A B est æquale. Ergo et D B A ipsi B C D æqualis erit. Tres igitur anguli B D A, D B A, B C D inter se æquales sunt. Et quoniam angulus D B C
p 6. primi. æqualis est angulo B C D, et latus B D lateri D C est[p] æquale; sed B D ponitur æqualis ipsi C A. Ergo et C A est æqualis C D; quare et angulus C D A æqualis est angulo D A C. Anguli igitur C D A, D A C simul sumpti ipsius anguli D A C duplices sunt. Est autem et B C D angulus angulis C D A, D A C æqualis; ergo et B C D duplex est ipsius D A C. Sed B C D est æqualis alterutri ipsorum B D A, D B A; quare et uterque B D A, D B A ipsius D A B est duplex. Isosceles igitur triangulum constitutum est A D B, habens utrumque eorum angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui. *Q. E. F.*

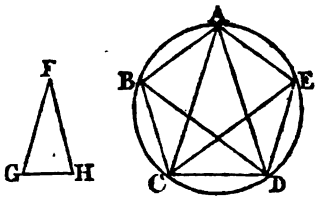
[XI.] PROP. XI. PROBL.

In dato circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere.

Sit datus circulus A B C D E. Oportet in A B C D E circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Exponatur triangulum isosceles F G H, habens utrumque eorum, qui sunt ad basim G H, angulorum,
q 10. hujus. duplum[q] anguli, qui est ad F; et describatur in circulo
r 2. hujus. A B C D E triangulo F G H æquiangulum[r] triangulum

A C D,

A C D; ita ut angulo quidem, qui est ad F, æqualis sit angulus C A D; utrique vero ipsorum, qui ad G, H, sit æqualis uterque ACD, CDA. Et uterque igitur ACD, CDA anguli CAD est duplus. Secetur uterque ipsorum ACD, CDA bifariam[s] rectis lineis CE, DB; et AB, BC, DE, EA jungantur. [s] 9. primi.



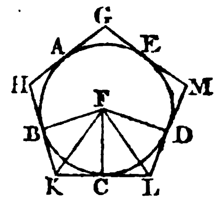
Quoniam igitur uterque ipsorum A C D, C D A duplus est ipsius C A D, et secti sunt bifariam rectis lineis C E, D B, quinque anguli D A C, A C E, E C D, C D B, B D A inter se sunt æquales. Æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis insistunt[t]; [t] 26. tertii.
quinque igitur circumferentiæ A B, B C, C D, D E, E A æquales sunt inter se. Sed æquales circumferentias [u]æquales rectæ lineæ subtendunt. Ergo et quinque [u] 29. tertii.
rectæ lineæ A B, B C, C D, D E, E A inter se æquales sunt. Æquilaterum igitur est A B C D E pentagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia A B æqualis est circumferentiæ D E, communis apponatur B C D. Tota igitur A B C D circumferentia toti circumferentiæ E D C B est æqualis; et in circumferentiâ quidem A B C D insistit angulus A E D, in circumferentiâ vero E D C B insistit B A E. Ergo et B A E angulus est æqualis angulo A E D. Eâdem ratione et unusquisque angulorum A B C, B C D, C D E unicuique ipsorum B A E, A E D est æqualis. Æquiangulum igitur est A B C D E pentagonum: ostensum autem est et æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum descriptum est. *Q. E. F.*

PROP. XII. PROBL. [XII.]

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere.

Sit datus circulus A B C D E. Oportet circa circulum A B C D E pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Intelligantur pentagoni in circulo descripti [x]angulorum puncta esse A, B, C, D, E, ita ut circum- [x] 11. hujus.
ferentiæ A B, B C, C D, D E, E A sint æquales; et per puncta A, B, C, D, E ducantur [y]circulum contingentes [y] 17. tertii.
G H, H K, K L, L M, M G; et sumpto circuli A B C D E centro F, jungantur F B, F K, F C, F L, F D. Quoniam igitur

igitur recta linea K L contingit circulum A B C D E in puncto C, et a centro F ad contactum, qui est ad C, ducta est F C, erit F C ad ipsam K L perpendicularis [a]. Rectus igitur est uterque angulorum, qui sunt ad C. Eâdem ratione et anguli, qui ad puncta B, D, recti sunt. Et quoniam rectus angulus est F C K, quadratum quod fit ex F K æquale [a] est quadratis ex F C, C K. Et ob eandem causam quadratis ex F B, B K æquale est ex F K quadratum. Quadrata igitur ex F C, C K quadratis ex F B, B K æqualia sunt; quorum, quod ex F C ei, quod ex F B, est æquale. Ergo reliquum, quod ex C K, reliquo, quod ex B K, æquale erit. Æqualis igitur est B K ipsi C K. Et quoniam F B est æqualis F C, communis autem F K; duæ B F, F K duabus C F, F K æquales sunt, et basis B K est æqualis basi K C; erit angulus [b] itaque B F K angulo K F C æqualis, angulus vero B K F angulo F K C. Duplus igitur est angulus B F C anguli K F C, et angulus B K C duplus ipsius F K C. Eâdem ratione, et angulus C F D anguli C F L est duplus; angulus vero C L D duplus anguli C L F. Et quoniam circumferentia B C circumferentiæ C D est æqualis, et angulus B F C angulo C F D æqualis erit [c]. Atque est angulus quidem B F C anguli K F C duplus; angulus vero D F C duplus ipsius L F C: æqualis igitur est angulus K F C angulo C F L. Itaque duo triangula sunt F K C, F L C, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri æquale, quod ipsis commune est, F C: ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt [d], et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. Recta igitur linea K C est æqualis rectæ C L, et angulus F K C angulo F L C. Et quoniam K C est æqualis C L, erit K L ipsius K C dupla. Eâdem ratione, et H K ipsius B K dupla ostendetur. Rursus quoniam B K ostensa est æqualis ipsi K C, atque est K L quidem dupla K C, H K vero ipsius B K dupla; erit H K ipsi K L æqualis. Similiter et unaquæque ipsarum G H, G M, M L ostendetur æqualis utrique H K, K L. Æquilaterum igitur est G H K L M pentagonum. Dico etiam æquiangulum esse. Quoniam enim angulus F K C est æqualis angulo F L C; et ostensus est angulus H K L duplus ipsius F K C; ipsius vero F L C duplus



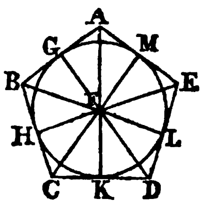
[a] 18. tertii.
[a] 47. primi.
[b] 8. primi.
[c] 27. tertii.
[d] 26. primi.

duplus K L M: erit et H K L angulus angulo K L M æqualis. Simili ratione oſtendetur et unuſquiſque ipſorum K H G, H G M, G M L utrique H K L, K L M æqualis. Quinque igitur anguli G H K, H K L, K L M, L M G, M G H inter ſe æquales ſunt. Ergo æquiangulum eſt G H K L M pentagonum. Oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum eſſe; et deſcriptum eſt circa A B C D E circulum. *Q. E. F.*

PROP. XIII. PROBL. [XIII.]

In dato pentagono, quod æquilaterum et æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum A B C D E. Oportet in A B C D E pentagono circulum deſcribere. Secetur uterque angulorum B C D, C D E bifariam [e] rectis lineis C F, D F; et a punĉto F, in quo conveniunt inter ſe C F, D F, ducantur rectæ lineæ F B, F A, F E. Quoniam igitur B C eſt æqualis C D, communis autem C F; duæ

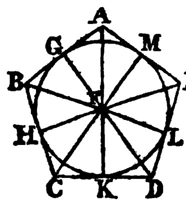


[e] 9. primi.

B C, C F duabus D C, C F æquales ſunt, et angulus B C F eſt æqualis angulo D C F. Baſis igitur B F baſi F D eſt [f] æqualis, et B F C triangulum æquale triangulo D C F, [f] 4. primi. et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur; angulus igitur C B F angulo C D F æqualis erit. Et quoniam angulus C D E anguli C D F eſt duplus, et angulus quidem C D E angulo A B C æqualis, angulus vero C D F angulo C B F æqualis; erit et C B A angulus duplus anguli C B F; ac propterea angulus A B F angulo C B F æqualis. Angulus igitur A B C bifariam ſectus eſt rectâ lineâ B F. Similiter demonſtrabitur unumquemque angulorum B A E, A E D rectis lineis A F, F E bifariam ſectum eſſe. A punĉto F ad rectas lineas A B, B C, C D, D E, E A ducantur [g] perpendiculares F G, F H, F K, F L, F M. [g] 12. primi. Et quoniam angulus H C F eſt æqualis angulo K C F; eſt autem et rectus F H C recto F K C æqualis: duo triangula F H C, F K C duos angulos duobus angulis æquales habent, et unum latus uni lateri æquale; commune ſcilicet utriſque F C, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia [h] habebunt; atque erit perpendicularis F H per- [h] 26. primi.

pendiculari

pendiculari F K æqualis. Similiter oftendetur et unaquæque ipfarum F L, F M, F G æqualis utrique F H, F K. Quinque igitur rectæ lineæ F G, F H, F K, F L, F M inter fe æquales funt. Quare centro F, intervallo autem unius ipfarum F G, F H, F K, F L, F M, circulus defcriptus etiam per reliqua tranfibit puncta, et rectas lineas A B, B C, C D, D E, E A continget; propterea quod anguli ad G, H, K, L, M recti funt. Si enim non continget, fed ipfas fecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet; quod abfurdum [i] effe oftenfum eft. Non igitur centro F, et intervallo uno ipforum punctorum G, H, K, L, M, circulus defcriptus rectas lineas A B, B C, C D, D E, E A fecabit. Quare ipfas contingat neceffe eft. Defcribatur ut G H K L M. In dato igitur pentagono, quod eft æquilaterum et æquiangulum, circulus defcriptus eft. *Q. E. F.*



[i] 16. tertii.

Cor. 1. * (Barrovii) Hinc fi duo anguli proximi figuræ cujufcunque æquilateræ et æquiangulæ medii dividantur; rectæ a puncto concurfûs dividentium ad reliquos figuræ angulos ductæ, reliquos medios dividunt.

Cor. 2. * (Clavii) Si duo anguli proximi figuræ cujufcunque æquilateræ et æquiangulæ medii dividantur; rectæ ex puncto concurfûs dividentium in latera figuræ ad perpendiculum deductæ, inter fe æquales erunt.

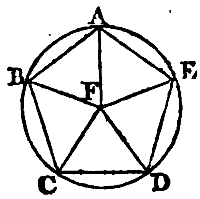
Cor. 3. * (Clavii) Eodem igitur modo in omni figurâ æquilaterâ et æquiangulâ circulus defcribendus eft.

[XIV.] PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum, quod æquilaterum et æquiangulum fit, circulum defcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum A B C D E. Oportet circa pentagonum A B C D E circulum defcribere. Secetur uterque ipforum B C D, C D E angulorum bifariam rectis lineis C F, F D; et a puncto F, in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B, A, E ducantur F B, F A, F E. Et unufquifque angulorum C B A, B A E, A E D rectis lineis B F, F A, F E bifariam fectus

[k] sectus erit. Et quoniam angulus B C D angulo C D E est[k] æqualis; atque est anguli quidem B C D dimidium angulus F C D, anguli vero C D E dimidium C D F; erit et F C D angulus æqualis angulo F D C; quare et latus C F lateri F D est æquale[l]. Similiter demonstrabitur et unaquæque ipsarum F B, F A, F E æqualis unicuique F C, F D. Quinque igitur rectæ lineæ F A, F B, F C, F D, F E inter se æquales sunt. Ergo centro F, et intervallo unius ipsarum F A, F B, F C, F D, F E, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum A B C D E, quod æquilaterum est et æquiangulum. Describatur, et sit A B C D E. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum et æquiangulum circulus descriptus est. *Q. E. F.*



[k] Cor. 1. * 13. hujus.

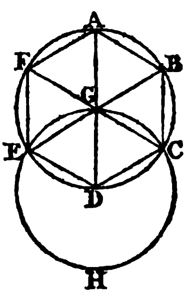
[l] 6. primi.

Cor. * (Clavii) Eodem prorsus modo circa quamlibet figuram æquilateram et æquiangulam circulus describendus est.

PROP. XV. PROBL. [XV.]

In dato circulo hexagonum æquilaterum et æquiangulum describere.

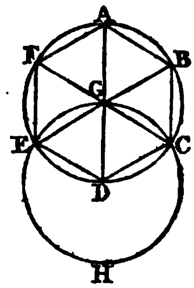
Sit datus circulus A B C D E F. Oportet in circuli A B C D E F hexagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Ducatur circuli A B C D E F diameter A D, sumaturque centrum circuli G; et centro quidem D, intervallo autem D G, circulus describatur E G C H. Junctæ E G, C G ad puncta B, F producantur, et jungantur A B, B C, C D, D E, E F, F A. Dico hexagonum A B C D E F æquilaterum et æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est A B C D E F circuli, erit G E ipsi G D æqualis. Rursus quoniam D centrum est circuli E G C H, erit D E æqualis eidem D G. Æquilaterum igitur est E G D triangulum; ideoque tres ipsius anguli E G D, G D E, D E G inter se æquales[m] sunt; et sunt trianguli tres anguli æquales[n] duobus rectis. Angulus igitur E G D duorum rectorum tertia pars est. Similiter ostendetur et D G C duorum rectorum



[m] Cor. 5. primi.

[n] 32. primi.

rectorum tertia pars. Et quoniam recta linea C G ſuper rectam E B inſiſtens, angulos, qui deinceps ſunt, E G C, C G B, duobus re-
[o 13. primi.] ctis æquales [o] efficit; erit et reliquus C G B tertia pars duorum rectorum. Anguli igitur E G D, D G C, C G B inter ſe ſunt æquales. Et qui ipſis ad verticem ſunt anguli B G A, A G F,
[p 18. primi.] F G E, æquales [p] ſunt angulis E G D, D G C, C G B. Quare ſex anguli E G D, D G C, C G B, B G A, A G F, F G E inter ſe æquales ſunt. Sed æquales



[q 26. tertii.] anguli æqualibus circumferentiis inſiſtunt [q]. Sex igitur circumferentiæ A B, B C, C D, D E, E F, F A inter ſe
[r 29. tertii.] ſunt æquales. Æquales autem circumferentias æquales [r] rectæ lineæ ſubtendunt. Ergo et ſex rectæ lineæ inter ſe æquales ſint neceſſe eſt, ac propterea æquilaterum eſt A B C D E F hexagonum. Dico et æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia A F circumferentiæ E D eſt æqualis, communis apponatur circumferentia A B C D: tota igitur F A B C D circumferentia æqualis eſt toti circumferentiæ E D C B A. Et circumferentiæ quidem F A B C D angulus F E D inſiſtit, circumferentiæ vero E D C B A in-
[s 27. tertii.] ſiſtit angulus A F E; angulus igitur A F E angulo D E F eſt [s] æqualis. Similiter oſtendentur et reliqui anguli hexagoni A B C D E F ſigillatim æquales utrique ipſorum A F E, F E D. Ergo æquiangulum eſt A B C D E F hexagonum. Oſtenſum autem eſt et æquilaterum eſſe; et deſcriptum eſt circulo A B C D E F. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum et æquiangulum deſcriptum eſt. *Q. E. F.*

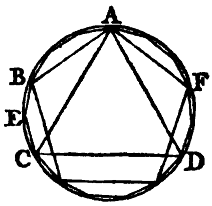
Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus ei, quæ eſt ex centro circuli, æquale eſſe; et ſi per puncta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum deſcribetur hexagonum æquilaterum et æquiangulum, conſequenter iis, quæ in pentagono dicta ſunt: et præterea ſimiliter in dato hexagono circulum inſcribemus, et circumſcribemus. *Q. E. F.*

PROP.

PROP. XVI. PROBL. [XVI.]

In dato circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B C D. Oportet in A B C D circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum deſcribere. Sit A C latus trianguli[t] quidem æquilateri, in ipſo circulo A B C D deſcripti; pentagoni[u] vero æquilateri latus A B. Quarum igitur partium eſt A B C D F circulus quindecim, earum circumferentia quidem A B C, tertia exiſtens circuli, erit quinque; circumferentia vero A B, quæ quinta eſt circuli, erit trium. Ergo reliqua B C eſt duarum. Secetur B C bifariam in puncto E[x]. Quare utraque ipſarum B E, E C circumferentiarum quintadecima pars eſt A B C D circuli. Si igitur jungentes B E, E C, æquales ipſis in continuum rectas lineas in circulo[y] A B C D aptemus, in ipſo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum deſcriptum erit. *Q. E. F.*



[t] 2. hujus.
[u] 11. hujus.
[x] 30. tertii.
[y] 1. hujus.

Similiter autem iis, quæ dicta ſunt in pentagono, ſi per circuli diviſiones, contingentes circulum ducamus, circa ipſum deſcribetur quindecagonum æquilaterum et æquiangulum; et inſuper dato quindecagono æquilatero et æquiangulo circulum inſcribemus, et circumſcribemus.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

Definitio I. [I.]

PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II. [II.]

Multiplex eſt major minoris, quando majorem minor metitur.

III. [III.]

Proportio ſeu ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis, ſecundum quantitatem mutua quædam habitudo.

IV. [IV.]

Proportionem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ ſe invicem ſuperare poſſunt.

V. [VIII.]

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

VI. [IX.]

Analogia vero in tribus ad minimum terminis conſiſtit.

VII. [V.]

In eâdem proportione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam et tertia ad quartam, quando primæ et tertiæ æquimultiplices, ſecundæ et quartæ æqui-

multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà ſuperant, vel unà æquales ſunt, vel unà deficiunt, inter ſe comparatæ.

[VI.] VIII.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Cor. * Manifeſtum eſt ex definitione ſeptimâ, ſi quatuor magnitudines ſint proportionales, et inverſe proportionales eſſe.

[VII.] IX.

Prima ad ſecundam major eſſe dicitur quam in proportione tertiæ ad quartam (vel ad ſecundam majorem proportionem habere quam tertia ad quartam) quando minor aliqua quam prima ad ſecundam proportionem habet eandem, quam tertia ad quartam.

[X.] X.

Quando tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam, duplicatam proportionem habere dicetur ejus, quam habet ad ſecundam.

[XI.] XI.

Quando autem quatuor magnitudines ſunt proportionales, prima ad quartam triplicatam habere proportionem dicetur ejus, quam habet ad ſecundam; et deinceps, uno ſemper amplius quoadusque analogia proceſſerit.

[XII.] XII.

Homologæ magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

[XIII.] XIII.

Alterna ſeu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, et conſequentis ad conſequentem.

[XIV.] XIV.

Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem ceu conſequentem.

[XV.] XV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis unà cum conſequente, tanquam unius, ad ipſam conſequentem.

[XVI.] XVI.

Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

XVII.

XVII. [XVII.]

Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

XVIII. [XVIII.]

Ex æquo, ſive ex æqualitate, ratio eſt, cum plures magnitudines extiterint, et aliæ, ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur et in eâdem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, eſt ſumptio extremarum, omiſſis mediis.

XIX. [XIX.]

Ordinata proportio eſt, quando fuerit ut antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

XX. [XX.]

Perturbata vero proportio eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus, et aliis, ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I. [I.]

Ejuſdem ſive æqualium æquimultiplices inter ſe æquales ſunt.

II. [II.]

Quarum eadem æquimultiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æquimultiplices, et ipſæ inter ſe ſunt æquales.

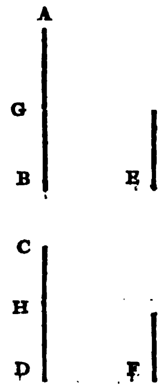
III. *

Inæqualium æquimultiplices ſunt inæquales, et major eſt majoris multiplex.

[I.] PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines A B, C D quotcunque magnitudinum E, F, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiplices. Dico quotuplex est A B ipsius E, totuplices esse et A B, C D simul ipsarum E, F simul. Quoniam enim A B æquimultiplex est ipsius E, ac C D ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales ipsi E, tot erunt et in C D æquales ipsi F. Dividatur A B quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint A G, G B; et C D dividatur in partes æquales ipsi F, videlicet C H, H D. Erit igitur multitudo partium C H, H D æqualis multitudini ipsarum A G, G B. Et quoniam A G est æqualis E, et C H æqualis F; erunt et A G, C H æquales ipsis E, F. Eâdem ratione, quoniam G B est æqualis E, et H D ipsi F; erunt G B, H D æquales ipsis E, F. Quot igitur sunt in A B æquales ipsi E, tot sunt et in A B, C D æquales ipsis E, F. Ergo quotuplex est A B ipsius E, totuplices erunt et A B, C D simul ipsarum E, F simul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt et omnes omnium. *Q. E. D.*

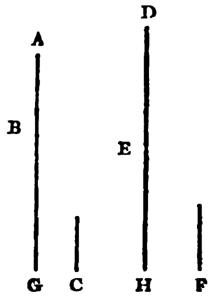


[II.] PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta secundæ æquimultiplex, ac sexta quartæ; erit etiam composita prima cum quintâ secundæ æquimultiplex, ac tertia cum sextâ quartæ.

Sit prima A B secundæ C æquimultiplex, ac tertia D E quartæ F. Sit autem et quinta B G secundæ C æquimultiplex, ac sexta E H quartæ F. Dico et compositam primam cum quintâ, scil. A G, secundæ C æquimultiplicem

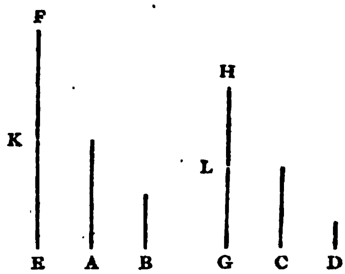
multiplicem esse, ac tertiam cum sextâ, sc. D H, quartæ F. Quoniam enim A B æquimultiplex est C, ac D E ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales C, tot erunt et in D E æquales F. Eâdem ratione et quot sunt in B G æquales C, tot et in E H erunt æquales F. Quot igitur sunt in totâ A G æquales C, tot erunt et in totâ D H æquales F. Ergo quotuplex est A G ipsius C, totuplex est et D H ipsius F. Et composita igitur prima cum quintâ A G secundæ C æquimultiplex erit, ac tertia cum sextâ D H quartæ F. Quare si prima secundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem et quinta secundæ æquimultiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima cum quintâ æquimultiplex secundæ, ac tertia cum sextâ quartæ. Q. E. D.



PROP. III. THEOR. [III.]

Si prima secundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ; sumantur autem æquimultiplices primæ et tertiæ; erit et, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æquimultiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æquimultiplex, ac tertia C quartæ D; et sumantur ipsarum A, C æquimultiplices E F, G H. Dico E F æquimultiplicem esse ipsius B, ac G H ipsius D. Quoniam enim E F æquimultiplex est ipsius A, ac G H ipsius C; quot magnitudines sunt in E F æquales A, tot erunt et in G H æquales C. Dividatur E F quidem in magnitudines ipsi A æquales E K, K F; G H vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet G L, L H. Erit igitur ipsarum E K, K F multitudo æqualis multitudini ipsarum G L, L H. Et quoniam æquimultiplex est A ipsius B, ac C ipsius D: æqualis autem E K ipsi A, et G L ipsi C; erit E K æquimultiplex ipsius B, ac G L ipsius D. Eâdem ratione æquimuiltiplex erit K F ipsius B, ac L H ipsius D.

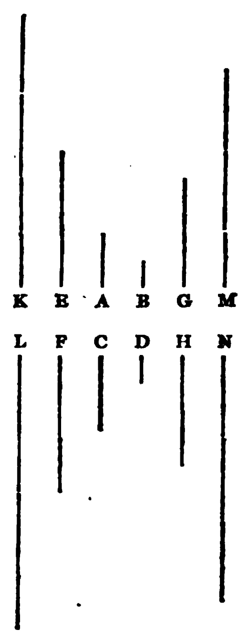


Quoniam igitur prima E K secundæ B æquimultiplex est, ac tertia G L quartæ D; est autem et quinta K F secundæ B æquimultiplex, ac sexta L H quartæ D: erit et composita prima cum quintâ E F secundæ B æquimulti- [a] 2. hujus. plex [a], ac tertia cum sextâ G H quartæ D. Si igitur prima secundæ fuerit æquimultiplex, ac tertia quartæ, sumantur autem primæ et tertiæ æquimultiplices; erit et, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æquimultiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. *Q. E. D.*

[IV.] PROP. IV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habet proportionem, quam tertia ad quartam; et æquimultiplices primæ et tertiæ ad æquimultiplices secundæ et quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D. Et sumantur ipsarum quidem A, C utcunque æquimultiplices E, F; ipsarum vero B, D aliæ utcunque æquimultiplices G, H. Dico E ad G ita esse ut F ad H. Sumantur rursus ipsarum E, F utcunque æquimultiplices K, L, et ipsarum G, H utcunque æquimultiplices M, N. Quoniam igitur E æquimultiplex est ipsius A, atque F ipsius C; sumuntur autem ipsarum E, F æquimultiplices K, L: [b] 3. hujus. erit K æquimultiplex [b] ipsius A, atque L ipsius C. Eâdem ratione M æquimultiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. Et quoniam est ut A ad B ita C ad D; sumptæ autem sunt ipsarum A, C æquimultiplices K, L; et ipsarum B, D [c] Def. 5. hujus. aliæ æquimultiplices M, N: si [c] K superat M, superabit et L ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Suntque K, L quidem ipsarum E, F utcunque æquimultiplices; M, N vero ipsarum G, H aliæ utcunque æquimultiplices.



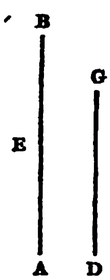
Ut

Ut igitur E ad G ita [d] erit F ad H. Quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; et æquimultiplices primæ ac tertiæ ad æquimultiplices secundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ. *Q. E. D.* [d] Def. 5.

PROP. V. THEOR. [V.]

Si magnitudo magnitudinis æquimultiplex sit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquæ æqumiultiplex erit, ac tota totius.

Magnitudo A B magnitudinis C D æquimultiplex sit, atque ablata A E ablatæ C F. Dico et reliquam E B reliquæ F D æquimultiplicem esse, atque totam A B totius C D. Quotuplex enim est A E ipsius C F, totuplex fiat et E B ipsius C G. Et quoniam A E æquimultiplex est C F, atque E B ipsius C G; erit [e] A B æquimultiplex C F, ac A B ipsius G F; ponitur autem æquimultiplex A B ipsius C F, ac A B ipsius C D. Æquimultiplex igitur est A B utriusque G F, C D; ac propterea G F ipsi C D est [f] æqualis. Communis auferatur C F. Reliqua igitur G C æqualis est reliquæ D F. Itaque quoniam A E æquimultiplex est C F, ac E B ipsius C G, estque C G æqualis D F; erit A E æquimultiplex C F, ac E B ipsius F D. Æquimultiplex autem ponitur A E ipsius C F, ac A B ipsius C D. Ergo E B est æquimultiplex F D, ac A B ipsius C D. Et reliqua igitur E B reliquæ F D æquimultiplex est, atque tota A B totius C D. Quare si magnitudo magnitudinis æquimultiplex sit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquæ erit æquimultiplex, ac tota totius. *Q. E. D.*



[e] 1. hujus.

[f] Ax. 2. hujus.

PROP. VI. THEOR. [VI.]

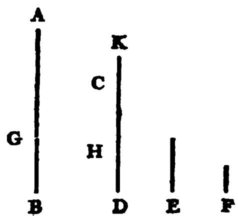
Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æquimultiplices sint, et ablatæ quædam sint earundem æquimultiplices; erunt et reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æquimultiplices.

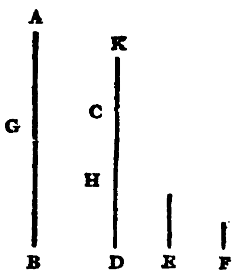
Duæ magnitudines A B, C D duarum magnitudinum E, F æquimultiplices sint; et ablatæ A G, C H earundem sint æquimultiplices. Dico et reliquas G B, H D vel ipsis

ipsis E, F æquales esse, vel ipsarum æquimultiplices. Sit enim primo G B æqualis E. Dico et H D ipsi F esse æqualem. Ponatur ipsi F æqualis C K. Et quoniam A G æquimultiplex est E, ac C H ipsius F; estque G B quidem æqualis E; C K vero æqualis F: erit A B æquimultiplex [g] E, ac K H ipsius F. Æquimultiplex autem ponitur A B ipsius E, ac C D ipsius F. Ergo K H æquimultiplex est F, ac C D ipsius F. Quoniam igitur utraque ipsarum K H, C D est æquimultiplex F, erit K H æqualis [h] C D. Communis auferatur C H. Ergo reliqua K C reliquæ H D est æqualis. Sed K C est æqualis F. Et H D igitur ipsi F est æqualis; ideoque G B ipsi E, et H D ipsi F æqualis erit. Similiter demonstrabimus si G B multiplex fuerit ipsius E, et H D ipsius F æquimultiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æquimultiplices sint, et ablatæ quædam sint earundem æquimultiplices; erunt et reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æquimultiplices. *Q. E. D.*

[g] 2. hujus.

[h] Ax. 1. hujus.





[VII. IX.]

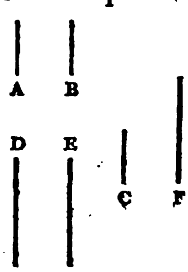
PROP. VII. THEOR.

Æqualium ad eandem eadem est proportio. Et æquales sunt, quarum ad eandem proportio eadem.

Sint æquales A, B, et ejusdem generis tertia quædam C. Dico A ad C eandem proportionem habere, quam B ad C.

Duarum A, B capiantur utcunque æquimultiplices D, E; et tertiæ C multiplex quælibet F. Æqualium A, B æquimultiplices D, E inter se sunt æquales[i]. Quare si D major sit quam F, et E eâdem F major erit. Si D, F inter se æquales sint, erunt E, F inter se æquales. Si D minor sit quam F, et E eâdem F minor erit. Æquales igitur

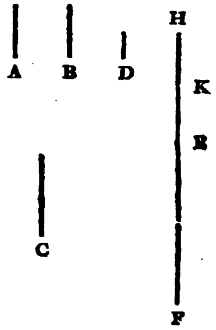
[i] Ax. 1. hujus.



A, B

A, B ad tertiam C eandem utraque proportionem habent[l]. [l] Def. 5. hujus.

Habeant jam A, B ad tertiam C eandem utraque proportionem. Dico A, B esse inter se æquales. Non enim. Altera igitur major. Major sit A: excessui autem ponatur D æqualis. Multiplicari potest magnitudo D, eo usque ut magnitudine C major evadat. Factam puta multiplicationem, et sit H E multiplex magnitudinis D, magnitudine C major. Capiatur E F toties multiplex magnitudinis B, quoties H E magnitudinis D. Quoniam magnitudo A magnitudinibus B, D simul æqualis est; erunt H F, F E magnitudinum A, B æquimultiplices[k]. Capiatur F K magnitudinis C multiplex, magnitudine F E proxime major. E K igitur non major est quam C. Ast E H major quam C[l]. Quare E H major quam E K. Additoque communi F E, H F major quam K F. F E autem minor est quam F K[l]. Sed cum A ad C eandem proportionem habeat, quam B ad C; magnitudines autem F E, F H magnitudinum A, B sint æquimultiplices, et F K multiplex sit ipsius C, et F H major sit quam F K; erit F E major quam F K[l]. Sed ostensa est minor. Simul igitur major et minor. Quod est absurdum. Non sunt igitur A et B inæquales. Æquales igitur. Æqualium igitur ad eandem &c. *Q. E. D.*



[k] 1. hujus.

[l] Per construct.

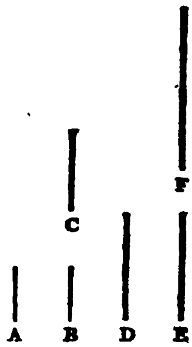
Cor. * Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus A et B, et ejusdem generis tertiâ aliquâ C; inveniri possunt magnitudinum A, B æquimultiplices tales, ut majoris multiplex multiplicem quandam magnitudinis C superet, cum minoris multiplex eâdem magnitudinis C multiplici minor sit.

PROP. VIII. THEOR. [VII. IX.]

Ejusdem ad æquales eadem est proportio. Et æquales sunt, ad quas ejusdem proportio est eadem.

Æquales sint A, B, et generis ejusdem sit tertia quævis C. Dico magnitudinem C ad utramque A, B eandem proportionem habere. Capiantur enim A et B æquimultiplices D, E; et magnitudinis C multiplex quælibet

quælibet F. Æquales erunt D, E, æqualium æqui-
[m] Ax. 1. hujus. multiplices [m]. Quare ſi F major ſit quam D, eadem F major erit quam E. Si F, D æquales ſint, æquales erunt F, E. Si F minor quam D, eadem F minor quam E. Magnitudo igitur C ad utramque æqualium A, B eandem proportionem
[n] Def. 5. hujus. habet [n]. Quod primum erat demonſtrandum.



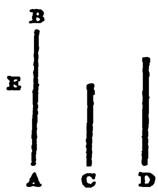
Habeat jam C ad utramque A, B proportionem eandem. Dico A, B æquales. Non enim. Inæquales igitur. Inveniri igitur poſſunt magnitudinum A, B iſtiuſmodi æquimultiplices, ut majoris multiplex multiplicem quandam magnitudinis C ſuperet, cum minoris multiplex eâdem
[o] Cor. [*] 7. hujus. magnitudinis C multiplici minor ſit [o]. Non eadem igitur erit magnitudinis C ad A, quæ ipſius ad B proportio. Quod hypotheſi contrarium eſt. Non ſunt igitur A, B inæquales. Æquales igitur. Quare ejuſdem ad æquales &c. *Q. E. D.*

[VIII. X.]

PROP. IX. THEOR.

Inæqualium major ad eandem majorem proportionem habet. Et major eſt, cujus proportio ad eandem major.

Inæqualium A B, C major ſit A B. Dico A B ad tertiam quamlibet D, ejuſdem generis, proportionem habere majorem, quam C ad eandem D habet. Capiatur A E illi C æqualis. Æquales igitur A E et C ad eandem D eandem proportionem ha-
[p] 7. hujus. bent [p]. Sed propter æquales A E, C, et C minorem quam A B, erit A E minor quam A B. Minor igitur quam A B habet ad D proportionem eandem, quam C ad D. Ergo A B ad D majorem habet proportionem
[q] Def. 7. hujus. quam C ad D [q].



Inæqualium autem A B, C, habeat A B ad tertiam aliquam homogeneam D majorem proportionem quam C ad D. Dico A B majorem quam C. Habet enim minor quædam quam A B ad D proportionem eam, quam C ad D [q]. Minor illa ſit A E. Æquales igitur ſunt

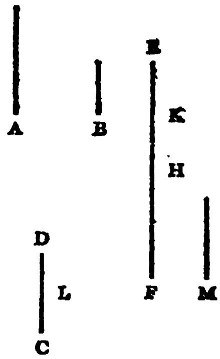
A E,

A E, C [r]. Quare A B, quæ major eſt quam A E, ejus [r] 9. hujus.
æquali C major erit. Quare inæqualium major &c.
Q. E. D.

PROP. X. THEOR. [VIII. X.]

Eadem ad inæqualium minorem majorem proportionem habet. Et minor eſt, ad quam ejuſdem proportio major.

Inæqualium A, B ſit B minor. Et ejuſdem generis ſit alia quævis C D. Dico C D ad B majorem proportionem habere quam ad A. Magnitudinum A, B capiantur æquimultiplices F E, F H; magnitudinis etiam C D multiplex F K, quæ minor ſit quam F E, major autem quam F H. Namque eo modo multiplices capi poſſunt [s]. Habeat C L ad B proportionem eam, quam C D ad A. Quoties autem F K multiplex eſt magnitudinis C D, toties ſit M illius C L. Jam cum C D ad A proportionem habeat, quam C L ad B; magnitudines autem F K, M primæ et tertiæ, C D et C L, ſint æquimultiplices, et F E, F H ſecundæ et quartæ A et B; F K autem minor ſit quam F E, idcirco M minor erit quam F H [t]. Multo igitur minor quam F K. Sunt autem M, F K magnitudinum C L, C D æquimultiplices: C L igitur minor erit quam C D [u]. Minor igitur quam C D habet ad B eandem, quam C D ad A proportionem: C D igitur majorem habet ad B quam ad A proportionem [x]. Quod primum erat demonſtrandum.



[s] Cor. • 7. hujus.

[t] Def. 5. hujus.

[u] Ax. 3. • hujus.

[x] Def. 7. hujus.

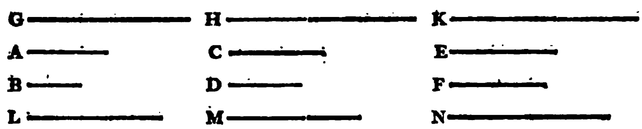
Habeat jam C D ad B proportionem majorem quam ad A. Dico B minorem quam A. Nam cum C D majorem habeat ad B quam ad A proportionem; minor aliqua quam C D habet ad B proportionem, quam C D ad A [x]. Sit minor illa C L. Inæqualium C D, C L capiantur F K, M æquimultiplices; et magnitudinis B multiplex quædam F H, quæ major ſit quam M, minor autem quam F K. Trium enim C D, C L, B eo modo capi poſſunt multiplices [s]. Quoties autem eſt F H multiplex ipſius B, toties ſit F E ipſius A. Jam cum C L ad B proportionem habeat eandem, quam C D ad A, et magnitudines M, F K primæ et tertiæ, C L et C D, ſint æqui-

æquimultiplices, necnon F H et F E fecundæ et quartæ B et A, harum autem M minor fit quam F H; erit F K minor quam F E. Quare F H multo minor quam F E: Sunt autem F H, F E magnitudinum B, A æquimulti-
γ Ax. 3. hujus. plices. Quare B minor eft quam A [γ]. Quare eadem ad inæqualium &c. *Q. E. D.*

[XI.] PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eædem funt proportiones, et inter fe eædem funt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D; ut autem C ad D ita E ad F. Dico ut A ad B ita effe E ad F. Sumantur enim



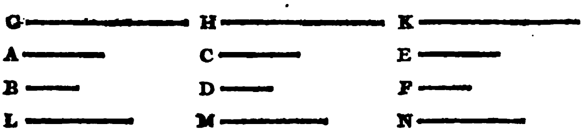
ipfarum quidem A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K; ipfarum vero B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N. Quoniam igitur eft ut A ad B ita C ad D; et fumptæ funt ipfarum A, C æquimultiplices G, H, et ip-
a Def. 5. hujus. farum B, D aliæ utcunque æquimultiplices L, M; fi [a] G fuperat L, et H ipfam M fuperabit; et fi æqualis, æqualis; et fi minor, minor. Rurfus quoniam eft ut C ad D ita E ad F; et fumptæ funt ipfarum C, E utcunqne æquimultiplices H, K, ipfarum vero D, F aliæ utcunque æquimultiplices M, N; fi [a] H fuperat M, et K ipfam N fuperabit; et fi æqualis, æqualis; et fi minor, minor. Sed fi H fuperat M, et G fuperabit L; et fi æqualis, æqualis; et fi minor, minor. Quare fi G fuperat L, et K ipfam N fuperabit; et fi æqualis, æqualis; et fi minor, minor. Et funt G, K quidem ipfarum A, E æquimultiplices; L, N vero ipfarum B, F aliæ utcunque æquimultiplices. Ergo [a] ut A ad B, ita erit E ad F. Quæ igitur eidem eædem funt proportiones, et inter fe eædem funt. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XII. THEOR. [XII.]

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes conſequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F, et ut A ad B, ita ſit C ad D, et E ad F. Dico ut A ad B, ita eſſe A, C, E, ad B, D, F. Sumantur enim



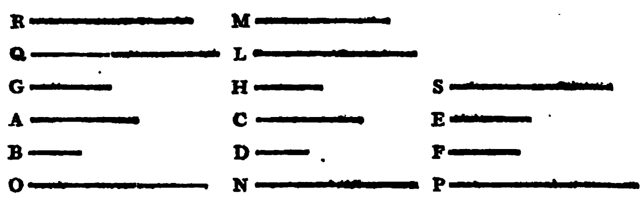
ipſarum A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K, et ipſarum B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N. Quoniam igitur ut A ad B, ita eſt C ad D, et E ad F; et ſumptæ ſunt ipſarum quidem A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K, ipſarum vero B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N; ſi [a] G ſuperat L, et H ipſam M [a] Def. 5. ſuperabit, et K ipſam N; et ſi æqualis, æqualis; et ſi hujus. minor, minor. Quare et ſi G ſuperat L, ſuperabunt et G, H, K ipſas L, M, N; et ſi æqualis, æquales; et ſi minor, minores. Suntque G, et G, H, K ipſarum A, et A, C, E æquimultiplices; quoniam ſi fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquimultiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices [b] erunt et [b] 1. hujus. omnes omnium. Et eâdem ratione L, et L, M, N ipſarum B, et B, D, F ſunt æquimultiplices. Eſt igitur [a] ut A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. Quare ſi quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes conſequentes. *Q. E. D.*

PROP.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: et prima ad secundam majorem habebit proportionem, quam quinta ad sextam.

Sit prima A ad secundam B ut tertia C ad quartam D. Tertia autem C major sit quam ut habeat ad quartam D proportionem eam, quam quinta E ad sextam F. Dico



primam A majorem esse quam ut habeat ad secundam B proportionem, quam quinta E ad sextam F. Habeat enim G ad B proportionem eam, quam E ad F. Propter C majorem quam ad D in ratione E ad F, minor aliqua quam C habet ad D proportionem eam, quam E ad F. Sit H minor illa. Inæqualium C, H capiantur L, M æquimultiplices; capiatur etiam N multiplex ipsius D, quæ major sit quam M, minor autem quam L. Trium enim C, H, D ita capi possunt multiplices [c]. Capiantur etiam Q, R, S magnitudinum A, G, E toties multiplices, quoties L, M magnitudinum sunt C, H. Capiantur denique O, P magnitudinum B, F toties multiplices, quoties N multiplex est ipsius D. Jam cum H sit ad D ut E ad F, harum autem primæ et tertiæ, H et E, sint M et S æquimultiplices; secundæ autem et quartæ, D et F, sint N, P æquimultiplices; cum præterea harum multiplicium M minor sit quam N, erit S minor quam P [d]. Rursum cum G sit ad B ut E ad F, harum autem primæ et tertiæ, G et E, sint R, S æquimultiplices, secundæ autem et quartæ, B et F, æquimultiplices sint O et P; cum præterea harum multiplicium S minor sit quam P (id enim modo ostensum) erit R minor quam O [d]. Rursum cum A sit ad B ut C ad D, harum autem primæ et tertiæ, A et

[c] Cor. * 7. hujus.

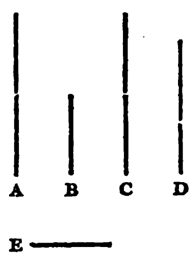
[d] Def. 5. hujus.

et C, sint Q, L æquimultiplices; secundæ autem et quartæ, B et D, æquimultiplices O et N; præterea cum harum multiplicium L major sit quam N, erit etiam Q major quam O [e]. Multo major igitur quam R, quæ ostensa est minor quam O. Magnitudinum autem A, G sunt illæ Q, R æquimultiplices. Quare A major est quam G [f]. Sed G habet ad B proportionem eam, quam E ad F. Major igitur A ad B quam in ratione E ad F. Quare si prima &c. *Q. E. D.*

[e] Def. 5. hujus.

[f] Ax. 3.* hujus.

*Cor.** Si prima ad secundam major sit quam in ratione tertiæ ad quartam, invertendo erit quarta ad tertiam major quam in proportione secundæ ad primam. Sit A ad B major quam in ratione C ad D. Dico D ad C majorem quam in ratione B ad A. Sit enim C ad E ut A ad B. Cum igitur C sit ad E ut A ad B, et A ad B major quam in ratione C ad D; erit C ad E major quam in proportione C ad D [g]. Quare E minor erit quam D [h]. Sed cum C ad E ut A ad B, invertendo erit E ad C ut B ad A [i]. Minor igitur quam D habet ad C proportionem eam, quam B ad A. *Q. E. D.*



[g] Per hanc Prop.

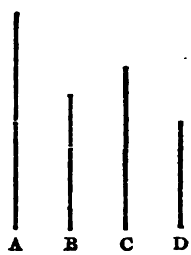
[h] 10. hujus.

[i] Cor.* Def. 8. hujus.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quam C. Dico et B quam D majorem esse. Quoniam enim A major est quam C, et alia est utcunque magnitudo B, habebit [k] A ad B majorem proportionem quam C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. Ergo et C ad D majorem habebit [l] proportionem quam C ad B. Ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [m] est. Quare D est minor



[k] 8. hujus.

[l] 13. hujus.

[m] 10. hujus.

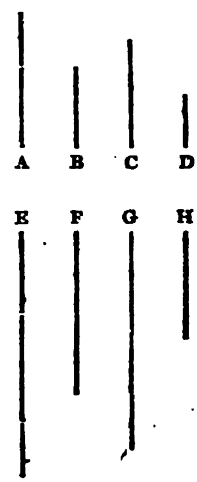
quam B; ac propterea B quam D major erit. Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C, et B ipsi D esse æqualem; et si A sit minor quam C, et B quam D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. *Q. E. D.*

SCHOLION.*

Subjungere visum est demonstrationem cognati Theorematis, quod mirum est Euclidem silentio præteriisse.

Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam, prima autem secundæ æqualis sit, erit et tertia æqualis quartæ. Quod si prima major sit quam secunda, erit et tertia major quam quarta; si minor, minor.

(Demonstratio Simsoni) Sit prima A ad secundam B, ut tertia C ad quartam D. Quatuor A, B, C, D capiantur E, F, G, H æquimultiplices.



Jam si æquales sint A et B, æquales erunt E et F, æqualium utique æquimultiplices [n]. Sed cum A sit ad B ut C ad D, primæ autem et tertiæ æquimultiplices sint, E, G, secundæ item et quartæ, F, G; cum præterea E ostensa sit æqualis ipsi F, erit G æqualis ipsi H [o]. Illæ autem G, H tertiæ et quartæ C, D sunt æquimultiplices. Æquales igitur sunt C et D [p].

[n] Ax. 1. hujus.
[o] Def. 5. hujus.
[p] Ax. 2. hujus.

Quod si A major sit quam B, erit E major quam F [q]. Quare [o] G major quam H. Sed G, H duarum C, D sunt æquimultiplices. Quare duarum major est C, cujus multiplex major [q].

[q] Ax. 3.* hujus.

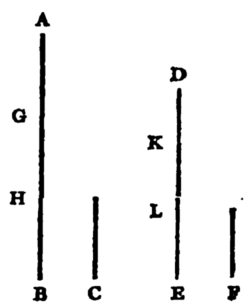
Simili modo ostendetur, si A minor sit quam B, minorem esse C quam D. Quare si prima &c. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Partes inter ſe comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æquimultiplices.

Sit enim A B æquimultiplex C, ac D E ipſius F. Dico ut C ad F, ita eſſe A B ad D E.

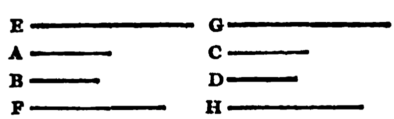


Quoniam enim æquimultiplex eſt A B ipſius C, ac D E ipſius F; quot magnitudines ſunt in A B æquales ipſi C, totidem erunt et in D E æquales F. Dividatur A B in magnitudines ipſi C æquales, quæ ſint A G, G H, H B; et D E dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in D K, K L, L E. Erit igitur ipſarum A G, G H, H B multitudo æqualis multitudini D K, K L, L E. Et quoniam æquales ſunt A G, G H, H B, ſuntque D K, K L, L E inter ſe æquales; ut A G ad D K, ita [r] erit G H ad K L, [r] 7. hujus.
et H B ad L F. Atque erit [s] ut una antecedentium ad [s] 12. hujus.
unam conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes: eſt igitur ut A G ad D K, ita A B ad D E. Sed A G ipſi C eſt æqualis, et D K ipſi F. Ergo ut C ad F, ita erit A B ad D E. Partes igitur inter ſe comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æquimultiplices. *Q. E. D.*

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

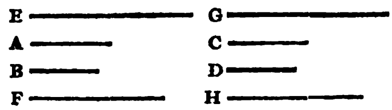
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines A, B, C, D; ſitque ut A ad B, ita C ad D.



Dico et permutatas proportionales eſſe, videlicet ut A ad C, ita eſſe B ad D. Sumantur enim ipſarum quidem A, B utcunque æquimultiplices E, F; ipſarum vero C, D aliæ utcunque æquimultiplices G, H. Et quoniam æquimultiplex eſt E ipſius A, ac F ipſius B: partes autem inter ſe comparatæ eandem habent [t] pro- [t] 15. hujus.
portionem

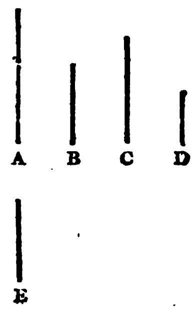
portionem, quam habent earum æquimultiplices; erit ut A ad B ita E ad F.



Ut autem A ad B ita C ad D. Ergo
[u] 11. hujus. et ut C ad D ita [u] E ad F. Rursus quoniam G, H sunt ipsarum C, D æquimultiplices, partes autem eandem proportionem habent, inter se comparatæ,
[x] 15. hujus. quam habent earum æquimultiplices; erit [x] ut C ad D ita G ad H. Sed ut C ad D ita E ad F. Ergo et ut E ad F ita G ad H. Quod si quatuor magnitudines pro-
[y] 14. hujus. portionales sint, prima autem major [y] sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur E superat G, et F ipsam H superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor; suntque E, F ipsarum A, B utcunque æquimultiplices, et G, H ipsarum C, D aliæ utcunque æquimultiplices;
[z] Def. 5. ergo [z] ut A ad C ita erit B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

*Cor.** Si prima ad secundam major sit quam in proportione tertiæ ad quartam; permutando prima ad tertiam major erit quam in ratione secundæ ad quartam.

Sit A major quam ad B in ratione C ad D. Dico permutando A majorem esse quam ad C in ratione B ad D. Quoniam enim A major est quam ad B in ratione C ad D; erit minor aliqua quam A ad B ut C ad D: sit E minor illa. Cum igitur sit E ad B ut C ad D; permutando erit
[a] Per hanc Prop. E ad C, ut B ad D [a]. Minor igitur quam A habet ad C proportionem eam, quam B ad D. Quare major A quam ad
[b] Def. 7. hujus. C in proportione B ad D [b]. *Q. E. D.*

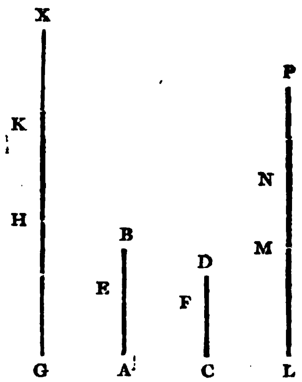


PROP.

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si compoſitæ magnitudines ſint proportionales, et diviſæ proportionales erunt.

Sint compoſitæ magnitudines proportionales A B, B E, C D, D F; hoc eſt, ut A B ad B E, ita ſit C D ad D F. Dico etiam diviſas proportionales eſſe; videlicet ut A E ad E B ita eſſe C F ad F D. Sumantur enim ipſarum quidem A E, E B, C F, F D utcunque æquimultiplices G H, H K, L M, M N; ipſarum vero E B, F D aliæ utcunque æquimultiplices K X, N P. Quoniam æquimultiplex eſt G H ipſius A E, ac H K ipſius E B; erit [c] G H ipſius A E æquimultiplex, ac G K ipſius A B. Æquimultiplex autem eſt G H ipſius A E, ac L M ipſius C F. Ergo G K æquimultiplex eſt A B, ac L M ipſius C F. Rurſus quoniam æquimultiplex eſt L M ipſius C F, ac M N ipſius F D; erit [c] L M æquimultiplex C F, ac L N ipſius C D. Sed æquimultiplex erat L M ipſius C F, ac G K ipſius A B. Æquimultiplex igitur eſt G K ipſius A B, ac L N ipſius C D. Quare G K, L N ipſarum A B, C D æquimultiplices erunt. Rurſus quoniam æquimultiplex eſt H K ipſius E B, ac M N ipſius F D: eſt autem et K X ipſius E B æquimultiplex, ac N P ipſius F D; et compoſita H X ipſius E B æquimultiplex eſt [d], ac M P ipſius F D. Quare cum ſit ut A B ad B E, ita C D ad D F; et ſumptæ ſint ipſarum quidem A B, C D æquimultiplices G K, L N, ipſarum vero E B, F D aliæ utcunque æquimultiplices H X, M P: ſi [e] G K ſuperat H X, et L N ſuperabit M P; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Superet igitur G K ipſam H X; communique ablatâ H K, et G H ipſam K X ſuperabit. Sed ſi G K ſuperat H X, et L N ſuperat M P; itaque ſuperat L N ipſam M P: communique M N ablatâ, et L M ſuperabit N P. Quare ſi G H ſuperat K X, et L M ipſam N P ſuperabit. Similiter demonſtrabimus et ſi G H ſit æqualis



[c] 1. hujus.

[d] 2. hujus.

[e] Def. 5. hujus.

K X, et L M ipsi N P esse æqualem; et si minor, minorem. Sunt autem G H, L M ipsarum A E, C F utcunque æquimultiplices, et ipsarum E B, F D aliæ utcunque æquimultiplices K X, N P. Ergo [f] ut A E ad E B ita erit C F ad F D. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, et divisæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

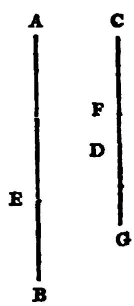
[f] Def. 5. hujus.

Cor. * Si prima et secunda simul ad secundam major sit quam in proportione tertiæ et quartæ simul ad quartam; dividendo prima ad secundam major est quam in proportione tertiæ ad quartam.

[XVIII.]

PROP. XVIII. THEOR.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, et compositæ proportionales erunt.



Sint divisæ magnitudines proportionales A E, E B, C F, F D; hoc est ut A E ad E B, ita C F ad F D. Dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut A B ad B E, ita esse C D ad D F. Nam ut A B ad B E, ita sit G F ad F D. Et quoniam est ut A B ad B E, ita G F ad F D, compositæ magnitudines sunt proportionales; ergo et divisæ proportionales erunt [g]. Est igitur ut A E ad E B, ita G D ad D F. Ponitur autem ut A E ad E B, ita C F ad F D. Quare et [h] ut G D ad D F, ita C F ad F D. Duarum igitur G D, C F ad eandem F D eadem est proportio. Æquales igitur inter se sunt G D, C F [i]. Additâque communi D F erunt G F, C D inter se æquales. Æqualium autem G F, C D ad eandem F D proportio eadem [k]. Erit igitur C D ad D F ut G F ad F D. Sed G F est ad F D ut A B ad B E. Quare A B ad B E ut C D ad D F. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, et compositæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

[g] 17. hujus.
[h] 11. hujus.
[i] 9. hujus.
[k] 7. hujus.

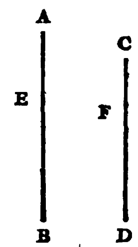
Cor. * Si prima ad secundam major sit quam in proportione tertiæ ad quartam; componendo, prima et secunda simul ad secundam major est quam in ratione tertiæ et quartæ simul ad quartam.

PROP.

PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam.

Sit enim ut tota A B ad totam C D, ita ablata A E ad ablatam C F. Dico et reliquam E B ad reliquam F D ita esse ut tota A B ad totam C D. Quoniam enim est ut tota A B ad totam C D, ita A E ad C F; et permutando erit[k] ut A B ad A E, ita C D ad C F. Quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, et divisæ proportionales erunt[l]; ut igitur B E ad E A, ita D F ad F C: rursusque permutando ut[k] B E ad D F, ita E A ad F C. Sed ut E A ad C F, ita posita est A B ad C D. Et reliqua[m] igitur E B erit ad reliquam F D, ut tota A B ad totam C D. Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam. *Q. E. D.*



[k] 16. hujus.
[l] 17. hujus.
[m] 11. hujus.

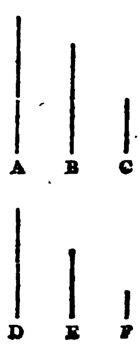
Cor. Si quatuor magnitudines proportionales sint, per conversionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut A B ad B E ita C D ad D F. Dividendo erit A E ad E B ut C F ad F D[l]. Et invertendo B E ad E A ut D F ad F C[n]. Quare componendo B A ad A E ut D C ad C F[o].

[n] Cor.* Def. 8. hujus.
[o] 18. hujus.

PROP. XX. THEOR. [XX.]

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione; ex æquali autem prima major sit, quam tertia: et quarta quam sexta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliæ ipsis numero æquales D, E, F, binæ sumptæ, sint in eâdem proportione: id est, sit ut A ad B, ita D ad E, et ut B ad C, ita E ad F: ex æquali autem major sit A quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Quoniam enim A major est quam C, alia vero est utcunque B, et major ad eandem majorem habet[p] proportionem quam minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. Sed ut A ad B, ita D ad



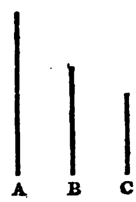
[p] 8. hujus.

D ad E; et invertendo ut C ad B, ita F ad E. Ergo
[p] 13. hujus. et D ad E majorem habet proportionem quam F ad E[p].
Proportionem vero ad eandem habentium, quæ majorem
[q] 10. hujus. habet, illa major[q] eſt. Major igitur eſt D quam F. Similiter oſtendemus et ſi A ſit æqualis C, et D ipſi F æqualem eſſe; et ſi minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur et in eâdem proportione: ex æquali autem prima major ſit quam tertia; et quarta quam ſexta major erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. *Q. E. D.*

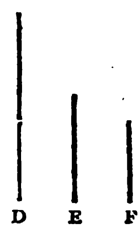
[XXI.] PROP. XXI. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur et in eâdem proportione; ſit autem perturbata earum analogia; et ex æquali prima major ſit quam tertia: et quarta quam ſexta major erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales A, B, C, et aliæ ipſis numero æquales D, E, F; quæ, binæ ſumptæ, in eâdem ſint proportione. Sit autem perturbata earum analogia; videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; et ex æquali A major ſit quam C. Dico et D quam F majorem eſſe; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem.



Quoniam enim major eſt A quam C, alia
[r] 8. hujus. vero eſt B; habebit[r] A ad B majorem proportionem quam C ad B. Sed ut A ad B, ita E ad F; et invertendo ut C ad B, ita E ad D. Quare et E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. Ad quam vero eadem majorem proportionem habet,
[s] 10. hujus. illa minor eſt[s]. Minor igitur eſt F quam D; ac propterea D quam F major erit.



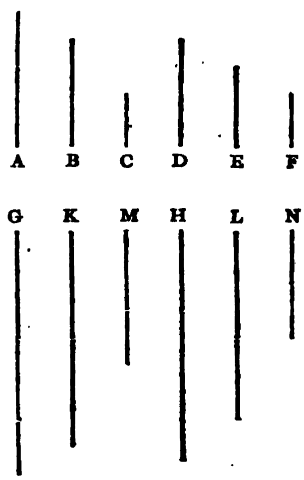
Similiter oſtendemus et ſi A ſit æqualis C, et D ipſi F eſſe æqualem; et ſi minor, minorem. Si igitur ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ ſumantur et in eâdem proportione; ſit autem perturbata earum analogia; et ex æquali autem prima major ſit quam tertia: et quarta quam ſexta major erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXII. THEOR. [XXII.]

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione; et ex æquali in eâdem proportione erunt.

Sint quotcunque magnitudines A, B, C, et aliæ ipsis numero æquales D, E, F, binæ sumptæ in eâdem proportione; hoc est, ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ex æquali in eâdem proportione esse, ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipsarum quidem A, D utcunque æquimultiplices G, H; ipsarum vero B, E aliæ utcunque æquimultiplices K, L, et ipsarum C, F aliæ utcunque æquimultiplices M, N. Quoniam igitur est ut A ad B, ita D ad E, et sumptæ sunt ipsarum A, D æquimultiplices G, H, et ipsarum B, E aliæ utcunque æquimultiplices K, L; erit ut[t] G ad K, ita H ad L. Eâdem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. Et cum sint tres magnitudines G, K, M, et aliæ ipsis numero æquales H, L, N, binæ sumptæ et in eâdem proportione; ex æquali[u] si G superat M, et H ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Suntque G, H ipsarum A, D æquimultiplices, et M, N ipsarum C, F aliæ utcunque æquimultiplices. Ut igitur A ad C, ita erit[w] D ad F. Quare si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione, et ex æquali in eâdem proportione erunt. *Q. E. D.*

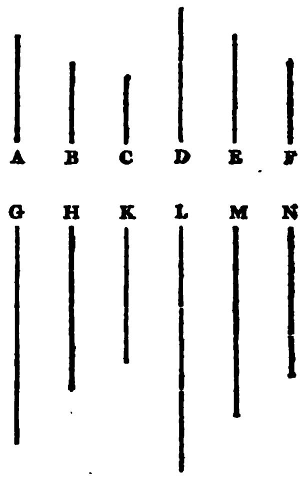


[t] 4. hujus.
[u] 20. hujus.
[w] Def. 5. hujus.

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione; sit autem perturbata earum analogia: et ex æquali in eâdem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliæ ipsis numero æquales, binæ sumptæ in eâdem proportione, D, E, F; sit autem perturbata earum analogia, hoc est, sit ut A ad B, ita E ad F, et ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita esse D ad F. Sumantur ipsarum quidem A, B, D utcunque æquimultiplices G, H, L: ipsarum vero C, E, F aliæ utcunque æquimultiplices K, M, N. Et quoniam G, H æquimultiplices sunt ipsarum A, B, partes autem eandem habent proportionem, quam habent ipsarum æqui-



[x] 15. hujus. multiplices: erit [x] ut A ad B, ita G ad H. Et simili ratione ut E ad F, ita M ad N.

[y] 11. hujus. Atque est ut A ad B, ita E ad F. Ut [y] igitur G ad H, ita M ad N. Rursus quoniam est ut B ad C, ita D ad E, et sumptæ sunt ipsarum B, D æquimultiplices H, L, ipsarum vero C, E aliæ utcunque æquimultiplices K, M: erit ut H ad K, ita L ad M. Ostensum autem est et ut G ad H, ita esse M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines sunt G, H, K, et aliæ ipsis numero æquales L, M, N, binæ sumptæ in eâdem proportione,

[z] 21. hujus. estque ipsarum perturbata analogia; ex æquali, si [z] G superat K, et L ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sunt autem G, L ipsarum A, D æquimultiplices; et K, N æquimultiplices ipsarum

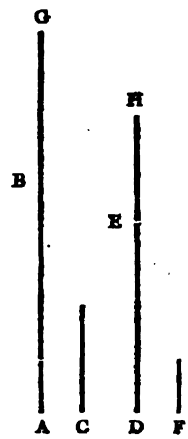
[a] Def. 5. hujus. C, F. Ut igitur [a] A ad C, ita erit D ad F. Quare si fuerint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione, sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali in eâdem proportione erunt. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam; et composita prima cum quintâ ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sextâ ad quartam.

Prima A B ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia D E ad quartam F. Habeat autem et quinta B G ad secundam C proportionem eandem, quam sexta E H ad quartam F. Dico et compositam primam cum quintâ A G ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum sextâ D H ad quartam F. Quoniam enim est ut B G ad C, ita E H ad F; erit invertendo ut C ad B G, ita F ad E H. Et quoniam ut A B ad C, ita est D E ad F: ut autem C ad B G, ita F ad E H; erit[b], ex æquali, ut A B ad B G, ita D E ad E H. Quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, et compositæ proportionales[c] erunt. Ut igitur A G ad G B, ita est D H ad H E. Sed et ut [d] G B ad C, ita H E ad F. Ergo, ex [b] æquali, ut A G ad C, ita erit D H ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam; et composita prima cum quintâ ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sextâ ad quartam. *Q. E. D.*



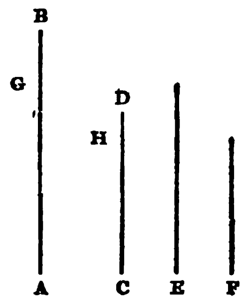
[b] 22. hujus.
[c] 18. hujus.
[d] Hypoth.

PROP.

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales; maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, E, F; et sit ut A B ad C D, ita E ad F. Sit autem maxima ipsarum A B, et F minima. Dico A B et F ipsis C D, E majores esse. Ponatur enim ipsi quidem E æqualis A G, ipsi vero F æqualis C H. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E ad F; estque A G æqualis E, et C H æqualis F; erit ut A B ad D C, ita A G ad C H. Et quoniam ut tota A B ad totam C D, ita ablata A G ad ablatam C H; et reliqua G B ad reliquam H D erit



[e] 19. hujus. [e] ut tota A B ad C D totam. Et permutando G B ad A B
[f] 16. hujus. ad H D ad C D [f]. Major autem est A B quam C D. Ergo
[g] 14. hujus. et G B quam H D major erit [g]. Quod cum A G sit æqualis ipsi E, et C H ipsi F; erunt A G et F ipsi C H et E æquales. Si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. Ergo G B, H D inæqualibus existentibus, quippe cum G B sit major, si ipsi quidem G B addantur A G et F, ipsi vero H D addantur C H et E: fient A B et F ipsis C D et E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales; maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt. *Q. E. D.*

EUCLIDIS

EUCLIDIS

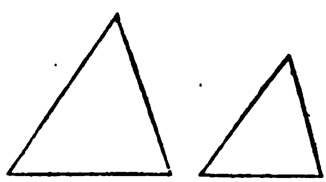
ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

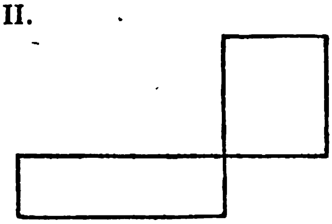
DEFINITIO I.

SIMILES figuræ rectilineæ ſunt, quæ et ſingulos angulos æquales habent, et circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ ſunt, quando in utrâque figurâ antecedentes, et conſequentes rationum fuerint termini.

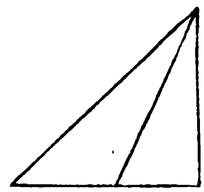


III.

Extremâ ac mediâ ratione ſecari recta linea dicitur, quando ſit ut tota ad majus ſegmentum, ita majus ſegmentum ad minus.

IV.

IV.



Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis, quæ a vertice ad basim ducitur.

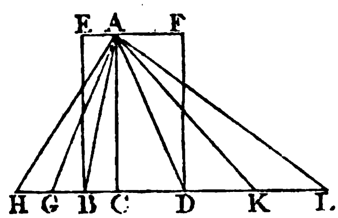
V.

Si fuerint plures magnitudines ejusdem generis, ratio primæ ad ultimam componi dicitur ex rationibus omnibus intermediis.

[I.] PROPOSITIO I. THEOREMA.

Triangula, et parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem A B C, A C D, parallelogramma vero E C, C F, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem a puncto A ad B D ductam. Dico ut basis B C ad C D basim, ita esse triangulum A B C ad triangulum A C D, et parallelogrammum E C ad C F parallelogrammum.



Producatur B D ex utrâque parte ad puncta H, L; et ipsi quidem B C basi æquales quotcunque ponantur B G, G H; ipsi vero basi C D ponantur quotcunque æquales D K, K L; et A G, A H, A K, A L jungantur. Quoniam igitur C B, B G, G H inter se æquales sunt, erunt et tri-
a 38. primi. angula A H G, A G B, A B C inter [a] se æqualia. Ergo quotuplex est basis H C ipsius B C basis, totuplex est A H C triangulum trianguli A B C. Eâdem ratione quotuplex est L C basis ipsius basis C D, totuplex est et triangulum A L C ipsius A C D trianguli; et si æqualis est H C basis basi C L, et triangulum A H C triangulo A L C est [a] æquale; et si basis H C basim C L superat, et triangulum A H C superabit triangulum A L C; et si minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus B C, C D, et duobus triangulis A B C, A C D, sumpta sunt æquimultiplicia basis quidem B C, et A B C trianguli, videlicet basis H C, et A H C triangulum:

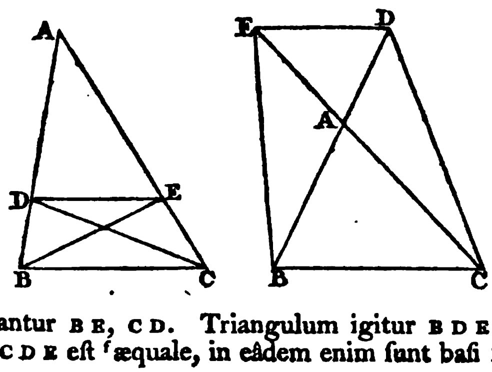
angulum: basis vero C D, et trianguli A C D, alia utcunque æquimultiplicia, nempe C L basis, et A L C triangulum; atque ostensum est, si H C basis basim C L superat, et triangulum A H C superare triangulum A L C; et si æqualis, æquale; et si minor, minus. Est igitur [b] ut B C basis ad basim C D, ita triangulum A B C ad A C D triangulum. Et quoniam trianguli A B C duplum est [c] parallelogrammum E C, et trianguli A C D parallelogrammum F C duplum [d], partes autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut A B C triangulum ad triangulum A C D, ita parallelogrammum E C ad C F parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, ut basis B C ad C D basim, ita esse A B C triangulum ad triangulum A C D; ut autem A B C triangulum ad triangulum A C D, ita parallelogrammum E C ad C F parallelogrammum; erit [e] ut B C basis ad basim C D, ita parallelogrammum E C ad F C parallelogrammum. Quare triangula, et parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

[b] Def. 5. quinti.
[c] 41. primi.
[d] 15. quinti.
[e] 11. quinti.

PROP. II. THEOR. [II.]

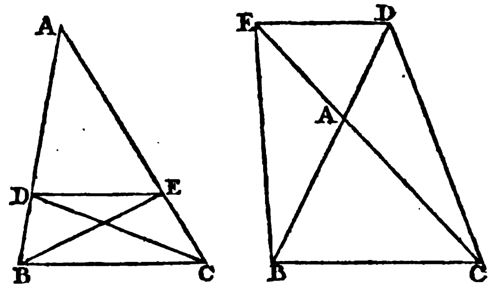
Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim A B C uni laterum B C parallela ducatur D E. Dico ut D B ad D A, ita esse C E ad E A.



Jungantur B E, C D. Triangulum igitur B D E triangulo C D E est [f] æquale, in eâdem enim sunt basi D E, et in

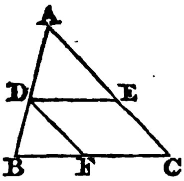
[f] 37. primi.

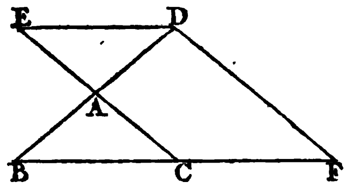


in eisdem D E et B C parallelis; aliud autem triangulum est A D E: sed æqualia ad idem eandem habent [g] proportionem; ergo ut triangulum B D E ad triangulum A D E, ita est C D E triangulum ad triangulum A D E. Ut autem triangulum B D E ad triangulum A D E, ita [h] est B D ad D A; nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem a puncto E ad A B ductam, inter se sunt ut bases. Et ob eandem causam ut C D E triangulum ad triangulum A D E, ita C E ad E A. Et igitur ut B D ad D A, ita est [i] C E ad E A. Et si trianguli A B C latera A B, A C proportionaliter secta sint, *i. e.* si ut B D ad D A, ita sit C E ad E A; et jungatur D E: dico D E ipsi B C parallelam esse. Iisdem constructis, quoniam est ut B D ad D A, ita C E ad E A; ut autem B D ad D A, ita [h] est B D E triangulum ad triangulum A D E; et ut C E ad E A, ita C D E triangulum [h] ad triangulum A D E, erit ut triangulum B D E ad triangulum A D E, ita [i] C D E triangulum ad triangulum A D E. Quod cum utrumque triangulorum B D E, C D E ad triangulum A D E eandem habeat proportionem; erit B D E triangulum [k] triangulo C D E æquale; et sunt in eâdem basi D E. Æqualia autem triangula, et in eâdem basi constituta, etiam in eisdem [l] sunt parallelis. Ergo D E ipsi B C parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. *Q. E. D.*

[g] 7. quinti.
[h] 1. hujus.
[i] 11. quinti.
[k] 9. quinti.
[l] 39. primi.

Cor. * Recta D E, basi trianguli A B C parallela, lateribus A B, A C (si opus sit productis) in punctis D, E occurrens triangulum A D E constituit triangulo A B C simile, et homologa





mologa ſunt latera, quæ ſunt in eâdem rectâ. Et ſi recta D E, lateribus trianguli A B C in punctis D, E occurrens, conſtituat triangulum A D E ipſi A B C ſimile, et latera homologa ſint in eâdem rectâ; recta D E baſi B C parallela erit. Angulus enim A triangulis duobus B A C, D A E communis eſt. Et ſi D E baſi B C parallela ſit, erit angulus A D E angulo A B C, necnon A E D angulus angulo A C B, æqualis [m]. Æquiangula igitur ſunt triangula A B C, A D E. Et cum B D ſit ad D A ut C E ad E A [n], componendo vel dividendo, erit B A ad A D ut C A ad A E [o]. Permutando B A ad A C ut A D ad A E. Triangulorum igitur B A C, D A E latera, circa angulum communem A, ſunt proportionalia. Agatur jam per punctum D recta D F, ipſi A C parallela, quæ baſi B C (ſi opus ſit productæ) in F occurrat. Erit B F ad F C ut B D ad D A [n]. Componendo igitur vel dividendo, B C ad C F ut B A ad A D [o]. Figura autem D E C F eſt parallelogrammum. Recta igitur F C rectæ D E æqualis eſt [p]. Rectæ igitur B C ad E D eadem, quæ ad F C, eſt proportio [q]. Quare B C ad D E ut B A ad A D [r]. Permutando B C ad B A ut D E ad A D [s]. Triangulorum igitur A B C, A D E latera, circa angulos æquales A B C, A D E, ſunt proportionalia. Denique cum B C ſit ad B A ut D E ad D A, et B A ad A C ut D A ad A E (id enim prius oſtenſum) ex æquo erit B C ad A C ut D E ad A E. Triangulorum igitur A B C, A D E latera, circa æquales angulos A C B, A E D, ſunt proportionalia. Triangula igitur A B C, A D E ſunt æquiangula, et latera circa æquales angulos proportionalia habent. Similia igitur ſunt triangula A B C, A D E, et latera ſunt homologa, quæ in eâdem ſunt rectâ. Quod primum demonſtrandum erat.

[m] 29. primi.
[n] Per hanc Prop.
[o] 18. vel 17. quinti.
[p] 34. primi.
[q] 7. quinti.
[r] 11. quinti.
[s] 16. quinti.

Jam vero recta D E, lateribus trianguli A B C in punctis D, E occurrens, conſtituat triangulum A D E ſimile triangulo A B C, et homologa ſint latera, quæ ſunt in eâdem rectâ. Nempe A B ad A D, ut A C ad A E. Dico rectam D E

 trianguli

trianguli A B C basi B C esse parallelam. Nam cum similia sint triangula A B C, A D E, æquiangula erunt. Et æquales erunt anguli, circa quos latera sunt proportionalia [t]. Angulus igitur A D E angulo A B C æqualis. Recta igitur D E rectæ B C parallela [u]. *Q. E. D.*

[t] Def. 1. hujus.
[u] 28. primi.

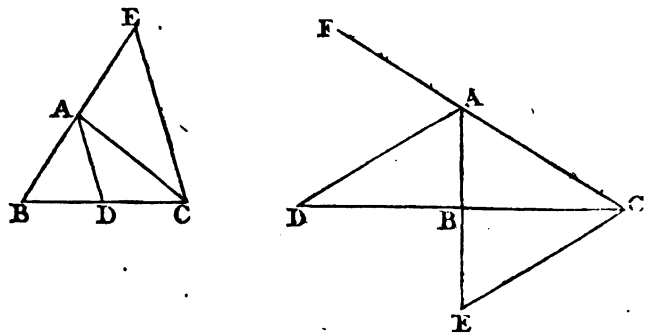
[III.]

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera; et si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum A B C; et secetur angulus B A C (vel externus B A F) bifariam [x] rectâ lineâ A D. Dico ut B D ad D C, ita esse B A ad A C. Ducatur per C ipsi D A pa-

[x] 9. primi.



rallela [y] C E, et producta B A conveniat cum ipsâ in E puncto. Quoniam igitur in parallelas A D, E C incidit recta linea quædam A C; erit [z] A C E angulus angulo C A D (vel adjacenti D A F, si externus sit angulus, quem A D medium dividit) æqualis. Sed C A D angulus (vel D A F) ponitur æqualis angulo B A D. Ergo et B A D ipsi A C E angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas A D, E C recta linea B A E incidit, angulus B A D æqualis est A E C. Ostensus autem est et angulus A C E angulo B A D æqualis. Ergo et A C E ipsi A E C æqualis erit: ac propterea latus A E æquale [a] lateri A C. Et quoniam uni laterum trianguli B C E, videlicet ipsi E C, parallela ducta est A D; erit [b] ut B D ad D C, ita B A ad A E; æqualis autem

[y] 31. primi.
[z] 29. primi.
[a] 6. primi.
[b] 2. hujus.

autem eſt A E ipſi A C. Eſt igitur[e] ut B D ad D C, ita e 7. quinti.
B A ad A C. Et ſi ſit ut B D ad D C, ita B A ad A C,
et A D jungatur; dico angulum B A C (vel externum
B A F, ſi punctum D ſit extra triangulum) bifariam ſe-
ctum eſſe rectâ lineâ A D. Iiſdem enim conſtructis,
quoniam eſt ut B D ad D C, ita B A ad A C; ſed et ut B D
ad D C, ita[d] B A ad A E, etenim uni laterum trianguli B C E, d 2. hujus.
videlicet ipſi E C, parallela ducta eſt A D; erit et ut B A e 11. quinti.
ad A C, ita B A ad A E[e]. Ergo A C eſt [f] æqualis A E; ac f 9. quinti.
propterea, et angulus A E C angulo E C A æqualis[g]. Sed g 5. primi.
angulus quidem A E C eſt æqualis[h] angulo B A D; an- h 29. primi.
gulus vero A C E æqualis[h] C A D (vel D A F.) Quare et
B A D angulus ipſi C A D (vel D A F) æqualis erit. Angulus igitur B A C (vel externus B A F) bifariam ſectus eſt rectâ lineâ A D. Ergo ſi trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea etiam baſim ſecet; baſis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. Et ſi baſis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ a vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit. *Q. E. D.*

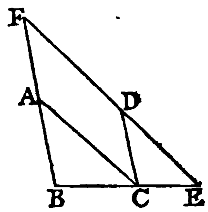
SCHOLION.*

Hanc propoſitionem tam de externis, quam internis triangulorum angulis accepiſſe veteres, certiſſimum eſt. Quorum utique nemo eam de externo demonſtrare aggreſſus eſt; tanquam ab Euclide demonſtratam uſurpant omnes. Neque minus generaliter accipiendam eſſe Euclides ipſe ſignificavit, cum tali eam conditione ſubjecerit, ἐὰν ἡ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν. Quaſi illud perſpectum habuerit, rectam, quæ angulum dividat, non ſemper occurſuram baſi. Atqui baſi nequit non occurrere, quæ internum dividit. Quæ medium dividit externum, ita baſi occurret, ſi crura trianguli inæqualia ſint. Nam ſi iſoſceles fuerit triangulum, quæ angulum, qui ad verticem externus eſt, medium dividit linea recta, baſi parallela erit.

 PROP.

[IV.] PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos ſunt, proportionalia ſunt; et homologa, ſive ejuſdem nominis, ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

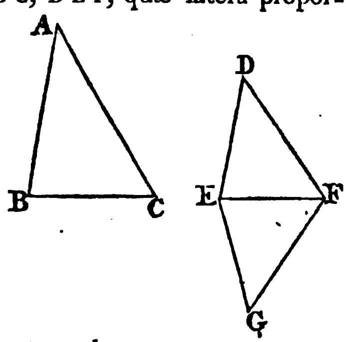


Sint æquiangula triangula A B C, D C E, quæ angulum quidem A B C angulo D C E, angulum vero A C B angulo D E C æqualem habeant, et præterea angulum B A C angulo C D E. Dico triangulorum A B C, D C E proportionalia eſſe latera, quæ ſunt circa æquales angulos; et homologa, ſive ejuſdem nominis, latera eſſe, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Ponatur B C in directum ipſi C E. Et quo-
[f] 17. primi. niam anguli A B C, A C B duobus rectis minores [f] ſunt, æqualis autem eſt angulus A C B angulo D E C; erunt A B C, D E C anguli duobus rectis minores. Quare B A,
[g] 12. ax. primi. E D productæ inter ſe convenient [g]; producantur, et conveniant in puncto F. Et quoniam angulus D C B
[h] 28. primi. eſt æqualis angulo A B C; erit [h] B F ipſi D C parallela. Rurſus quoniam æqualis eſt angulus A C B angulo D E C, parallela [h] erit A C ipſi F E. Parallelogrammum igitur eſt F A C D; ac propterea F A quidem ipſi C D, A C vero
[i] 34. primi. ipſi F D, eſt [i] æqualis. Et quoniam uni laterum trianguli F B E, videlicet ipſi F E, parallela ducta eſt A C;
[k] 2. hujus. erit [k] ut B A ad A F, ita B C ad C E. Æqualis autem eſt A F ipſi C D. Ut igitur B A ad C D, ita B C ad C E; et permutando, ut B A ad B C, ita C D ad C E. Rurſus quoniam C D parallela eſt B F, erit [k] ut B C ad C E, ita
[l] 7. quinti. F D ad D E. Sed F D eſt æqualis A C. Ergo ut [l] B C ad C E, ita A C ad D E. Permutando igitur, ut B C ad C A, ita C E ad E D. Itaque quoniam oſtenſum eſt, ut A B ad B C ita D C ad C E, ut autem B C ad C A ita C E
[m] 22. quinti. ad E D: erit, [m] ex æquali, ut B A ad A C ita C D ad D E. Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos; et homologa, ſive ejuſdem nominis, latera ſunt, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. V. THEOR. [V.]

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.



Sint duo triangula A B C, D E F, quæ latera proportionalia habeant; hoc eſt, ſit ut A B quidem ad B C, ita D E ad E F: ut autem B C ad C A, ita E F ad F D; et adhuc ut B A ad A C, ita E D ad D F. Dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum eſſe, et æquales habere angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur; angulum quidem A B C angulo D E F, angulum vero B C A angulo E F D, et præterea angulum B A C angulo E D F. Conſtituatur enim [n] ad rectam lineam E F, et ad puncta in ipſâ E, F, angulo quidem A B C æqualis angulus F E G; angulo autem B C A angulus E F G. Quare reliquus B A C angulus [o] reliquo E G F eſt æqualis. Ideoque æquiangulum eſt triangulum A B C triangulo E G F. Triangulorum igitur A B C, E G F proportionalia ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Ergo ut A B ad B C [p], ita G E ad E F. Sed ut A B ad B C, ita D E ad E F. Ut igitur D E ad E F, ita [q] G E ad E F. Quod cum utraque ipſarum D E, E G ad E F eandem proportionem habeat, erit [r] D E ipſi E G æqualis. Eâdem ratione et D F æqualis F G. Itaque quoniam D E eſt æqualis E G, communis autem E F; duæ D E, E F duabus G E, E F æquales ſunt, et baſis D F baſi F G æqualis. Angulus igitur D E F eſt æqualis [s] angulo G E F, et D E F triangulum æquale triangulo G E F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Ergo angulus quidem E D F æqualis angulo E G F. Et quoniam angulus D E F eſt æqualis angulo G E F, et angulus G E F angulo A B C; erit et angulus A B C angulo F E D æqualis. Eâdem ratione et angulus A C B æqualis eſt angulo D F E; et adhuc angulus ad A angulo ad D. Ergo A B C triangulum triangulo

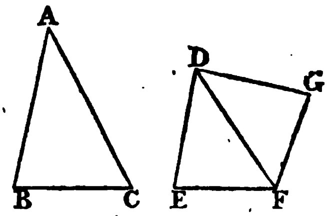
[n] 23. primi.
[o] 2. Cor. 32. primi.
[p] 4. hujus.
[q] 11. quinti.
[r] 9. quinti.
[s] 8. primi.

angulo D E F æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera fubtenduntur. *Q. E. D.*

[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera fubtenduntur.

Sint duo triangula A B C, D E F, unum angulum B A C uni angulo E D F æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia; hoc eft, fit ut B A ad A C, ita E D ad D F. Dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum effe, et angulum quidem



A B C habere æqualem angulo D E F; angulum vero A C B angulo D F E. Conftituatur [t] enim ad rectam lineam D F, et ad puncta in ipfâ D, F, alterutri angulorum B A C, E D F æqualis angulus F D G, angulo autem A C B æqualis D F G. Reliquus igitur ad B reliquo ad G eft [u] æqualis. Ergo triangulum A B C triangulo D G F æquiangulum eft; ac propterea ut B A ad A C, ita [x] eft G D ad D F: ponitur autem et ut B A ad A C, ita E D ad D F. Ut igitur [y] E D ad D F, ita G D ad D F. Quare E D æqualis eft [z] ipfi D G, et communis D F. Ergo duæ E D, D F duabus G D, D F æquales funt, et angulus E D F angulo G D F eft æqualis; bafis igitur E F eft [a] æqualis bafi F G, triangulumque D E F æquale triangulo G D F, et reliqui anguli reliquis anguli æquales, alter alteri, quibus æqualia latera fubtenduntur. Ergo angulus quidem D F G eft æqualis angulo D F E; angulus vero ad G angulo ad E. Sed angulus D F G æqualis eft angulo A C B; et angulus igitur A C B angulo D F E eft æqualis. Ponitur autem et B A C angulus æqualis angulo E D F. Ergo et reliquus, qui ad B, æqualis eft reliquo ad E. Æquiangulum igitur eft triangulum A B C triangulo D E F. Quare fi duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant,

[t] 23. primi.
[u] 2. Cor. 32. primi.
[x] 4. hujus.
[y] 11. quinti.
[z] 9. quinti.
[a] 4. primi.

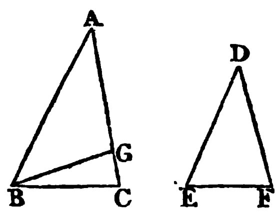
circa

circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. *Q. E. D.*

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, circa quos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula A B C, D E F, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum B A C angulo E D F æqualem, circa alios autem angulos A B C, D E F latera proportionalia, ut ſit D E ad E F, ſicut A B ad B C; et reliquorum, qui ad C, F, utrumque ſimul minorem, vel non minorem recto. Dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum eſſe; angulumque A B C æqualem angulo D E F, et reliquum, videlicet qui ad C, reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis eſt angulus A B C angulo D E F, unus ipſorum major erit; ſit major A B C; et conſtituatur [b] ad rectam lineam A B, et ad punctum in ipſâ B, angulo D E F æqualis angulus A B G. Et quoniam angulus quidem A eſt æqualis angulo D, angulus vero A B G angulo D E F; erit reliquus A G B reliquo D F E æqualis [c]. Æquiangulum igitur eſt A B G triangulum triangulo D E F. Quare ut [d] A B ad B G, ſic D E ad E F: utque D E ad E F, ſic ponitur A B ad B C. Ut igitur A B ad B C, ſic A B ad B G. Quod cum A B ad utramque B C, B G eandem habeat proportionem, erit B C ipſi B G æqualis [e]; ac propterea angulus ad C eſt æqualis angulo B G C. Quare uterque angulorum B C G, B G C minor eſt recto; igitur qui ei deinceps eſt, A G B, major eſt recto. Atque oſtenſus eſt angulus A G B æqualis angulo, qui ad F. Angulus igitur, qui ad F, recto major eſt. Atqui ponitur non major, nimirum cum C non eſt major recto: quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualis eſt angulus A B C angulo D E F. Ergo ipſi eſt æqualis. Eſt autem et angulus ad A æqualis ei, qui ad D. Quare et reliquus qui ad C, æqualis reliquo, qui ad



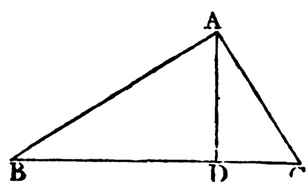
[b] 23. primi.
[c] 2. Cor. 32. primi.
[d] 4. hujus.
[e] 9. quinti.

ad F. Æquiangulum igitur eſt A B C triangulum triangulo D E F. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia ſunt latera. *Q. E. D.*

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula, et toti, et inter ſe ſimilia ſunt.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens angulum B A C; et a puncto A ad B C perpendicularis ducatur A D. Dico triangula A B D, A D C toti triangulo A B C, et inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus B A C eſt æqualis angulo A D B,



rectus enim uterque eſt, et angulus ad B communis duobus triangulis A B C, A B D; erit [g] reliquus A C B reliquo B A D æqualis. Æquiangulum igitur eſt triangulum A B C triangulo A B D. Quare [h] ut B C, quæ ſubtendit angulum rectum trianguli A B C, ad B A ſubtendentem angulum rectum trianguli A B D, ſic ipſa A B, ſubtendens angulum ad C trianguli A B C, ad D B ſubtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet B A D ipſius A B D trianguli; et adhuc A C ad A D ſubtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. Ergo triangulum A B C triangulo A B D æquiangulum eſt, et circa æquales angulos latera habet proportionalia. Simile igitur [i] eſt triangulum A B C triangulo A B D. Eâdem ratione demonſtrabimus etiam A D C triangulum triangulo A B C ſimile eſſe. Quare utrumque ipſorum A B D, A D C toti A B C triangulo eſt ſimile. Dico inſuper triangula A B D, A D C etiam inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus B D A rectus eſt æqualis recto A D C; ſed et B A D oſtenſus eſt æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo D A C æqualis. Æquiangulum igitur eſt triangulum A B D triangulo A D C. Ergo [h] ut B D trianguli A B D ſubtendens B A D angulum, ad D A trianguli A D C ſubtendentem angulum, qui eſt ad C, æqualem

[g] 2. Cor. 32. primi.
[h] 4. hujus.
[i] Def. 1. hujus.

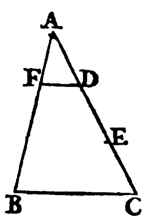
æqualem angulo B A D, sic ipsa A D trianguli A B D subtendens angulum ad B, ad D C subtendentem angulum D A C ei, qui est ad B, æqualem; et adhuc B A ad A C subtendentem angulum rectum A D C. Simile igitur est A B D triangulum triangulo A D C. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, et toti, et inter se similia sunt. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis; et præterea inter basim et basis segmentum, latus utrumlibet segmento conterminum, medium esse proportionale.

PROP. IX. PROBL. [IX.]

A datâ rectâ lineâ imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea A B. Oportet ab ipsâ A B imperatam partem abscindere. Ducatur a puncto A quædam recta linea A C, quæ cum ipsâ A B angulum quemlibet contineat; sumaturque in A C quodvis punctum D, et capiatur A C, quæ toties sit multiplex rectæ A D, quoties recta ipsa A B partis abscindendæ; jungatur B C; et per D ipsi B C parallela [k] ducatur D F. Itaque quoniam uni laterum trianguli A B C, videlicet ipsi B C, parallela ducta est F D; erit[l] ut C D ad D A, ita[l] B F ad F A; componendo ut C A ad A D, ita B A ad A F[m]. Quæ pars igitur est A D rectæ A C, eadem erit A F rectæ A B[n]. A datâ igitur rectâ lineâ A B pars imperata est[n] abscissa A F. *Q. E. F.*



[k] 31. primi.
[l] 2. hujus.
[m] 18. quinti.
[n] 15. quinti.

PROP. X. PROBL. [X.]

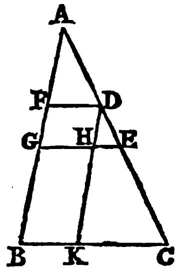
Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta A B, secta vero A C. Oportet rectam lineam A B insectam ipsi A C sectæ similiter secare. Sit secta A C in punctis D et E; et ponantur ita, ut angulum quemvis contineant; junctâque B C, per puncta quidem D et E ipsi B C parallelæ [o] ducantur D F, E G; per D vero ipsi A B ducatur parallela

[o] 31. primi.

D H K.

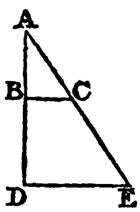
D H K. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum
[q 34. primi.] F H, H B: ac propterea D H quidem est[q] æqualis F G, H K vero ipsi G B. Et quoniam uni laterum trianguli D K C, ipsi scilicet K C, parallela ducta est H E;
[r 2. hujus.] erit [r] ut C E ad E D, ita K H ad H D. Æqualis autem est K H quidem ipsi B G, H D vero ipsi G F. Est igitur ut C E ad E D, ita B G ad G F. Rursus quoniam uni laterum trianguli A G E, nimirum ipsi E G, parallela ducta est F D, ut E D ad D A, ita [r] erit G F ad F A. Sed ostensum est ut C E ad E D, ita esse B G ad G F. Ut igitur C E ad E D, ita est B G ad G F; et ut E D ad D A, ita G F ad F A. Ergo data recta linea insecta A B, datæ rectæ lineæ sectæ A C similiter secta est. *Q. E. F.*



[XI.] PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ A B, A C; et ponantur ita, ut angulum quemvis contineant. Oportet ipsis A B, A C tertiam proportionalem invenire. Producantur A B, A C ad puncta D, E; ponaturque ipsi A C æqualis B D; et
[s 31. primi.] juncta B C, ducatur[s] per D ipsi B C parallela D E. Quoniam igitur uni laterum trianguli A D E, videlicet ipsi D E, parallela
[t 2. hujus.] ducta est B C, erit[t] ut A B ad B D, ita A C ad C E. Æqualis autem est B D ipsi A C. Ut igitur A B ad A C, ita est A C ad C E. Quare datis rectis lineis A B, A C tertia proportionalis inventa est C E. *Q. E. F.*



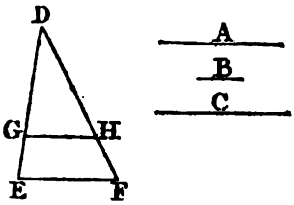
[XII.] PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A, B, C. Oportet ipsis A, B, C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ D E, D F angulum quemvis E D F continentes; et ponatur ipsi quidem A æqualis D G, ipsi vero B æqualis G E, et ipsi C æqualis D H: junctâque

G H,

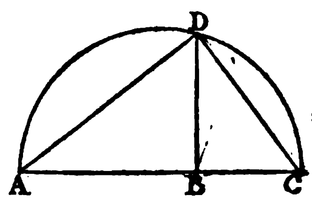
G H, per E ipsi parallela[a] ducatur E F. Itaque quoniam[a] uni laterum trianguli D E F, nimirum ipsi E F, parallela ducta est G H, erit ut D G ad G E ita D H ad H F. Est autem D G ipsi A æqualis; G E vero æqualis B; et D H æqualis C. Ut igitur A ad B, ita C ad H F. Quare datis tribus rectis lineis A, B, C quarta proportionalis inventa est H F. *Q. E. F.* [a] 31. primi.



PROP. XIII. PROBL. [XIII.]

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ A B, B C. Oportet inter ipsas A B, B C mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, et super ipsâ A C describatur semicirculus A D C; ducaturque[x] a puncto B ipsi A C ad rectos angulos B D; et A D, D C jungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus A D C, is rectus[y] est. Et quoniam in triangulo rectangulo A D C, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est D B; erit D B media proportionalis[z] inter segmenta basis A B, B C. Duabus igitur datis rectis lineis A B, B C media proportionalis inventa est D B. *Q. E. F.*



[x] 11. primi.
[y] 31. tertii.
[z] Cor. 8. hujus.

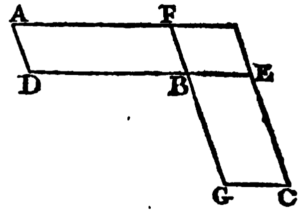
PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Æqualium, et unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: et quorum parallelogrammorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma A B, B C, æquales habentia angulos ad B; et ponantur in directum D B, B E. Ergo et in directum[a] erunt F B, B G. Dico parallelogrammorum A B, B C latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca esse: hoc est, ut D B ad B E ita esse [a] 14. primi.

G B

G B ad B F. Compleatur enim parallelogrammum F E. Et quoniam parallelogrammum A B æquale eſt parallelogrammo B C, aliud autem aliquod eſt F E parallelogrammum; erit ut A B ad F E [b], ita B C ad F E. Sed ut A B quidem ad F E, ita [c] eſt D B ad B E; ut autem B C ad F E, ita [c] G B ad B F; ut igitur [d] D B ad B E, ita G B ad B F. Ergo parallelogrammorum A B, B C latera, quæ circum æquales angulos, ex contrariâ parte ſibi ipſis reſpondent.



[b] 7. quinti.
[c] 1. hujus.
[d] 11. quinti.

Et ſi reciproca ſint, ſeu ex contrariâ parte ſibi ipſis reſpondeant, latera, quæ ſunt circum æquales angulos, nempe ſi ut B D ad B E, ita ſit G B ad B F; dico parallelogrammum A B parallelogrammo B C æquale eſſe. Quoniam enim eſt ut D B ad B E, ita G B ad B F, ut autem D B ad B E, ita [c] A B parallelogrammum ad parallelogrammum F E; et ut G B ad B F, ita [c] B C parallelogrammum ad parallelogrammum F E; erit [d] et ut A B ad F E, ita B C ad F E. [e] Æquale igitur eſt A B parallelogrammum parallelogrammo B C. Ergo æqualium et unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ſeu ex contrariâ parte ſibi ipſis reſpondent; et quorum parallelogrammorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt; ea inter ſe ſunt æqualia. *Q. E. D.*

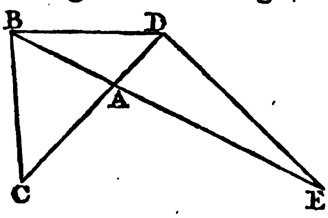
[e] 9. quinti.

[XV.] PROP. XV. THEOR.

Æqualium, et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ſunt reciproca. Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

Sint æqualia triangula A B C, A D E, unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum ſcilicet B A C angulo D A E. Dico triangulorum A B C, A D E latera, quæ circum æquales angulos, reciproca eſſe, hoc eſt, ut C A ad A D, ita eſſe E A ad A B. Ponantur enim ita, ut in directum ſit C A ipſi A D. Ergo et E A ipſi A B in directum erit; et jungatur B D. Quoniam igitur triangulum A B C æquale eſt triangulo A D E, aliud autem eſt

est ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita [d] triangulum ADE ad triangulum BAD. Sed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita [e] CA ad AD; ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD, ita EA ad AB. Ut [f] igitur CA ad AD, ita EA ad AB. Quare triangulorum ABC, ADE latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt. Et si reciproca sint latera triangulorum ABC, ADE, scil. sit ut CA ad AD, ita EA ad AB; dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. Junctâ enim rursus BD, quoniam ut CA ad AD, ita est EA ad AB; ut autem CA ad AD, ita [e] ABC triangulum ad triangulum BAD; et ut EA ad AB, ita [e] triangulum EAD ad BAD triangulum, erit ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. Utrumque igitur triangulorum ABC, ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea æquale est ABC triangulum triangulo ADE [d]. Æqualium igitur, et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt: et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

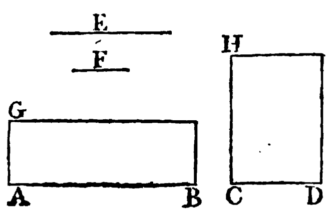


d 7. quinti.
e 1. hujus.
f 11. quinti.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum æquale est ei rectangulo, quod sub mediis continetur: et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur; quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

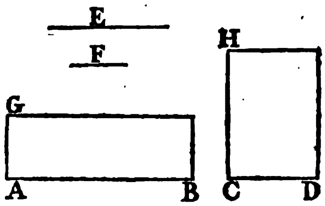
Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, E, F, sitque ut AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum sub rectis lineis AB, F æquale esse ei, quod sub ipsis CD, E continetur. Ducantur enim a [g] punctis A, C ipsis AB, CD ad rectos angulos AG, CH;



g 11. primi.

ponaturque

ponaturque ipsi quidem F æqualis A G, ipsi vero E æqualis C H; et compleantur B G, D H parallelogramma. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E ad F; est autem E æqualis C H, et F
g 7. quinti. ipsi A G: erit g ut A B ad C D, ita C H ad A G. Parallelogrammorum igitur B G, D H latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. Quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos,



h 14. hujus. reciproca sunt, ea inter se sunt h æqualia. Ergo parallelogrammum B G æquale est parallelogrammo D H. Atque est parallelogrammum quidem B G, quod sub rectis lineis A B, F continetur, etenim A G est æqualis F; parallelogrammum vero D H, quod continetur sub ipsis C D, E; cum C H ipsi E sit æqualis. Rectangulum igitur contentum sub A B et F est æquale ei, quod sub ipsis C D et E continetur. Et si rectangulum contentum sub A B, F sit æquale ei, quod sub C D et E continetur; dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut A B ad C D, ita E ad F. Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum sub A B et F est æquale ei, quod sub C D et E continetur, atque est contentum quidem sub A B, F rectangulum B G, etenim A G est æqualis F: contentum vero sub C D, E est rectangulum D H, cum C H ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum B G æquale parallelogrammo D H. Et sunt æquiangula. Æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt g. Quare ut A B ad C D, ita C H ad A G; æqualis autem est C H ipsi E, et A G ipsi F. Ut igitur A B ad C D, ita E ad F. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum æquale est ei, quod sub mediis continetur: et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur; quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

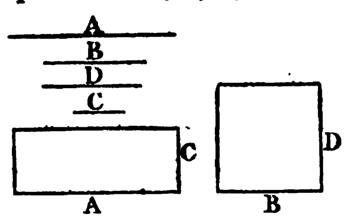
Cor. * Si quatuor rectarum prima major sit quam ad secundam in ratione tertiæ ad quartam; rectangulum sub extremis rectangulo sub mediis majus erit. Et si rectangulum

rectangulum sub extremis majus fuerit rectangulo sub mediis; prima major erit quam ad secundam in ratione tertiæ ad quartam.

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum æquale est ei, quod a mediâ fit, quadrato: et si rectangulum sub extremis contentum, æquale fuerit ei, quod a mediâ fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C; et sit ut A ad B ita B ad C. Dico rectangulum contentum sub A, C æquale esse ei, quod a mediâ B fit, quadrato. Ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C; æqualis autem B ipsi D;



erit ut A ad B [h], ita D ad C. Si autem quatuor rectæ [h] 7. quinti.
lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum est [l] æquale ei, quod sub mediis continetur. [l] 16. hujus.
Ergo rectangulum sub A, C contentum est æquale ei, quod continetur sub B, D. Sed rectangulum contentum sub B, D est æquale quadrato, quod fit ex ipsâ B; etenim B est æqualis D. Rectangulum igitur contentum sub A, C est æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Et si rectangulum contentum sub A, C æquale sit quadrato, quod fit ex B; dico ut A ad B, ita esse B ad C. Iisdem enim constructis: quoniam rectangulum contentum sub A, C æquale est quadrato, quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B est rectangulum, quod sub ipsis B, D continetur, est enim B æqualis ipsi D; erit rectangulum contentum sub A, C æquale ei, quod sub B, D continetur. Si autem rectangulum, sub extremis contentum, æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales [l] erunt. Est igitur ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipsi D. Ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum est æquale ei, quod a mediâ fit, quadrato: et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei, quod a mediâ fit, quadrato; tres rectæ lineæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

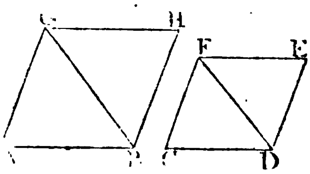
Cor.

Cor. * Si trium rectarum prima major sit quam ad secundam in ratione secundæ ad tertiam; rectangulum sub extremis quadrato a mediâ majus erit. Et si rectangulum sub extremis majus fuerit quadrato a mediâ; prima major erit quam ad secundam in ratione secundæ ad tertiam.

[XVIII.] PROP. XVIII. PROBL.

A datâ rectâ lineâ, dato rectilineo simile et similiter positum, rectilineum describere.

Sit data recta linea A B, datum autem rectilineum C E. Oportet a rectâ lineâ A B, rectilineo C E simile et similiter positum, rectilineum describere. Jungatur D F, et ad rectam lineam A B, et ad puncta in ipsâ A, B, angulo quidem C æqualis angulus [k] constituatur G A B, angulo autem C D F angulus A B G. Reliquus igitur C F D angulus reliquo A G B est [l] æqualis. Ergo æquiangulum est F C D triangulum triangulo G A B; ac propterea [m] ut F D ad G B, ita F C ad G A, et C D ad A B. Rursus constituatur ad rectam lineam B G, et ad puncta in ipsâ B, G, angulo quidem D F E æqualis angulus B G H, angulo autem F D E æqualis G B H. Ergo reliquus [l] ad E reliquo ad H est æqualis. Æquiangulum igitur est triangulum F D E triangulo G B H. Quare ut [m] F D ad G B, ita F E ad G H, et E D ad H B. Ostensum autem est et ut F D ad G B, ita F C ad G A, et C D ad A B; est igitur [n] ut F C ad A G, ita C D ad A B, et F E ad G H, et adhuc E D ad H B. Itaque quoniam angulus quidem C F D est æqualis angulo A G B, angulus autem D F E angulo B G H; erit totus C F E angulus toti A G H æqualis. Eâdem ratione et C D E est æqualis ipsi A B H; et præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. Æquiangulum igitur est A H ipsi C E, et latera circum æquales ipsius angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum A H rectilineo C E simile [o] erit. A datâ igitur rectâ lineâ A B, dato rectilineo C E simile et similiter positum, rectilineum A H descriptum est. *Q. E. F.*



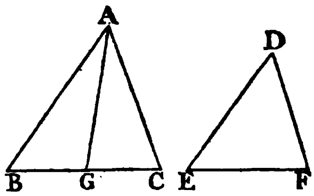
[k] 23. primi.
[l] 2. Cor. 32. primi.
[m] 4. hujus.
[n] 11. quinti.
[o] Def. 1. hujus.

PROP.

PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

Similia triangula inter se sunt in duplicatâ proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula A B C, D E F habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, et sit ut A B ad B C, ita D E ad E F, ita ut latus B C homologum sit lateri E F. Dico A B C triangulum ad triangulum D E F duplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F.



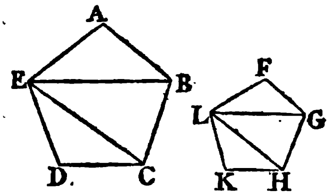
Sumatur enim ipsis [p] B C, E F tertia proportionalis B G, [p] 11. hujus.
ut sit B C ad E F ita E F ad B G. Et jungatur G A. Quoniam igitur ut A B ad B C, ita est D E ad E F; erit permutando ut A B ad D E, ita B C ad E F. Sed ut B C ad E F, ita E F ad B G. Ut [q] igitur A B ad D E, ita E F [q] 11. quinti.
ad B G. Quare triangulorum A B G, D E F latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. Quorum autem triangulorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se æqualia [r] sunt. Æquale igitur est A B G [r] 15. hujus.
triangulum triangulo D E F. Et quoniam est ut B C ad E F, ita E F ad B G; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [s] habet ejus, quam habet ad secundam: habebit igitur [s] Def. 10. quinti.
B C ad B G duplicatam proportionem ejus, quam habet B C ad E F. Ut autem B C ad B G, ita A B C triangulum ad triangulum A B G [t]. Ergo et A B C triangulum ad [t] 1. hujus.
triangulum A B G duplicatam proportionem habet ejus, quam B C habet ad E F. Est autem A B G triangulum triangulo D E F æquale. Et triangulum igitur A B C ad triangulum D E F duplicatam proportionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Quare similia triangula inter se in duplicatâ sunt proportione laterum homologorum. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit a primâ, ad triangulum, quod a secundâ, simile et similiter descriptum; quoniam ostensum est ut C B ad B G, ita A B C triangulum ad triangulum A B G, hoc est, ad triangulum D E F. *Q. E. D.*

[XX.] PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus, quam latus habet ad homologum latus.

Sint ſimilia polygona A B C D E, F G H K L, et ſit latus A B homologum ipſi F G. Dico polygona A B C D E, F G H K L in ſimilia triangula dividi, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum A B C D E ad polygonum F G H K L duplicatam proportionem habere ejus, quam habet A B ad F G.



Jungantur B E, E C, G L, L H. Et quoniam ſimile eſt A B C D E polygonum polygono F G H K L, angulus B A E angulo G F L eſt æqualis: atque eſt ut B A ad A E, ita G F ad F L. Quoniam igitur duo triangula ſunt A B E, F G L, unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit[t] triangulum A B E triangulo F G L æquiangulum. Ergo et ſimile. Angulus igitur A B E æqualis eſt angulo F G L. Eſt autem et totus A B C angulus æqualis[u] toti F G H, propter ſimilitudinem polygonorum. Ergo reliquus E B C reliquo L G H eſt æqualis. Et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum A B E, F G L, eſt ut E B ad B A, ita L G ad G F; ſed et propter ſimilitudinem polygonorum[u], ut A B ad B C, ita eſt F G ad G H; erit ex æquali ut[x] E B ad B C, ita L G ad G H. Hoc eſt, circum æquales angulos E B C, L G H latera triangulorum E B C, L G H ſunt proportionalia; æquiangulum igitur eſt E B C triangulum triangulo L G H. Quare et ſimile. Eâdem ratione et E C D triangulum ſimile eſt triangulo L H K. Similia igitur polygona A B C D E, F G H K L in ſimilia triangula dividuntur, et numero æqualia: nimirum cum tot ſint utriuſque polygoni triangula, quot ſunt latera, duobus demptis. Dico et homologa totis; hoc eſt, ut proportionalia ſint triangula, et antecedentia quidem ſunt A B E, E B C, E C D, conſequentia autem ipſorum F G L, L G H, L H K; et A B C D E polygonum ad polygonum F G H K L

[t] 6. hujus.
[u] Def. 1. hujus.
[x] 22. quinti.

F G H K L duplicatam proportionem habere ejus, quam latus habet ad homologum latus; hoc eſt, A B ad F G. Quoniam enim ſimile eſt A B E triangulum triangulo F G L; habebit A B E triangulum ad triangulum F G L duplicatam proportionem [y] ejus, quam habet B E ad G L. Eâdem [y] ratione, et triangulum B E C ad G L H triangulum duplicatam [y] proportionem habet ejus, quam B E ad G L. Eſt [z] igitur ut A B E triangulum ad triangulum F G L, ita triangulum B E C ad G L H triangulum. Rurſus quoniam ſimile eſt triangulum E B C triangulo L G H, habebit E B C triangulum ad triangulum L G H duplicatam proportionem ejus, quam recta linea C E habet ad rectam H L. Eâdem ratione et E C D triangulum ad triangulum L H K duplicatam proportionem habet ejus, quam C E ad H L. Eſt [z] igitur ut triangulum B E C ad triangulum L G H, ita C E D triangulum ad triangulum L H K. Oſtenſum autem eſt et ut E B C triangulum ad triangulum L G H, ita triangulum A B E ad triangulum F G L. Ergo ut triangulum A B E ad triangulum F G L, ita triangulum B E C ad G H L triangulum, et triangulum E C D ad ipſum L H K. Et igitur ut unum antecedentium ad unum conſequentium [a], ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Ergo ut triangulum A B E ad triangulum F G L, ita A B C D E polygonum ad polygonum F G H K L; ſed A B E triangulum ad triangulum F G L duplicatam proportionem habet ejus, quam latus A B habet ad homologum latus F G: ſimilia enim triangula in duplicatâ ſunt proportione laterum homologorum. Ergo et A B C D E polygonum ad polygonum F G H K L duplicatam proportionem habet ejus, quam A B latus habet ad F G homologum latus. Similia igitur polygona in ſimilia triangula dividuntur, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus, quam habet latus ad homologum latus. *Q. E. D.*

[y] 19. hujus.
[z] 11. quinti.
[a] 12. quinti.

Eodem modo et in ſimilibus quadrilateris oſtendetur, ea eſſe in duplicatâ proportione laterum homologorum. Oſtenſum autem eſt et triangulis.

Cor. 1. Ergo univerſe ſimiles figuræ rectilineæ inter ſe ſunt in duplicatâ proportione homologorum laterum.

Cor. 2. Univerſe igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita

 eſſe

esse figuram, quæ fit a primâ, ad eam, quæ a secundâ, similem et similiter descriptam. Nam si ipsis A B, F G figurarum rectilinearum similium lateribus homologis tertiam proportionalem sumamus, quæ sit X; habebit A B ad X duplicatam proportionem ejus, quam habet A B ad F G. Habet autem et figura ad figuram duplicatam proportionem ejus, quam latus A B ad latus homologum F G. Figura igitur ad figuram ut A B ad X. *Q. E. D.*



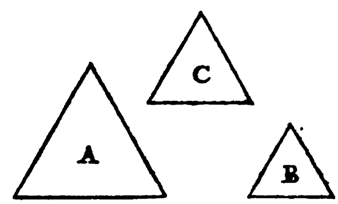
Cor. 3.* Si similes figuræ rectilineæ sint etiam æquales, earum latera homologa erunt inter se æqualia.

[XXI.] PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A, B simile rectilineo C. Dico et rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, et ipsi æquiangulum [b] erit, et circum æquales angulos latera habebit proportionalia. Rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, et circum æquales angulos latera proportionalia habebit [b]. Utrumque igitur rectilineorum A, B ipsi C æquiangulum est, et circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare et rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. *Q. E. D.*

[b] Def. 1. hujus.

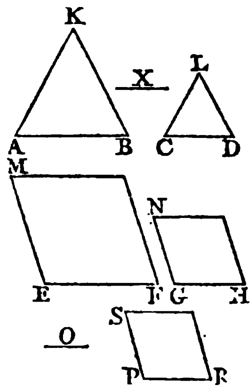


[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; et rectilinea, quæ ab ipsis fiant, similia et similiter descripta, proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia et similiter descripta, proportionalia fuerint; et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, E F, G H: nempe ut A B ad C D, ita sit E F ad G H. Describanturque

ſcribanturque [c] ab ipſis quidem A B, C D ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea K A B, L C D: ab ipſis vero E F, G H deſcribantur rectilinea ſimilia et ſimiliter poſita M F, N H. Dico ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita eſſe rectilineum M F ad ipſum N H rectilineum. Sumatur ipſis [d] quidem A B, C D tertia proportionalis X; ipſis vero E F, G H tertia proportionalis O. Et quoniam eſt ut A B ad C D, ita E F ad G H; ut autem C D ad X, ita G H ad O; erit, ex æquali [e] ut A B ad X, ita E F ad O. Sed ut A B quidem ad X, ita eſt [f] rectilineum K A B ad L C D rectilineum; ut autem E F ad O, ita [f] rectilineum M F ad rectilineum N H. Ut igitur K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita eſt [g] rectilineum M F ad N H rectilineum. Et ſi ſit ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita rectilineum M F ad rectilineum N H; dico ut A B ad C D, ita eſſe E F ad G H. Fiat enim ut A B ad C D, ita E F ad [h] P R, et [h] deſcribatur [c] ab ipſâ P R, alterutri rectilineorum M F, N H ſimile et ſimiliter poſitum, rectilineum S R. Quoniam igitur eſt ut A B ad C D, ita E F ad P R, et deſcripta ſunt ab ipſis quidem A B, C D ſimilia et ſimiliter poſita K A B, L C D rectilinea, ab ipſis vero E F, P R ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea M F, S R; erit [l] ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita rectilineum M F ad R S rectilineum. Ponitur autem et ut rectilineum K A B ad rectilineum L C D, ita M F rectilineum ad rectilineum N H. Ergo ut rectilineum M F ad rectilineum N H, ita M F rectilineum ad rectilineum S R. Quod cum rectilineum M F ad utrumque ipſorum N H, S R eandem habeat proportionem, erit [k] rectilineum N H ipſi S R æquale. Eſt autem ipſi ſimile et ſimiliter poſitum. Ergo G H eſt æqualis P R [l]. Et quoniam ut A B ad C D, ita eſt E F ad P R; æqualis autem P R ipſi G H; erit ut A B ad C D, ita E F ad G H. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; et rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia et ſimiliter deſcripta, proportionalia erunt: et ſi rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia et ſimiliter deſcripta,

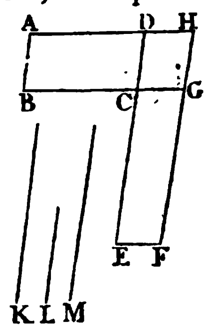


c 18. hujus.
d 11. hujus.
e 22. quinti.
f 2. Cor. 20. hujus.
g 11. quinti.
h 12. hujus.
l ex prius demonſtratis.
k 9. quinti.
l 3. Cor. 20. hujus.

ſcripta, proportionalia fuerint; et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam.



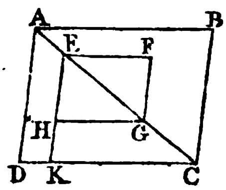
Sint æquiangula parallelogramma A C, C F æqualem habentia B C D angulum angulo E C G. Dico parallelogrammum A C ad parallelogrammum C F proportionem habere compoſitam ex lateribus, videlicet compoſitam ex proportione, quam habet B C ad C G, et ex proportione, quam D C habet ad C E. Ponatur enim, ut B C ſit in directum ipſi C G. Ergo et D C ipſi C E in di-
[l] 14. primi. rectum [l] erit; et compleatur D G parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, et fiat ut B C
[m] 12. hujus. ad C G, ita [m] K ad L; ut autem D C ad C E, ita L ad M. Proportiones igitur ipſius K ad L, et L ad M eædem ſunt, quæ proportiones laterum, videlicet B C ad C G, et D C ad C E. Sed proportio K ad M compoſita eſt ex proportione K ad L, et proportione L ad M. Quare et K ad M proportionem habet ex lateribus compoſitam.
[n] 1. hujus. Et quoniam eſt ut B C ad C G [n], ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H; ſed ut B C ad C G, ita
[o] 11. quinti. K ad L: erit [o] ut K ad L, ita parallelogrammum A C ad C H parallelogrammum. Rurſus quoniam eſt ut D C ad C E, ita C H parallelogrammum ad parallelogrammum C F; ut autem D C ad C E, ita L ad M; ergo ut L ad M, ita erit [o] parallelogrammum C H ad C F parallelogrammum. Itaque cum oſtenſum ſit ut K quidem ad L, ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H: ut autem L ad M, ita parallelogrammum C H ad C F pa-
[p] 22. quinti. rallelogrammum; erit [p], ex æquali, ut K ad M, ita A C parallelogrammum ad ipſum C F. Habet autem K ad M proportionem ex lateribus compoſitam. Ergo et A C parallelogrammum ad parallelogrammum C F proportionem habebit compoſitam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam. *Q. E. D.*

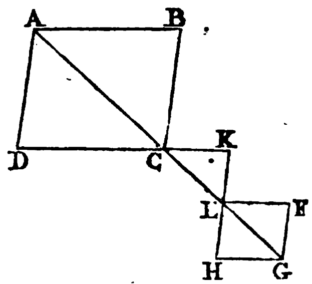
PROP.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Parallelogramma, quæ circa eandem ſunt diagonalem, et quorum latera duo adjacentia duobus adjacentibus ſunt parallela, inter ſe ſimilia ſunt.

Parallelogrammi A B C D ſit A C diagonalis. Circa eandem A C ſit aliud parallelogrammum E F G H, cujus latera duo adjacentia E F, E H, duobus alterius adjacentibus, A B, A D ſint parallela; unde neceſſario conſequetur et reliqua duo adjacentia G F, G H reliquis duobus





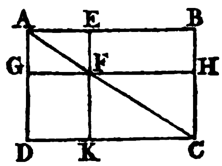
C B, C D adjacentibus eſſe parallela. Dico parallelogramma A B C D, E F G H eſſe inter ſe ſimilia. Conveniant enim E H, D C (ſi opus ſit productæ) in puncto K. Propter rectas E H, A D parallelas[q], angulus G E H angulo C A D æqualis erit[r]. Pari ratione et propter rectas E F, A B parallelas, angulus G E F angulo C A B æqualis erit. Duo igitur G E H, G E F ſimul ſumpti duobus C A D, C A B ſimul ſumpti ſunt æquales. Hoc eſt, totus F E H toti B A D æqualis erit. Æquiangula igitur ſunt parallelogramma A B C D, E F G H[s]. In triangulo autem A D C, cum recta E K parallela ſit baſi A D, erit A D ad D C ut E K ad K C[t]. Pari ratione in triangulo E K C, cum recta H G parallela ſit baſi, erit E K ad K C ut E H ad H G. Quare A D ad D C ut E H ad H G[u]. In parallelogrammis igitur æquiangulis A B C D, E F G H, latera circa angulos æquales D, H ſunt proportionalia. Unde efficietur et reliqua latera circa angulos æquales B, F eſſe proportionalia. Nimirum propter æqualia latera oppoſita utriuſque parallelogrammi[x], et eandem

[q] ex hyp.
[r] 29. primi.
[s] Cor. 34. primi.
[t] Cor. 2. hujus.
[u] 11. quinti.
[x] 34. primi.

 æqualium

y 7. quinti. æqualium ad æqualia proportionem y. Parallelogramma
z Def. 1. hujus. igitur A B C D, E F G H inter se similia sunt z. *Q. E. D.*

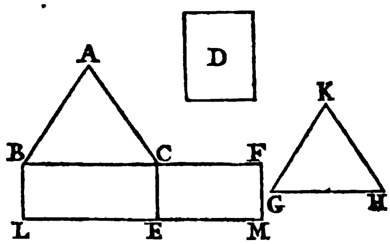
Cor. * Si per punctum quodvis F in A C, parallelogrammi A B C D diagonali, ducantur rectæ G F H, K F E lateribus parallelogrammi adjacentibus parallelæ, parallelogramma E F G A, H F K C circa diagonalem A C constituent toti et inter se similia.



[XXV.] PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale, idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum, cui oportet simile constituere, A B C; cui autem æquale sit, D. Oportet ipsi A B C simile, et ipsi D æquale, idem constituere.
a Cor. 45. primi. Applicetur a ad rectam quidem lineam B C rectilineo A B C æquale parallelogrammum B E.



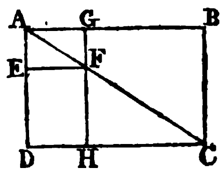
Ad rectam vero C E applicetur a parallelogrammum C M æquale ipsi D, in angulo F C E, qui C B L angulo est
b 14. primi. æqualis. In directum igitur b est B C ipsi C F, et L E
c 13. hujus. ipsi E M. Sumatur c inter B C, C F media proportio-
d 18. hujus. nalis G H; et d ab ipsâ G H describatur rectilineum K G H simile et similiter positum rectilineo A B C: Et quoniam est ut B C ad G H, ita G H ad C F, si autem tres
e 2. Cor. 20. hujus. rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam e, ita est figura, quæ sit a primâ, ad eam quæ a secundâ, similem et similiter descriptam: erit ut B C ad C F, ita A B C rectilineum ad rectilineum K G H. Sed et ut B C
f 1. hujus. ad C F, ita f parallelogrammum B E ad E F parallelo-
g 11. quinti. grammum. Ut g igitur rectilineum A B C ad rectilineum K G H, ita B E parallelogrammum ad parallelogrammum E F. Est autem rectilineum A B C æquale parallelogrammo B E. Æquale igitur est et K G H rectilineum
h 14. quinti. parallelogrammo E F h. Sed E F parallelogrammum æquale

æquale est rectilineo D. Ergo et rectilineum K G H ipsi D est æquale. Est autem G K H simile rectilineo A B C. Dato igitur rectilineo A B C simile, et alteri dato D æquale, idem constitutum est K G H. *Q. E. F.*

PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti et similiter positum, communem ipsi angulem habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim A B C D parallelogrammum A F auferatur, simile ipsi A B C D, et similiter positum, communemque ipsi angulum habens D A B. Dico parallelogrammum A B C D circa eandem esse diametrum parallelogrammo A F. Jungantur enim A F, C F, et G F producta ipsi D C in H occurrat.



Cum similia sint parallelogramma E G, D B et similiter posita, angulus A E F angulo A D C æqualis erit; et latera circa æquales angulos proportionalia. Quare A D est ad D C, ut A E ad E F. Sed æquales inter se sunt E F, D H, nempe parallelogrammi E F H D latera opposita[i]. Erit igitur A E ad D H, ut A E ad E F[k]. Quare [i] 34. primi.
A D erit ad D C, ut A E ad D H. Hoc est, tota A D ad [k] 7. quinti.
totam D C, ut pars A E ad partem D H. Quare et reliqua E D ad reliquam H C, ut A D ad D C[l]. Illi autem E D [l] 19. quinti.
æqualis est H F, nempe cum opposita sint parallelogrammi latera. Quare H F erit ad H C, ut E D ad H C[k], hoc est, ut A D ad D C. Sed A D ad D C, ut A E ad E F (id enim ostensum.) Quare H F ad H C, ut A E ad E F[m]. [m] 11. quinti.
Sed propter rectas F H, D E parallelas, angulus F H C angulo A D C æqualis est[n]: cui æqualis jam initio [n] 29. primi.
ostensus est A E F. Anguli igitur F H C, A E F inter se æquales. Duo igitur triangula A E F, F H C angulos ad E et H æquales habent, et latera circa æquales illos angulos proportionalia. Æquiangula igitur erunt triangula illa, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur[o]. Angulus igitur A F E an- [o] 6. hujus.
gulo F C H æqualis. Addatur utrique E F C. Duo igitur A F E, C F E simul sumpti duobus F C H, C F E simul sumptis sunt æquales. Sed propter rectas C D, E F parallelas, duo F C H, C F E simul sumpti duobus rectis sunt æquales[n]. Duo igitur A F E, C F E simul sumpti

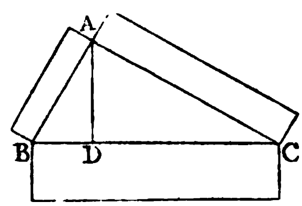
duobus

duobus rectis sunt æquales. Directa igitur est linea
[r] 14. primi. A F C [r], et ipsa est parallelogrammi A B C D diagonalis. Parallelogrammum igitur A G F E, cum sit circa lineam A F C, est circa diagonalem parallelogrammi A B C D. Si igitur &c. *Q. E. D.*

[XXXI.] PROP. XXVII. THEOR.

In rectangulis triangulis figura, quæ fit a latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus et similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens angulum B A C. Dico figuram, quæ fit ex B C, æqualem esse eis, quæ ex B A, A C fiunt, similibus et similiter descriptis. Ducatur perpendicularis A D. Quoniam igitur in triangulo rectangulo A C B ab angulo recto,



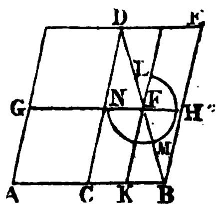
qui est ad A, ad B C basim perpendicularis ducta est A D;
[s] 8. hujus. erunt [s] triangula A B D, A D C, quæ sunt ad perpendicularem, similia toti A B C, et inter se. Et quoniam si-
[t] 4. hujus. mile est A B C triangulum triangulo A B D, erit ut [t] C B ad B A, ita B A ad B D. Quod cum tres rectæ lineæ
[u] 2. Cor. 20. hujus. proportionales sint, ut prima ad tertiam, ita erit [u] figura, quæ fit ex primâ ad eam, quæ ex secundâ, similem et similiter descriptam. Ut igitur C B ad B D, ita figura, quæ fit ex C B, ad eam, quæ ex B A, similem et similiter descriptam. Eâdem ratione, et ut B C ad C D, ita figura, quæ fit ex B C, ad eam, quæ ex C A. Quare et
[x] 24. quinti. ut B C ad ipsas B D, D C, ita [x] figura, quæ ex B C, ad eas, quæ ex B A, A C, similes et similiter descriptas. Æqualis autem est B C ipsis B D, D C. Ergo figura, quæ fit ex B C, æqualis est eis, quæ ex B A, A C fiunt, similibus et similiter descriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit a latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus et similiter descriptis. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR. [XXVII.]

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ei, quæ a dimidiâ describitur, maximum est, quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea A B; seceturque bifariam in C; et ad A B rectam lineam applicetur parallelogrammum A D deficiens figurâ parallelogrammâ C E, simili et similiter positâ ei, quæ a dimidiâ ipsius A B descripta est. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam A B applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ipsi C E, maximum esse A D.



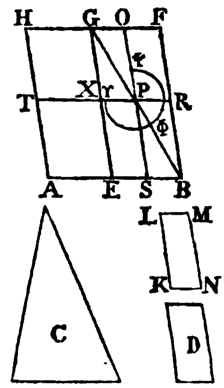
Applicetur enim ad rectam lineam A B parallelogrammum A F, deficiens figurâ parallelogrammâ H K simili et similiter positâ ipsi C E. Dico A D parallelogrammum parallelogrammo A F majus esse. Quoniam enim simile est parallelogrammum C E parallelogrammo H K, circa eandem diametrum [y] sunt. Ducatur eorum diameter D B, et describatur figura. Quoniam igitur C F [z] est æquale ipsi F E, commune apponatur H K. Totum igitur C H toti K E est æquale. Sed C H est [a] æquale C G, quoniam et recta linea A C ipsi C B. Ergo et G C ipsi E K æquale est. Commune apponatur C F. Totum igitur A F est æquale gnomoni L M N: quare et C E, hoc est, A D parallelogrammum parallelogrammo A F est majus. Omnium igitur parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ei, quæ a dimidiâ describitur, maximum est, quod ad dimidiam est applicatum. *Q. E. D.*

[y] 26. hujus.
[z] 43. primi.
[a] 36. primi.

PROP.

[XXVIII.] PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur; similibus existentibus defectibus, et eo, quod a dimidiâ, et eo, cui oportet simili deficere.



Sit data quidem recta linea A B: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam A B applicare, sit C, non majus existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simili deficere, sit D. Oportet ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit ipsi D. Secetur A B bifariam in E, et ab ipsâ E B describatur rectilineum [b] simile et similiter positum ipsi D, quod sit E B F G; et compleatur A G parallelogrammum. Itaque A G vel æquale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem; et si quidem A G sit æquale C, factum jam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum A G applicatum est, deficiens figurâ parallelogrammâ E F ipsi D simili. Si autem non est æquale, erit H E majus quam C. Atqui E F æquale est H E. Ergo et E F quam C est majus. Quo autem E F superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile et similiter positum, idem [c] constituatur K L M N. Sed D est simile E F. Quare et K M ipsi E F simile erit. Sit igitur recta linea K L homologa ipsi G E, L M vero ipsi G F. Et quoniam æquale est E F ipsis C et K M, erit E F ipso K M majus. Major igitur est recta linea G E ipsâ K L; et G F ipsa L M. Ponatur G X æqualis K L, et G O æqualis L M, et compleatur X G O P parallelogrammum. Æquale igitur est et simile X O ipsi K M. Sed K M simile

[b] 18. hujus.

[c] 25. hujus.

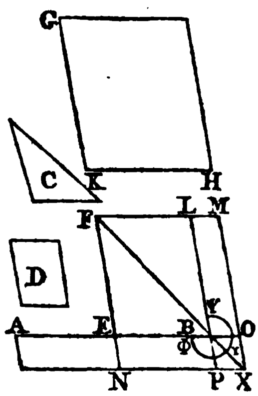
mile eft E F. Ergo et [d] X O ipfi E F eft fimile. Circa [e] eandem igitur eft [e] diametrum X O ipfi E F. Sit ipforum diameter G P B, et figura defcribatur. Itaque quoniam E F eft æquale ipfis C et K M fimul, quorum K M eft æquale X O, erit reliquus Υ Φ Υ gnomon æqualis reliquo C. Et quoniam O R eft æquale X S, commune apponatur S R. Totum igitur O B toti X B eft æquale. Sed X B eft æquale T E, quoniam et latus A E lateri E B. Quare et T E ipfi O B æquale. Commune apponatur X S. Ergo totum T S eft æquale toti gnomoni Υ Φ Υ. Et Υ Φ Υ gnomon ipfi C oftenfus eft æqualis; et T S igitur ipfi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum T S applicatum eft, deficiens figurâ parallelogrammâ S R ipfi D fimili, quoniam et S R fimile eft ipfi G B [f]. Q. E. F.

[d] 21. hujus.
[e] 26. hujus.
[f] 24. hujus.

PROP. XXX. PROBL. [XXIX.]

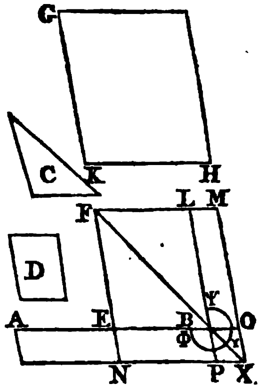
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ, quæ fimilis fit alteri datæ.

Sit data recta linea A B, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipfam A B applicare, fit C; cui autem oportet fimili excedere, D. Oportet ad rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ fimili D. Secetur A B bifariam in E, atque ex E B ipfi D fimile et fimiliter [g] pofitum parallelogrammum defcribatur E L. Et utrique quidem E L et C æquale, ipfi vero D fimile et fimiliter pofitum, idem [h] conftituatur G H. Simile igitur eft G H ipfi E L. Sitque K H quidem latus homologum lateri F L, K G vero ipfi F E. Et quoniam parallelogrammum G H majus eft ipfo E L, erit recta linea K H major quam F L, et K G major quam F E. Producantur F L, F E, et ipfi quidem K H æqualis fit F L M, ipfi vero K G æqualis F E N, et compleatur M N parallelogrammum. Ergo M N æquale eft et fimile ipfi G H. Sed G H eft fimile E L: M N igitur ipfi E L fimile



[g] 18. hujus.
[h] 25. hujus.

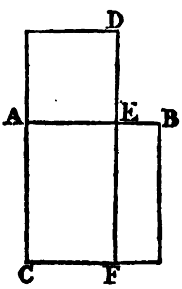
[e] 21. hujus. simile [e] erit; ac propterea circa eandem diametrum [f] est
[f] 26. hujus. E L ipsi M N. Ducatur ipsorum diameter F X, et figura describatur. Itaque quoniam G H ipsi E L et C est æquale, sed G H est æquale M N; erit et M N æquale ipsi E L et C. Commune auferatur E L. Reliquus igitur Φ Υ Ψ gnomon ipsi C est æqualis. Et quoniam A E est æqualis E B,
[g] 36. primi. æquale [g] erit et A N parallelogrammum parallelogrammo E P,
[h] 43. primi. hoc est, ipsi [h] L O. Commune apponatur E X. Totum igitur A X æquale est gnomoni Φ Υ Ψ. Sed Φ Υ Ψ gnomon est æqualis C. Ergo et A X ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est A X, excedens figurâ parallelogrammâ
[i] 24. hujus. P O, ipsi D simili, quoniam et ipsi E L simile est [i] O P. Q. E. F.

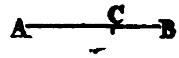


[XXX.] PROP. XXXI. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam extremâ ac mediâ ratione secare.

Sit data recta linea terminata A B. Oportet ipsam A B extremâ ac mediâ ratione secare. Descri-
[k] 46. primi. batur [k] ex A B quadratum B C; et ad A C ipsi B C æquale parallelo-
[l] 29. hujus. grammum [l] applicetur C D, excedens figurâ A D ipsi B C simili. Quadratum autem est B C, ergo et A D quadratum erit. Et quoniam B C est æquale C D; commune auferatur C E. Reliquum igitur B F reliquo A D est æquale. Est autem et ipsi æquiangulum. Ergo ipsorum B F, A D latera, quæ cir-
[m] 14. hujus. cum æquales angulos, reciproce sunt [m] proportionalia. Ut igitur F E ad E D, ita est A E ad E B. Est autem
[n] 34. primi. F E æqualis [n] A C, hoc est, ipsi A B; et E D ipsi A E. Quare





Quare ut B A ad A E, ita A E ad E B. Sed A B major est quam A E. Ergo A E quam E B est [o] major. Recta igitur linea A B extremâ ac mediâ ratione secta est in E. Et majus ipsius segmentum est A E. *Q. E. F.* [o] 14. quinti.

Aliter. Sit data recta linea A B. Oportet ipsam A B extremâ ac mediâ ratione secare. Secetur enim A B in C, ita ut rectangulum [p], quod continetur sub A B, B C, æquale sit quadrato ex A C. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C æquale [q] est quadrato ex A C, erit ut B A ad A C ita A C ad C B. Ergo A B recta linea extremâ ac mediâ ratione secta est. *Q. E. F.* [p] 11. secundi. [q] 17. hujus.

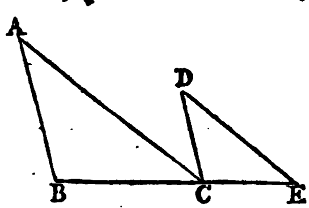
SCHOLION.*

Turbatam Theoni Propositionum seriem restituimus. Nempe quæ vicesimam sextam proxime sequuntur quatuor, tricesimæ primæ, quæ Theoni numerata est, demonstrandæ nihil prorsus inserviunt. In 29ª vero et tricesimâ fieri Euclides jubet, quod quâ ratione efficiendum sit, ex tricesimâ primâ demum intelligitur. Nos igitur, quæ Theoni est tricesima prima, vicesimæ septimæ loco reposuimus. Dein Theoni 27ª, 28ª, 29ª, 30ª, nostræ sunt 28ª, 29ª, 30ª, 31ª. Ita enim ab Euclide propositiones ordinatas fuisse existimamus.

PROP. XXXII. THEOR. [XXXII.]

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula A B C, D C E, quæ duo latera B A, A C duobus lateribus C D, D E proportionalia habeant, scil. sit sicut B A ad A C, ita C D ad D E; parallela autem sit A B ipsi D C, et A C ipsi D E. Dico B C ipsi C E in directum esse. Quoniam enim A B parallela est D C, et in ipsas incidit recta linea A C; erunt [r] anguli alterni B A C, A C D æquales inter se. Eâdem ratione, et angulus C D E æqualis est angulo A C D. Quare et B A C ipsi [r] 29. primi.

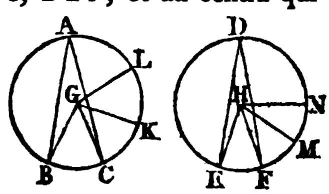


ipsi C D E est æqualis. Et quoniam duo triangula sunt A B C, D C E, unum angulum ad A uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit ut B A ad A C, ita C D ad
[s] 6. hujus. D E; erit [s] triangulum A B C triangulo D C E æquiangulum. Ergo A B C angulus est æqualis angulo D C E. Ostensus autem est et angulus A C D æqualis angulo B A C. Totus igitur A C E duobus A B C, B A C est æqualis. Communis apponatur A C B. Ergo anguli A C E, A C B angulis B A C, A C B, C B A æquales sunt. Sed BAC, ACB, CBA anguli duobus rectis sunt æquales. Et anguli igitur A C E, A C B duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam A C, et ad punctum in ipsâ C, duæ rectæ lineæ B C, C E non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, A C E, A C B duobus rectis æquales efficiunt. Ergo B C ipsi C E in
[t] 14. primi. directum [t] erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. *Q. E. D.*

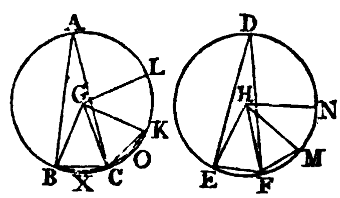
[XXXIII.] PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant: adbuc autem et sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

Sint æquales circuli A B C, D E F; et ad centra quidem ipsorum G, H sint anguli B G C, E H F, ad circumferentias vero anguli B A C, E D F. Dico ut circumferentia B C ad E F circumferentiam, ita esse, et B G C angulum ad angulum E H F, et angulum B A C ad angulum E D F; et adhuc sectorem B G C ad E H F sectorem. Ponantur enim circumferentiæ quidem B C æquales quotcunque deinceps C K, K L; circumferentiæ vero E F, rursus æquales quotcunque F M, M N. Et jungantur G K, G L, H M, H N. Quoniam igitur circumferentiæ B C, C K, K L inter se sunt æquales, et anguli B G C, C G K, K G L
[u] 27. tertii. inter se æquales [u] erunt. Quotuplex igitur est circumferentia

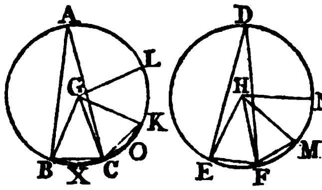


ferentia B L circumferentiæ B C, totuplex eſt et B G L
angulus anguli B G C. Eádem ratione et quotuplex eſt
circumferentia N E circumferentiæ E F, totuplex et
E H N angulus anguli E H F. Si vero æqualis eſt B L
circumferentia circumferentiæ E N, et angulus B G L
angulo E H N erit æqualis; et ſi circumferentia B L ma-
jor eſt circumferentiâ E N, major erit et B G L angulus
angulo E H N; et ſi minor, minor. Quatuor igitur ex-
iſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumfe-
rentiis B C, E F, et duobus angulis B G C, E H F; ſumpta
ſunt circumferentiæ quidem B C, et B G C anguli, æqui-
multiplicia; videlicet circumferentia B L et B G L an-
gulus: circumferentiæ vero E F, et E H F anguli, æqui-
multiplicia; nempe circumferentia E N et angulus E H N.
Atque oſtenſum eſt ſi circumferentia B L ſuperat cir-
cumferentiam E N, et B G L angulum ſuperare angulum
E H N; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem
eſſe. Ut [u] igitur circumferentia B C ad E F circumfe- [u] Def. 5.
rentiam, ita angulus B G C ad angulum E H F. Sed ut quinti.
B G C angulus ad angulum E H F, ita [x] angulus B A C [x] 15. quinti.
ad E D F angulum. Uterque enim utriuſque eſt du- [y] 20. tertii.
plex [y]. Ut igitur B C circumferentia ad circumferen-
tiam E F, ita et angulus B G C ad angulum E H F, et
angulus B A C ad E D F angulum. Quare in circulis
æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam
circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad
circumferentias inſiſtant. Dico inſuper et ut B C cir-
cumferentia ad circumferentiam E F, ita eſſe ſectorem
G B C ad H F E ſectorem. Jungantur enim B C, C K; et
ſumptis in circumferentiis B C, C K punctis X, O, jun-
gantur et B X, X C, C O,
O K. Itaque quoniam
duæ B G, G C duabus C G,
G K æquales ſunt, et an-
gulos æquales continent;
erit et baſis B C baſi C K
æqualis. Æquale [z] igi- [z] 4. primi.
tur eſt G B C triangulum



triangulo G C K. Et quoniam circumferentia B C cir-
cumferentiæ C K eſt æqualis, et reliqua circumferentia,
quæ complet totum circulum A B C, æqualis eſt reliquæ,
quæ eundem circulum complet. Quare et angulus
B X C angulo C O K eſt æqualis [a]. Simile igitur eſt B X C [a] 27. tertii.

[a] Def. 11. tertii. segmentum[a] segmento C O K; et sunt in æqualibus rectis lineis B C, C K. Quæ autem in æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, et inter se[b] æqualia sunt. Ergo segmentum B X C est æquale segmento C O K. Est autem et B G C triangulum triangulo C G K æquale. Et totus igitur sector B G C sectori C G K æqualis erit. Eâdem ratione et G K L sector utrique ipsorum G B C, G C K est æqualis. Sectores igitur B G C, C G K, K G L, quotquot fuerint, æquales sunt inter se. Similiter et sectores H E F, H F M, H M N inter se sunt æquales. Quotuplex igitur est L B circumferentia circumferentiæ B C, totuplex est et G B L sector sectoris G B C. Eâdem ratione et quotuplex est circumferentia N E circumferentiæ E F, totuplex est et H E N sector sectoris H E F. Sed si circumferentia B L circumferentiæ E N est æqualis, et sector B G L æqualis est sectori E H N; et si circumferentia B L superat circumferentiam E N, superat et B G L sector sectorem E H N; et si minor, minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem B C, E F circumferentiis, duobus vero sectoribus G B C, E H F; sumpta sunt æquimultiplicia circumferentiæ quidem B C, et G B C sectoris, circumferentia B L et G B L sector; circumferentiæ vero E F, et sectoris H E F, æquimultiplicia, circumferentia E N et H E N sector: atque ostensum est si B L circumferentia superat circumferentiam E N, et sectorem B G L superare sectorem E H N; et si æqualis, æqualem esse; et si minor, minorem. Est igitur ut B C circumferentia[c] ad circumferentiam E F, ita sector G B C ad H E F sectorem. *Q. E. D.*



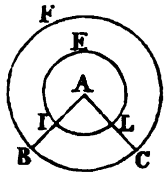
[b] 24. tertii.

[c] Def. 5. quinti.

Cor. 1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus, cui insistit, ad totam circumferentiam: nam ut angulus B A C ad rectum, ita B C arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus B A C ad quatuor rectos, ut arcus B C ad totam circumferentiam.

Cor. 2. Inæqualium circulorum arcus I L, B C qui æquales

æquales ſubtendunt angulos, ſive ad centra, ſive ad peripherias, ſunt ſimiles. Nam eſt I L ad totam peripheriam I L E, ut angulus I A L ad quatuor rectos: eſt vero ut I A L ſeu B A C ad quatuor rectos, ita arcus B C ad totam peripheriam B C F. Quare ut I L ad totam peripheriam I L E, ita B C ad totam peripheriam B C F. Ac proinde arcus I L, B C ſunt ſimiles.



Cor. 3. Duæ ſemidiametri A B, A C a concentricis peripheriis arcus auferunt ſimiles I L, B C.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

UNITAS eſt, ſecundum quam unumquodque eorum quæ ſunt unum dicitur.

II.

Numerus autem, ex unitatibus conſtans multitudo.

III.

Pars eſt numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

IV.

Partes autem, quando non metitur.

V.

Multiplex eſt major minoris, quando minor majorem metitur.

VI.

Par numerus eſt, qui bifariam dividitur.

VII.

Impar vero, qui bifariam non dividitur; vel qui a pari numero unitate differt.

VIII.

Pariter par numerus eſt, quem par numerus per parem numerum metitur.

 IX.

IX.

Pariter vero impar eſt, quem par numerus per numerum imparem metitur.

X.

Impariter vero impar numerus eſt, quem impar numerus per numerum imparem metitur.

XI.

Primus numerus eſt, quem unitas ſola metitur.

XII.

Primi inter ſe numeri ſunt, quos ſola unitas communis menſura metitur.

XIII.

Compoſitus numerus eſt, quem numerus aliquis metitur.

XIV.

Compoſiti inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis communis menſura metitur.

XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot unitates ſunt in ipſo, toties componitur multiplicatus, et aliquis gignitur.

XVI.

Quando duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus eſt, planus appellatur; latera vero ipſius, numeri ſeſe multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, factus ſolidus appellatur: latera vero ipſius, numeri ſeſe multiplicantes.

XVIII.

Quadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis; vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter; vel qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales ſunt, quando primus ſecundi et tertius quarti æquimultiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes.

XXI.

Similes plani et folidi numeri funt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus eft, qui fuis ipfius partibus eft æqualis.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Si duobus numeris inæqualibus expofitis detracto femper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad reliqua fuerit unitas; numeri a principio pofiti primi inter fe erunt.

Duobus enim inæqualibus numeris A B, C D detracto femper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad reliqua fuerit unitas: dico numeros A B, C D inter fe primos effe; hoc eft, ipfos A B, C D unitatem folam metiri.

A . H . . F . . . . B
C . . G . . . D
E ----

Si enim A B, C D non fint primi inter fe, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, fitque E; et C D quidem ipfum A B metiens relinquat feipfo minorem F A; A F vero metiens D C relinquat feipfo minorem G C; et G C metiens F A unitatem H A relinquat.

Quoniam igitur numerus E ipfum C D metitur, C D vero metitur B F; et E ipfum B F metitur. Metitur autem et totum B A; ergo et reliquum A F metietur. Sed A F metitur D G: quare et E ipfum D G metietur. Metitur autem et totum D C: ergo et reliquum C G metietur. At C G metitur F H; et igitur E ipfum F H metietur. Sed et metitur totum F A; et igitur numerus E metietur reliquam A H unitatem, quod [a] fieri non poteft: non igitur ipfos A B, C D metietur aliquis numerus. Ergo A B, C D primi inter fe funt. *Q. E. D.*

[a] Def. 3. hujus.

PROP. II. PROBL. [II.]

Duobus numeris datis non primis inter fe, maximam eorum communem menfuram invenire.

Sint dati duo numeri non primi inter fe A B, C D, quorum minor fit C D: oportet ipforum A B, C D maximam communem menfuram invenire.

Si igitur C D metitur A B, cum etiam ſeipſum metiatur; erit C D ipſorum C D, A B communis menſura. Et perſpicuum eſt eam maximam eſſe; nullus enim major quam C D ipſum C D metietur.

A . . . . B
C . . . . D

Si vero C D non metitur A B; ipſorum A B, C D detracto ſemper minore de majore, unitas nunquam relinquetur. Nam ſi tandem relinquatur, erunt A B, C D primi inter ſe: quod hypotheſi contrarium eſt. Relinquetur igitur numerus quidam, qui metietur præcedentem. Et C D quidem ipſum A B metiens relinquat ſeipſo minorem A E; A E vero metiens C D relinquat ſeipſo minorem C F; C F vero ipſum A E metiatur. Itaque quoniam C F ipſum A E metitur, A E vero ipſum D F; et C F ipſum D F metietur. Sed et metitur ſeipſum; et totum igitur C D metietur. At C D ipſum B E metitur: ergo et C F metitur B E. Metitur autem et E A; et totum igitur B A metietur. Sed et metitur C D: ergo C F ipſos A B, C D metitur; ac propterea C F ipſorum A B, C D eſt communis menſura. Dico etiam maximam eſſe. Si enim C F non eſt maxima communis menſura ipſorum A B, C D; ipſos A B, C D metietur aliquis numerus major ipſo C F. Metiatur, ſitque G. Et quoniam G ipſum C D metitur; C D vero ipſum B E; et G ipſum B E metitur. Metitur autem et totum B A; et reliquum igitur A E metietur. Sed A E metitur D F: ergo et G ipſum D F metietur. Metitur autem et totum D C: quare et reliquum C F metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur ipſos A B, C D numeros metietur numerus aliquis major ipſo C F. Ergo C F eſt ipſorum A B, C D maxima communis menſura. *Q. E. D.*

A . . . . E . . . . . . B
C . . F . . . . D
G - - - -

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem menſuram metiri.

PROP.

PROP. III. PROBL. [III.]

Tribus numeris datis non primis inter ſe, maximam ipſorum communem menſuram invenire.

Sint dati tres numeri non primi inter ſe A, B, C: oportet ipſorum A, B, C maximam communem menſuram invenire.

Sumatur duorum A, B maxima communis menſura D [b]: itaque D vel ipſum C metitur, vel non metitur. Metiatur primum; metitur autem et ipſos A, B: ergo D numeros A, B, C metitur; et ob id ipſorum eſt communis menſura. Dico et maximam eſſe. Si enim D non eſt ipſorum A, B, C maxima communis menſura; metietur eos aliquis numerus major ipſo D. Metiatur, et ſit E. Quoniam igitur E metitur numeros A, B, C, et ipſos A, B metietur, et [c] ipſorum A, B maximam communem menſuram. Sed ipſorum A, B maxima communis menſura eſt D: ergo E ipſum D metitur, major minorem, quod fieri non poteſt. Non igitur A, B, C numeros numerus aliquis major ipſo D metietur: ergo D ipſorum A, B, C maxima eſt communis menſura.

A . . . .
B . . . . . .
C . . . .
D . .
E - - - -

[b] 2. hujus.

[c] Cor. 2. hujus.

Non metiatur autem D ipſum C. Dico primum numeros D, C non eſſe primos inter ſe. Quoniam enim A, B, C non ſunt inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus; et qui metitur ipſos A, B, C, et ipſos A, B metietur, et [c] ipſorum A, B maximam communem menſuram, videlicet D, metietur. Metitur autem et ipſum C: ergo ipſos D, C numerus aliquis metietur; ideoque D, C non ſunt inter ſe primi. Sumatur ipſorum maxima communis menſura E [b]. Et quoniam E ipſum D metitur, et D metitur ipſos A, B, et E ipſos A, B metietur. Metitur autem et C; ergo et ipſos A, B, C metietur: eritque E ipſorum A, B, C communis menſura. Dico et maximam eſſe. Si enim E non eſt ipſorum A, B, C maxima communis menſura, metietur A, B, C numeros numerus aliquis major ipſo E. Metiatur, ſitque F. Et quoniam F metitur numeros A, B, C;

A . . . .
B . . . .
C . . . .
D . . . . . .
E . .
F - - -

A, B, C; et ipſos A, B, et ipſorum A, B maximam communem menſuram metietur. Sed ipſorum A, B maxima communis menſura eſt D: ergo F ipſum D metitur. Metitur autem et ipſum C: quare F et ipſos D, C; et igitur ipſorum D, C maximam communem menſuram metietur. Sed ipſorum C, D maxima communis menſura eſt E: ergo F ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B, C numeros numerus aliquis major ipſo E metietur. Ergo E ipſorum A, B, C maxima eſt communis menſura.

A.................
B............
C....
D......
E..
F---

Tribus igitur numeris datis non primis inter ſe, eorum maxima communis menſura inventa eſt. *Q. E. F.*

Cor. Ex his manifeſtum eſt, ſi numerus numeros tres metiatur, et ipſorum maximam communem menſuram metiri.

Eodem modo et pluribus numeris datis, maximam communem menſuram inveniemus.

[IV.] PROP. IV. THEOR.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes.

Sint duo numeri A, B C, quorum B C ſit minor: dico B C ipſius A vel partem eſſe, vel partes.

Numeri enim A, B C vel primi ſunt inter ſe, vel non. Sint prius inter ſe primi; et diviſo B C in unitates, quæ in ipſo ſunt, erit[c] unaquæque unitas, earum quæ in B C, pars aliqua ipſius A: ergo B C ipſius A partes eſt.

[c] Def. 1. & 2. hujus.

A........
B.....C

Sed non ſint A, B C inter ſe primi: itaque B C vel ipſum A metitur, vel non. Et ſiquidem metitur, erit B C pars ipſius A.

A........
B....C

Si vero non; ſumatur[d] ipſorum A, B C maxima communis menſura D; et dividatur B C in numeros ipſi D æquales B E, E F, F C. Quoniam igitur D numerum A metitur, erit D pars ipſius A. Æqualis autem eſt D unicuique ipſorum B E, E F, F C: ergo et unuſquiſque ipſorum B E, E F, F C pars eſt ipſius A: ac propterea B C ipſius A partes eſt.

[d] 2. hujus.

A........
B..E..F..C
D..

Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes. *Q. E. D.*

PROP. V. THEOR. [V.]

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et uterque utriuſque eadem pars erit, quæ unus unius.

Numerus A numeri B C pars ſit, et alter D alterius E F eadem pars, quæ eſt A ipſius B C: dico et utrumque A, D utriuſque B C, E F eandem partem eſſe, quæ eſt A ipſius B C.

Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius B C, eadem eſt et D ipſius E F; quot numeri ſunt in B C æquales ipſi A, tot erunt et in E F numeri æquales ipſi D. Dividatur B C quidem in numeros æquales ipſi A, videlicet in B G, G C; E F vero dividatur in numeros ipſi D æquales, hoc eſt, E H, H F; erit utique æqualis multitudo numerorum B G, G C multitudini ipſorum E H, H F. Et quoniam æqualis eſt B G ipſi A, et E H ipſi D; erunt B G, E H ipſis A, D, æquales. Et eâdem ratione, cum G C ſit æqualis ipſi A, et H F ipſi D; erunt G C, H F ipſis A, D æquales: quot igitur numeri ſunt in B C, æquales ipſi A, tot ſunt et in B C, E F æquales ipſis A, D. Ergo quotuplex eſt B C ipſius A, totuplex erit et uterque B C, E F utriuſque A, D. Quæ igitur pars eſt A ipſius B C, eadem pars erit et uterque A, D utriuſque B C, E F. *Q. E. D.*

A . . .
B . . . G . . . C
D . . . .
E . . . . H . . . . F

PROP. VI. THEOR. [VI.]

Si numerus numeri partes fuerit, et alter alterius eædem partes; et uterque utriuſque eædem partes erit, quæ unus unius.

Numerus enim A B numeri C partes ſit, et alter D E alterius F eædem partes, quæ A B ipſius C: dico et utrumque A B, D E utriuſque C, F eaſdem partes eſſe, quæ A B ipſius C.

A . . . G . . . B
C . . . .
D . . . . H . . . . E
F . . . .

Quoniam enim quæ partes eſt A B ipſius C, eædem eſt D E ipſius F; quot ſunt in A B partes ipſius C, tot erunt et in D E partes

partes ipſius F. Dividatur A B quidem in partes ipſius C, videlicet A G, G B; D E vero dividatur in partes ipſius F, hoc eſt D H, H E.

Erit ipſorum A G, G B multitudo æqualis multitudini ipſorum D H, H E. Et quoniam quæ pars eſt A G ipſius C, eadem eſt pars et D H ipſius F; quæ pars eſt A G ipſius C, eadem pars erit[e] et uterque A G, D H utriuſque C, F. Similiter ratione et quæ pars eſt G B ipſius C, eadem pars erit et uterque G B, H E utriuſque C, F. Quæ igitur partes eſt A B ipſius C, eædem partes eſt et uterque A B, D E utriuſque C, F. *Q. E. D.*

A . . . G . . . B
C . . . .
D . . . . H . . . . E
F . . . .

[e] 5. hujus.

[VII.] PROP. VII. THEOR.

Si numerus numeri fuerit pars, quæ ablatus ablati; et reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim A B numeri C D pars ſit, quæ ablatus A E ablati C F: dico et reliquum E B reliqui F D eandem partem eſſe, quæ eſt totus A B totius C D.

Quæ enim pars eſt A E ipſius C F, eadem pars ſit et E B ipſius C G. Et quoniam quæ pars eſt A E ipſius C F, eadem pars eſt et E B ipſius C G; quæ A E ipſius C F, eadem pars eſt[f] et A B ipſius G F. Quæ autem pars eſt A E ipſius C F, eadem pars ponitur et A B ipſius C D: quæ igitur pars eſt A B ipſius G F, eadem eſt et A B ipſius C D: quare A B utriuſque G F, C D eadem eſt pars: æqualis igitur eſt G F ipſi C D. Communis auferatur C F: ergo reliquus G C reliquo F D eſt æqualis. Et quoniam quæ pars eſt A E ipſius C F, eadem eſt et E B ipſius G C; æqualis autem eſt G C ipſi F D; quæ pars eſt A E ipſius C F, eadem erit et E B ipſius F D. Sed quæ pars eſt A E ipſius C F, eadem eſt[g] et A B ipſius C D; ergo quæ pars eſt E B ipſius F D, eadem eſt et A B ipſius C D. Et reliquus igitur E B reliqui F D eadem pars erit, quæ totus A B totius C D. *Q. E. D.*

A . . . . E . . B
G . . . . C . . . . F . . . . D

[f] 5. hujus.

[g] ex hyp.

PROP.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si numerus numeri fuerit partes, quæ ablatus ablati; et reliquus erit reliqui eædem partes, quæ totus totius.

Numerus enim A B numeri C D ſit partes, quæ ablatus A E ablati C F: dico et reliquum E B reliqui F D eaſdem partes eſſe, quæ totus A B totius C D.

Ponatur enim ipſi A B æqualis G H: quæ igitur partes eſt G H ipſius C D, eædem eſt et A E ipſius C F. Dividatur G H quidem in partes ipſius C D, videlicet G K, K H; A E vero dividatur in partes ipſius C F, videlicet

A . . . . . . L . . . . . . E . . . . B
C . . . . F . . . . . . D
G . . . . . . M . . K . . . . . . N . . H

A L, L E: erit igitur ipſarum G K, K H multitudo æqualis multitudini ipſarum A L, L E. Et quoniam quæ pars eſt G K ipſius C D, eadem eſt et A L ipſius C F, major autem C D quam C F; et G K quam A L eſt major. Ponatur ipſi A L æqualis G M: quæ igitur pars eſt G K ipſius C D, eadem eſt et G M ipſius C F: quare [b] et reliquus M K reliqui F D eadem pars eſt, quæ totus G K totius C D. Rurſus quoniam quæ pars eſt K H ipſius C D, eadem eſt et L E ipſius C F; major autem C D quam C F: erit et K H quam L E major. Ponatur ipſi L E æqualis K N: quæ igitur pars eſt K H ipſius C D, eadem eſt et K N ipſius C F: ergo et reliquus N H reliqui F D eadem pars eſt, quæ totus K H totius C D. Oſtenſum autem eſt et reliquum M K reliqui F D eandem partem eſſe, quæ totus G K totius D C; et uterque igitur ſimul M K, N H ipſius D F eædem partes eſt, quæ totus H G totius D C [i]. Æqualis autem eſt uterque ſimul M K, N H ipſi E B; nimirum cum H G ipſi B A æqualis ſit, et G M, K N ſimul ſumpti ſimul ſumptis A L, L E. Et reliquus igitur E B reliqui F D eædem partes eſt, quæ totus A B totius C D. *Q. E. D.*

[b] 7. hujus.
[i] 6. hujus.

PROP. IX. THEOR. [IX.]

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et permutando quæ pars eſt, vel partes, primus tertii, eadem erit pars, vel eædem partes, et ſecundus quarti.

Numerus enim A numeri B C pars ſit, et alter D alterius E F eadem pars, quæ A ipſius B C; minor autem ſit A quam D: dico et permutando quæ pars eſt A ipſius D, vel partes, eandem partem eſſe et B C ipſius E F, vel eaſdem partes. Quoniam

Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius B C, eadem eſt et D ipſius E F; quot numeri ſunt in B C æquales ipſi A, tot ſunt et in E F æquales ipſi D. Dividatur B C quidem in numeros ipſi A æquales, videlicet in B G, G C; E F vero dividatur in numeros ipſi D æquales, E H, H F: erit ipſorum B G, G C multitudo æqualis multitudini ipſorum E H, H F.

A . . . .
B . . . . G C
D . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

Et quoniam numeri B G, G C inter ſe ſunt æquales, ſunt autem et æquales E H, H F; atque eſt ipſorum B G, G C multitudo æqualis multitudini ipſorum E H, H F: quæ pars eſt B G ipſius E H, vel partes, eadem pars erit et G C ipſius H F, vel eædem partes. Ergo[l] quæ pars eſt B G ipſius E H vel partes, eadem pars erit et uterque B C utriuſque E F vel eædem partes. Æqualis autem eſt B G ipſi A, et E H ipſi D. Quæ igitur pars eſt A ipſius D vel partes, eadem pars erit et B C ipſius E F vel eædem partes. *Q. E. D.*

[l] 5. & 6. hujus.

[X.] PROP. X. PROBL.

Si numerus numeri partes fuerit, et alter alterius eædem partes; et permutando quæ partes eſt primus tertii, vel pars, eædem partes erit et ſecundus quarti, vel eadem pars.

Numerus enim A B numeri C partes ſit, et alter D E alterius F eædem partes; ſit autem A B minor quam D E: dico et permutando quæ partes eſt A B ipſius D E vel pars, eaſdem partes eſſe et C ipſius F vel eandem partem.

Quoniam enim quæ partes eſt A B ipſius C, eædem partes eſt et D E ipſius F; quot ſunt in A B partes ipſius C, tot erunt et in D E partes ipſius F. Dividatur A B quidem in partes ipſius C, videlicet A G, G B; D E vero dividatur in partes ipſius F, hoc eſt, D H, H E: erit utique ipſarum A G, G B multitudo multitudini ipſarum D H, H E æqualis. Et quoniam quæ pars eſt A G ipſius C, eadem pars eſt et D H ipſius F, et permutando[k] quæ pars eſt A G ipſius D H vel partes, eadem pars erit et C ipſius F vel eædem partes. Simili ratione et quæ pars eſt G B ipſius H E vel

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . .

[k] 9. hujus.

vel partes, eadem pars erit et C ipſius F vel eædem partes: ergo[l] quæ pars eſt AG ipſius DH vel partes, eadem pars erit et AB ipſius DE vel eædem partes. Sed quæ pars eſt AG ipſius DH vel partes, eadem pars eſt et C ipſius F vel eædem partes. Et igitur quæ partes eſt AB ipſius DE vel pars, eædem partes eſt et C ipſius F vel eadem pars. *Q. E. D.*

[l] 5. & 6. hujus.

PROP. XI. THEOR. [XI.]

Si fuerit ut totus ad totum ita ablatus ad ablatum; et reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

Sit ut totus AB ad totum CD ita ablatus AE ad ablatum CF: dico et reliquum EB ad reliquum FD ita eſſe ut totus AB ad totum CD.

Quoniam enim eſt ut AB ad CD ita AE ad CF[m]: quæ pars eſt AB ipſius CD vel partes, eadem pars erit et AE ipſius CF vel eædem partes: ergo[n] et reliquus EB reliqui FD eadem pars erit vel eædem partes, quæ AB ipſius CD. Eſt igitur[m] ut EB ad FD ita AB ad CD. *Q. E. D.*

A . . . . E . . B

C . . . . . . F . . . D

[m] Def. 20. hujus.

[n] 7. & 8. hujus.

PROP. XII. THEOR. [XII.]

Si quotcunque numeri proportionales fuerint; ut unus antecedentium ad unum conſequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales, A, B, C, D; ſitque ut A ad B ita C ad D: dico ut A ad B ita eſſe A, C ad B, D.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita C ad D[o]; quæ pars eſt A ipſius B vel partes, eadem pars erit et C ipſius D vel partes; et igitur[p] uterque A, C utriuſque B, D eadem pars eſt vel partes, quæ A ipſius B. Ergo[o] ut A ad B ita eſt A, C ad B, D. *Q. E. D.*

A . .   C . . . .

B . . .   D . . . . . .

[o] Def. 20. hujus.

[p] 5. & 6. hujus.

PROP. XIII. THEOR. [XIII.]

Si quatuor numeri proportionales fuerint; et permutando proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D, ſitque ut A ad B ita C ad D: dico et permutando proportionales eſſe, videlicet ut A ad C ita eſſe B ad D.

Quoniam

Quoniam enim eſt ut A ad B ita C ad D, quæ pars eſt A ipſius B vel partes [q], eadem pars erit et C ipſius D vel eædem partes: permutando igitur [r] quæ pars eſt A ipſius C vel partes, eadem pars eſt et B ipſius D vel partes. Ergo [q] ut A ad C ita eſt B ad D. *Q. E. D.*

A . . C . . . . . .
B . . . D . . . .

[q] Def. 20. hujus.
[r] 9. & 10. hujus.

[XIV.]

PROP. XIV. THEOR.

Si fuerint quotcunque numeri, et alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur et in eâdem ratione; etiam ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint enim quotcunque numeri A, B, C, et alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur et in eâdem ratione, ſc. D, E, F; ſitque ut A ad B ita D ad E, ut autem B ad C ita E ad F: dico etiam ex æquo ut A ad C, ita eſſe D ad F.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita D ad E; erit permutando [s] ut A ad D ita B ad E. Rurſus, quoniam eſt ut B ad C ita E ad F; permutando ut B ad E ita erit C ad F, ut autem B ad E ita eſt A ad D; et igitur ut A ad D ita C ad F. Ergo permutando ut A ad C ita D ad F. *Q. E. D.*

A . . . . D . . . . . .
B . . . . . . E . . . .
C . . . . F . .

[s] 13. hujus.

[XV.]

PROP. XV. THEOR.

Si unitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur atque ſecundus quartum.

Unitas enim A numerum aliquem BC metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF: dico et permutando unitatem A æqualiter metiri numerum D, atque BC ipſum EF.

Quoniam enim A unitas æqualiter metitur numerum BC, atque D ipſum EF; quot unitates ſunt in BC, tot ſunt et in EF numeri æquales ipſi D. Dividatur BC quidem in unitates, quæ in ipſo ſunt, videlicet BG, GH, HC; EF vero dividatur in numeros ipſi D æquales, EK, KL, LF. Erit igitur

A . D . .
B . G . H . C E . . K . . L . . F

ipſorum

ipſorum B G, G H, H C multitudo æqualis multitudini ipſorum E K, K L, L F. Et quoniam B G, G H, H C unitates inter ſe æquales ſunt, ſuntque numeri E K, K L, L F inter ſe æquales; et unitatum B G, G H, H C multitudo æqualis multitudini numerorum E K, K L, L F: erit ut B G unitas ad numerum E K, ita G H unitas ad numerum K L, et unitas H C ad L F numerum. Et[t] ut[t] unus antecedentium ad unum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes: eſt igitur ut unitas B G ad numerum E K ita B C ad E F. Æqualis autem eſt B G unitas unitati A, et E K numerus numero D: quare ut unitas A ad numerum D, ita eſt B C ad E F. Igitur[u] unitas A numerum D æqualiter metitur, atque B C ipſum E F. *Q. E. D.*

[t] 12. hujus.
[u] Def. 20. hujus.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si duo numeri ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipſis inter ſe æquales erunt.

Sint duo numeri A, B; et A quidem ipſum B multiplicans faciat C; B vero multiplicans A faciat D: dico C ipſi D æqualem eſſe.

Quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit C; [x]metietur B ipſum C per unitates, quæ ſunt in A. Metitur autem et E unitas numerum A per unitates, quæ in ipſo ſunt: igitur E unitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipſum C: quare permutando[y] unitas E numerum B æqualiter metitur atque A ipſum C. Rurſus, quoniam B ipſum A multiplicans fecit D; A metietur ipſum D per unitates, quæ ſunt in B. Metitur autem et E unitas numerum B per unitates, quæ in ipſo ſunt: ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipſum D. Sed E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipſum C: igitur A utrumque ipſorum C, D æqualiter metitur. Erit ergo C ipſi D æqualis. *Q. E. D.*

E .
A . .   B . . .
C . . . . . .   D . . . . . .

[x] Def. 15. hujus.
[y] 15. hujus.

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; facti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B, C multiplicans faciat ipſos D, E: dico ut B ad C ita eſſe D ad E.

Quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit D; metietur

[z] Def. 15. hujus. tietur B ipſum D per unitates, quæ ſunt in A[z]. Metitur autem et F unitas numerum A per unitates, quæ in ipſo ſunt: igitur F unitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipſum D. Ergo[a] ut F unitas ad numerum A, ita eſt B ad D. Eâdem ratione ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. Quare ut B ad D, ita C ad E; et permutando[b] ut B ad C, ita D ad E. *Q. E. D.*

F .
A . .
B . . .   C . . . .
D . . . . . .   E . . . .

[a] Def. 20. hujus.
[b] 13. hujus.

[XVIII.] PROP. XVIII. THEOR.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem C multiplicantes faciant ipſos D, E: dico ut A ad B ita eſſe D ad E.

Quoniam enim A ipſum C multiplicans fecit D, et C multiplicans A[c] ipſum D fecit. Eâdem ratione et C ipſum B multiplicans fecit E: numerus igitur C duos numeros A, B multiplicans ipſos D, E fecit. Eſt igitur[d] ut A ad B ita D ad E. *Q. E. D.*

A . . .   B . . . .
C . .
D . . . . . .   E . . . .

[c] 16. hujus.
[d] 17. hujus.

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo et quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex ſecundo et tertio: et ſi numerus, qui fit ex primo et quarto, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo et tertio; quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D; ſitque ut A ad B, ita C ad D; et A quidem ipſum D multiplicans faciat E; B vero multiplicans ipſum C faciat F: dico E eſſe æqualem ipſi F.

A enim multiplicans C faciat G. Quoniam igitur A ipſum quidem C multiplicans fecit G, ipſum vero D multiplicans fecit E; numerus A duos numeros D, C multiplicans fecit ipſos G, E: eſt igitur[e] ut C ad D, ita G ad E. Ut autem C ad D, ita A ad B: quare ut A ad B, ita G ad E. Rurſus, quoniam A ipſum C multi-

[e] 17. hujus.

plicans

plicans fecit G; et B ipsum C multiplicans fecit F: duo numeri A, B numerum quendam C multiplicantes fecerunt ipsos G, F; igitur [f] ut A ad B, ita est G ad F. Sed ut A ad B, ita G ad E: ergo ut G ad E, ita est G ad F: igitur G ad utrumque ipsorum E, F eandem rationem habet. Erit igitur E ipsi F æqualis. [f] 18. hujus.

A . . . . . .
B . . . .
C . . .
D . .
E . . . .
F . . . .
G . . . .

Sed sit E æqualis ipsi F: dico ut A ad B ita esse C ad D.

Iisdem enim constructis, quoniam A ipsos C, D multiplicans fecit G, E; erit ut C ad D, ita G ad E. Est autem E ipsi F æqualis: ut igitur G ad E, ita G ad F. Sed ut G ad E, ita C ad D: ergo ut C ad D, ita G ad F. Ut autem G ad F, ita [f] A ad B. Quare ut A ad B, ita C ad D. *Q. E. D.*

Cor. 1.* Si primus sit ad secundum ut tertius ad quartum; factum ex secundo et tertio primus quarto, et quartus primo metietur.

Cor. 2.* Propositis tribus numeris, si factum ex secundo et tertio primus non metiatur, non datur tribus propositis proportione quartus.

PROP. XX. THEOR. [XX.]

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit a medio: si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei qui a medio, tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales A, B, C; sitque ut A ad B ita B ad C: dico numerum qui fit ex A, C æqualem esse ei, qui fit ex B.

Ponatur enim ipsi B æqualis D; est igitur ut A ad B ita D ad C: ergo [g] qui fit ex A, C æqualis est ei, qui ex B, D. Qui autem fit ex B, D est æqualis ei, qui fit ex B; æqualis etenim est B ipsi D. Qui igitur fit ex A, C ipsi, qui fit ex B, est æqualis. [g] 19. hujus.

A . . . .
B . . . . . .
D . . . . . .
C . . . .

Sed qui fit ex A, C æqualis sit ei, qui ex B: dico ut A ad B ita esse B ad C.

 Quoniam

Quoniam enim qui ex A, C fit æqualis eſt ei, qui fit ex B; qui autem ſit ex B eſt æqualis ei, qui ex B, D:
h 19. hujus. erit[h] ut A ad B ita D ad C. Sed B ipſi D eſt æqualis. Ut igitur A ad B ita eſt B ad C. *Q. E. D.*

Cor. 1.* Si primus ſit ad ſecundum ut ſecundus ad tertium, quadratum ex ſecundo primus metietur tertio, et tertius primo.

Cor. 2.* Duobus propoſitis, ſi quadratum ſecundi primus non metiatur, non datur duobus propoſitis proportione tertius.

SCHOLION.*

Si numerus numeros multiplicaverit, et compoſitum ex omnibus idem multiplicaverit; factus multiplicatione compoſiti compoſito ex factis omnibus prioribus æqualis erit.

Numeros BC, CD, DE numerus A multiplicans faciat FG, GH, HI.

Idem autem A numerum BE, ex BC, CD, DE compoſitum, multiplicans faciat numerum K.

A . .
B . . C . . . D . . . . E
F . . . . G . . . . . . H I
K . . . .

Dico numerum K numero FI, ex factis FG, GH, HI compoſito, æqualem eſſe. Cum enim numerus A, numerum BC multiplicans, numerum FG fecerit; ut unitas ad A, ita erit BC ad FG. Pari ratione ut unitas ad eundem A, ita CD ad GH, et DE ad HI. Eſt igitur BC ad FG ut CD ad GH, et ut DE ad HI. Quare et BE,
i 12. hujus. ex omnibus BC, CD, DE compoſitus, ad FI, ex omnibus FG, GH, GI compoſitum, ut BC ad FG[i]; *i. e.* ut unitas ad A. Sed cum A multiplicans BE numerum K fecerit; ut unitas ad A, ita erit BE ad K. Quare BE ad K ut BE ad FI. Quare K et FI inter ſe æquales. *Q. E. D.*

*Cor.** Hinc quæcunque de rectangulis ſub ſegmentis lineæ rectæ in ſecundo Elementorum Libro ad Euclide demonſtrata ſunt; ea omnia in numeris etiam planis locum habent ex partibus numeri cujuſvis factis.

PROP.

PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

Minimi numeri eandem cum ipsis rationem habentium eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem.

Sint C D, E F minimi, qui eandem quam A, B inter se rationem habeant. Dico C D æqualiter ipsum A metiri, atque E F ipsum B.

Cum enim numerus A ad B eandem quam C D ad E F rationem habeat; permutando, erit A ad C D ut B ad E F [k]. Duo autem C D, E F duobus A, B singuli singulis sunt minores [l]. Quæ pars igitur est C D ipsius A, vel quæ partes, eadem pars erit E F ipsius B, vel eædem partes [m]. At vero ipsorum A, B neutiquam sunt illi C D, E F partes. Sint enim, si esse possint. Quot sunt igitur in C D partes illius A, tot erunt in E F partes illius B. Dividatur igitur C D in partes numeri A, quæ sint C G, G D; et E F dividatur in partes numeri B, quæ sint E H, H F. Jam cum C G, G D sint inter se æquales, necnon E H, H F; erit C G ad E H ut G D ad H F. Numero autem æquales illi C G, G D illis E H, H F. Erit igitur ut unus antecedentium ad suum consequentem, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes [n]. Quare ut C G ad E H ita C D ad E F. Ac propterea C G, E H, eandem inter se rationem quam C D, E F habent, minores cum sint. Quod fieri nequit. Ponuntur enim C D, E F omnium minimi, qui eandem inter se rationem habent. Numeri igitur A neque partes est C D, neque numeri B ille E F. Pars igitur C D numeri A, numerique B eadem pars E F. Æqualiter igitur C D metitur ipsum A, atque E F ipsum B. *Q. E. D.*

A . . . .
B . . . . . .
C . . . G . . D
E . . H . F

[k] 13. hujus.
[l] ex hyp.
[m] Def. 3, 4. & 20. hujus.
[n] 12. hujus.

PROP. XXII. THEOR. [XXII.]

Si sint tres numeri, et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eâdem ratione; sit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint tres numeri A, B, C, et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eâdem ratione sc. D, E, F; sitque perturbata eorum proportio, ut A quidem ad B ita sit E ad F, ut autem B ad C ita D ad E: dico etiam ex æquo ut A ad C ita esse D ad F.

Quoniam enim est ut A ad B ita E ad F; qui fit ex
[o] 19. hujus. A, F æqualis erit[o] ei, qui ex B, E. Rursus, quoniam est ut B ad C ita D ad E; qui fit ex C, D æqualis erit ei, qui ex B, E.

A . . . . . . D . . . .
B . . . . E . . . .
C . . . F . . . . . .

Ostensum autem est et qui fit ex A, F æqualem esse ei, qui ex B, E: ergo et qui fit ex A, F æqualis est ei, qui fit ex C, D. Igitur[o] ut A ad C ita D ad F. *Q. E. D.*

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

Numeri primi inter se minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Sint numeri A, B primi inter se: dico eos minimos esse omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Sint enim C, D minimi omnium in ratione A ad B.
[p] 21. hujus. Quoniam igitur[p] minimi numeri eandem cum ipsis rationem habentium, eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem,

A . . . . . B . . . .
C ----- D ----
E ----

hoc est, antecedens antecedentem et consequens consequentem; numerus C ipsum A æqualiter metietur, atque D ipsum B. Quoties autem C metitur ipsum A, tot unitates sint in E. Ergo quot sunt unitates in numero E, toties D metietur B. Sed cum numerus C æqualiter
[q] ex hyp. metiatur A, ac unitas numerum E[q]; permutando, E æ-
[r] 15. hujus. qualiter metietur A, ac unitas numerum C[r]. Metitur igitur E numerum A. Similiter ostendemus E numerum B metiri. Est igitur E numerorum A, B mensura communis. Numeri autem A, B, cum sint inter se primi[q], nullam habent mensuram communem præter ipsam uni-
[s] Def. 12. tatem[s]. Unitas igitur est E. Quot vero sunt in E unitates, tot numeri sunt in A numero C æquales[q]. Cum igitur unitas sit E, numerus A numero C æqualis erit. Similiter ostendetur numerus B numero D æqualis. Sed ponuntur C, D minimi omnium in ratione numerorum A, D. Ergo et A, B minimi omnium in mutuâ ipsorum ratione. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Minimi numeri eorum, qui eandem cum ipsis rationem habent, primi inter se sunt.

Sint A, B minimi numeri eorum, qui eandem cum ipsis rationem habent: dico A, B primos inter se esse.

Si enim non sunt A, B inter se primi, eos aliquis numerus metietur. Metiatur, sitque C. Et quoties C ipsum quidem A metitur, tot unitates sint in D; quoties vero C metitur ipsum B, tot unitates sint in E.

A . . . . . . B . . . . .
C -------
D ----- E ---

Et quoniam C ipsum A metitur per unitates, quæ sunt in D; C multiplicans ipsum D fecit A. Eâdem ratione et C multiplicans E ipsum B fecit. Itaque cum numerus C duos numeros D, E multiplicans fecerit A, B; erit[s] ut[s 17. hujus.] D ad E ita A ad B. Ergo D, E in eâdem sunt ratione, in quâ A, B, minores ipsis existentes, quod[t] fieri non potest.[t ex hyp.] Non igitur A, B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A, B primi inter se sunt. *Q. E. D.*

PROP. XXV. THEOR. [XXV.]

Si duo numeri primi inter se fuerint; qui unum ipsorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A, B; et aliquis numerus C ipsum A metiatur: dico B, C inter se primos esse.

Si enim B, C non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque D. Et quoniam D ipsum C metitur, et C ipsum A; et D ipsum A metietur. Metitur autem et ipsum B. Ergo D numeros A, B metitur primos inter se existentes, quod[u] fieri non potest.[u Def. 12. hujus.] Non igitur numeros C, B numerus aliquis metietur; ideoque C B inter se primi sunt. *Q. E. D.*

A . . . . . .
B . . . . .
C . . .
D ---

PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint; et qui fit ex ipsis, ad eum primus erit.

Duo enim numeri A, B ad aliquem numerum C primi sint; et A ipsum B multiplicans faciat D: dico C, D inter se primos esse.

Si enim C, D non fint inter fe primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, fitque E.

A . .	B . . .
C	
D	
E -----	
F ---	

Et quoniam C, A primi inter fe funt, et ipfum C metitur aliquis numerus
[x] 25. hujus. E; erunt[x] E, A inter fe primi. Quoties autem E ipfum D metitur, tot unitates fint in F: quare et F metitur ipfum D per unitates, quæ funt in E: ergo E ipfum F multiplicans fecit D. Sed et A multiplicans B ipfum D fecit. Qui igitur fit ex E, F, eft æqualis ei, qui ex A, B. Si vero qui fit ex extremis æ-
[y] 19. hujus. qualis fuerit ei, qui ex mediis[y]; quatuor numeri proportionales erunt. Eft igitur ut E ad A, ita B ad F. Sunt
[z] 23. hujus. autem A, E inter fe primi; et qui primi etiam[z] minimi funt; minimi vero eandem cum ipfis rationem habentium eos, qui eandem habent rationem, æqualiter meti-
[a] 21. hujus. untur[a], major majorem, minor minorem, hoc eft, antecedens antecedentem et confequens confequentem: ergo E ipfum B metitur. Metitur autem et ipfum C: quare E ipfos B, C metitur, primos inter fe exiftentes: quod fieri non poteft. Non igitur C, D numeros numerus aliquis metietur; ac propterea C, D inter fe primi funt. *Q. E. D.*

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

Si duo numeri primi inter fe fuerint; qui fit ab uno ipforum, ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri inter fe primi A, B; et A feipfum multiplicans faciat C: dico B, C inter fe primos effe.

A . .	B . . .
C	
D . .	

Ponatur enim ipfi A æqualis D. Et quoniam A, B funt primi inter fe, æqualis autem A ipfi D; et D, B inter fe primi erunt. Uterque igitur ipforum A, D ad B pri-
[b] 26. hujus. mus eft: ergo et qui ex A, D fit[b], primus erit ad B. Sed qui fit ex A, D, eft numerus C. Quare C, B inter fe primi funt. *Q. E. D.*

[XXVIII.] PROP. XXVIII. THEOR.

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint; et qui fiunt ex ipfis, inter fe primi erunt.

Duo enim numeri A, B ad duos numeros C, D, uterque ad utrumque, primi fint; et A quidem ipfum B multiplicans

multiplicans faciat E; C vero multiplicans D faciat F: dico E, F inter ſe primos eſſe.

Quoniam enim uterque ipſorum A, B ad C primus eſt; et qui fit ex A, B [c], ad C primus erit. Qui autem fit ex A, B eſt E: ergo E, C primi inter ſe ſunt. Eâdem ratione et E, D primi ſunt inter ſe. Uterque igitur ipſorum C, D ad E primus eſt: ac propterea [c] qui fit ex C, D, primus erit ad E. Qui vero ex C, D fit, eſt numerus F. Ergo E, F primi inter ſe erunt. *Q. E. D.*

c 26. hujus.

A . . . B . . . . .
E . . . .
C . . D . . . .
F . . . .

PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, et uterque ſeipſum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipſis primi inter ſe erunt: et ſi numeri a principio poſiti eos, qui facti ſunt, multiplicantes aliquos faciant; et ipſi inter ſe primi erunt; et ſemper circa extremos hoc continget.

Sint duo numeri inter ſe primi A, B, et A ſeipſum quidem multiplicans faciat C, multiplicans vero C faciat E; et B ſeipſum multiplicans faciat D, multiplicans autem D faciat ipſum F: dico C, D et E, F inter ſe primos eſſe.

Quoniam enim A, B primi inter ſe ſunt; et A ſeipſum multiplicans fecit C; erunt [d] C, B primi inter ſe. d 27. hujus.

A . . B . . .
C . . . . D . . . .
E . . . . F . . . .

Et quoniam C, B inter ſe primi ſunt, et B ſeipſum multiplicans fecit D; erunt C, D inter ſe primi. Rurſus quoniam A, B primi ſunt inter ſe, et B ſeipſum multiplicans fecit D; A, D inter ſe primi erunt. Cum igitur duo numeri A, C ad duos numeros B, D, uterque ad utrumque, primi ſint; et qui ex A, C fit ad eum, qui fit ex B, D [f], primus erit. Sed qui fit ex A, C eſt numerus E, qui vero ex B, D fit eſt F. Ergo E, F primi inter ſe ſunt. *Q. E. D.*

f 28. hujus.

PROP.

[XXX.] PROP. XXX. THEOR.

Si duo numeri primi inter se fuerint; et uterque simul ad utrumque ipsorum primus erit: quod si uterque simul ad unum aliquem ipsorum sit primus, et numeri a principio positi inter se primi erunt.

Componantur enim duo numeri inter se primi, A B, B C: dico et utrumque simul, videlicet A C, ad utrumque ipsorum A B, B C primum esse.

Si enim non sint C A, A B inter se primi, metietur eos numerus aliquis. Metiatur, et sit D. Quoniam igitur D metitur ipsos C A, A B; et reliquum B C metietur. Metitur autem et B A: ergo D ipsos A B, B C metitur, primos inter se existentes; quod fieri non potest. Non igitur C A, A B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A B, A C inter se primi sunt. Ergo C A ad utrumque ipsorum A B, B C est primus.

A . . . . . B C
D -------

Sint rursus C A, A B primi inter se: dico et ipsos A B, B C inter se primos esse.

Si enim A B, B C non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque D. Et quoniam D metitur utrumque ipsorum A B, B C, et totum C A metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipsos C A, A B metitur primos inter se existentes, quod fieri non potest. Non igitur ipsos A B, B C numeros numerus aliquis metietur, ideoque A B, B C inter se primi sunt. *Q. E. D.*

[XXXI.] PROP. XXXI. THEOR.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus A, et numerum B non metiatur: dico B, A inter se primos esse.

Si enim non sint B, A inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, et sit C: ergo [f] C non est unitas. Et quoniam C ipsum B metitur, A vero non metitur ipsum B; non erit C idem qui A.

[f] Def. 11. hujus.

A . . . B . . . . . .
C ----

Et quoniam C ipsos B, A metitur; metietur etiam ipsum A primum existentem, licet non sit idem cum eo; quod fieri

fieri non poteſt. Non igitur ipſos B, A numeros numerus aliquis metietur: quare A, B inter ſe primi ſunt. *Q. E. D.*

PROP. XXXII. THEOR. [XXXII.]

Si duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem faciant; eum vero, qui ex ipſis fit, metiatur aliquis numerus primus: et unum ipſorum, qui a principio poſiti ſunt, metietur.

Duo enim numeri A, B ſe invicem multiplicantes faciant C, ipſum vero C metiatur aliquis numerus primus, qui ſit D: dico D unum ipſorum A, B metiri.

Ipſum enim A non metiatur, atque eſt D numerus primus: ergo[g] A, D primi inter ſe ſunt. Et quoties D ipſum C metitur, tot unitates ſint in E. Quoniam igitur D metitur ipſum C per eas quæ ſunt in E unitates; numerus D ipſum E multiplicans fecit C. Sed et A multiplicans B ipſum C fecit. Ergo qui fit ex D, E æqualis eſt ei, qui ex A, B: eſt igitur[h] ut D ad A ita B ad E. Et ſunt D, A primi inter ſe; primi vero[i] ſunt et minimi, ſed[k] minimi eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem, hoc eſt, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem; ergo D ipſum B metitur. Similiter demonſtrabimus, ſi D non metiatur B, metiri ipſum A. Quare D metitur unum ipſorum A, B. *Q. E. D.*

A . . B . . . . . .
C . . . .
D . . .
E . . . .

g 31. hujus.
h 19. hujus.
i 23. hujus.
k 21. hujus.

PROP. XXXIII. THEOR. [XXXIII.]

Omnem numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur.

Sit compoſitus numerus A: dico primum aliquem numerum metiri ipſum A.

Quoniam enim A eſt compoſitus numerus[l], metietur ipſum aliquis numerus. Metiatur, et ſit B. Et ſi quidem primus eſt B, manifeſtum eſt quod quæritur. Si vero compoſitus, ipſum aliquis numerus metietur. Metiatur, ſitque C. Et quoniam C metitur ipſum B; B vero ipſum A; et C ipſum A metitur. Et ſi quidem primus eſt C, manifeſtum eſt quod quæritur. Si vero compoſitus, eum aliquis numerus

A . . . .
B . . . .
C . .

l Def. 13. hujus.

merus metitur; et hâc conſideratione factâ, relinquetur tandem aliquis numerus primus, et qui ipſum A metietur. Si enim non relinquitur, metientur ipſum A infiniti numeri, quorum alter altero eſt minor, quod [m] in numeris fieri non poteſt; ergo relinquetur aliquis, qui et præcedentem metietur et ipſum A.

A . . . .
B . . . .
C . .

[m] Def. 2. hujus.

Omnem igitur numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur. *Q. E. D.*

Aliter. Sit compoſitus numerus A: dico primum aliquem numerum ipſum metiri.

[n] Def. 13. hujus. Quoniam enim A compoſitus eſt [n], metietur ipſum aliquis numerus. Sit B minimus eorum, qui ipſum A metiuntur: dico B primum eſſe.

Si enim non; erit compoſitus: ergo eum aliquis numerus metietur. Metiatur, ſitque C metiens ipſum: erit igitur C minor quam B. Et quoniam C ipſum B metitur, ſed et B ipſum A; et C ipſum A metietur, minor exiſtens ipſo B, qui eſt minimus omnium qui metiuntur A; quod eſt abſurdum: igitur B non eſt compoſitus numerus. Ergo eſt primus. *Q. E. D.*

A . . . .
B . . .
C --

[XXXV.] PROP. XXXIV. PROBL.

Numeris quotcunque datis, invenire minimos omnium, qui eandem cum ipſis rationem habeant.

Sint dati quotcunque numeri A, B, C: oportet invenire minimos omnium, qui eandem cum ipſis A, B, C rationem habeant.

Vel igitur A, B, C primi inter ſe ſunt, vel non. Si [o] 23. hujus. quidem primi, et minimi erunt [o] omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

A . . . . . .   B . . . .   C . . . .
D . .
E . . .   F . . . .   G . . . . .
H ---   K ----   L -----
M --

[p] 3. hujus. Si vero non. Sumatur [p] ipſorum A, B, C maxima communis menſura D, et quoties D unumquemque ipſorum

ſorum A, B, C metitur, tot unitates ſint in unoquoque horum E, F, G; et unuſquiſque igitur ipſorum E, F, G unumquemque ipſorum A, B, C metitur per eas, quæ ſunt in D unitates: ergo E, F, G ipſos A, B, C æqualiter metiuntur; ac propterea[q] E, F, G in eâdem ſunt ratione, in quâ ipſi A, B, C. Dico eos etiam minimos eſſe. Si enim E, F, G non ſint minimi eandem cum ipſis A, B, C rationem habentium; erunt aliqui, ipſis E, F, G minores, in eâdem ratione, in quâ A, B, C. Sint H, K, L: æqualiter igitur[r] H metitur ipſum A, ac uterque ipſorum K, L utrumque B, C metitur. Quoties autem H metitur ipſum A, tot unitates ſint in M; et uterque igitur K, L utrumque B, C metitur per eas quæ ſunt in M unitates. Et quoniam H ipſum A metitur per unitates, quæ ſunt in M; et M ipſum A per unitates quæ ſunt in H metietur. Eâdem ratione et M utrumque ipſorum B, C metietur per unitates, quæ ſunt in utroque K, L. Ergo M ipſos A, B, C metitur. Rurſus, quoniam H ipſum A metitur per unitates, quæ ſunt in M; H ipſum M multiplicans fecit A. Eâdem ratione et E multiplicans D ipſum A fecit: ergo qui ex E, D fit ei qui fit ex H, M eſt æqualis: ut igitur E ad H ita[s] M ad D. Major autem eſt E quam H: ergo et M quam D eſt major, et ipſos A, B, C metitur, quod fieri non poteſt; ponitur enim D ipſorum A, B, C maxima communis menſura. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis E, F, G in eâdem ratione, in quâ A, B, C: ergo E, F, G minimi ſunt eorum, qui eandem cum ipſis A, B, C rationem habent. *Q. E. D.*

[q] 18. hujus.
[r] 21. hujus.
[s] 19. hujus.

PROP. XXXV. PROBL. [XXXVI.]

Duobus numeris datis, invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sint dati duo numeri A, B: oportet invenire minimum numerum, quem metiantur.

Numeri enim A, B vel primi inter ſe ſunt, vel non. Sint primum A, B inter ſe primi, et A ipſum B multiplicans faciat C; ergo[t] et B multiplicans A ipſum C fecit; ac propterea numeri A, B ipſum C metiuntur. Dico etiam C minimum eſſe. Sit enim D numerus aliquis eorum, quos A, B metiuntur; et quoties A ipſum

A . . .   B . . . .
C . . . .
D -------------
E ---   F ----

[t] 16. hujus.

ipsum D metitur, tot unitates sint in E, quoties autem B metitur D, tot unitates sint in F: ergo A quidem ipsum E multiplicans fecit D; B vero multiplicans F ipsum D fecit. Quare numerus, qui ex A, E fit, est æqualis ei, qui fit ex B, F: ut igitur A ad B, ita est[u] F ad E. Et sunt A, B primi, primi autem[x] et minimi; sed[y] minimi eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem. Ergo B ipsum E metitur consequens consequentem. Et quoniam A numeros B, E multiplicans fecit C, D, erit[z] ut B ad E, ita C ad D. Metitur autem B ipsum E: ergo et C ipsum D metitur. Est igitur C numero D minor. Similiter ostendetur numerus C alio quolibet eorum, quos numeri A, B metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

A . . .   B . . . .
C . . . .
D - - - - - - - - - - - -
E - - -   F - - - -

[u] 19. hujus.
[x] 23. hujus.
[y] 21. hujus.
[z] 18. hujus.

Sed non sint A, B primi inter se; et sumantur[a] minimi numeri eandem quam A, B rationem habentium, qui sint F, E: æqualis igitur est[u] qui ex A, E fit ei, qui ex B, F. Et A ipsum E multiplicans faciat C: ergo et B multiplicans F ipsum C fecit: quare A, B ipsum C metiuntur. Dico et minimum esse. Sit enim D aliquis eorum, quos A, B metiuntur; et quoties A ipsum D metitur, tot unitates sint in G, quoties autem B metitur D, tot unitates sint in H: ergo A quidem ipsum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsum D fecit: qui igitur ex A, G fit est æqualis ei, qui fit ex B, H: ut igitur A ad B, ita[u] H ad G. Sed ut A ad B, ita F ad E: ergo et ut F ad E, ita H ad G. Et[b] sunt F, E minimi; minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur[y], major majorem, et minor minorem: quare E ipsum G metitur. Et quoniam A numeros E, G multiplicans ipsos C, D fecit, ut E ad G ita erit[c] C ad D. Sed E metitur ipsum G: ergo[d] et C ipsum D metitur. Est igitur C numero D minor. Similiter ostendetur numerus C quolibet eorum, quos A, B metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

A . . . .   B . . . . . .
F . .   E . . .
C . . . .
D - - - - - - - - - - - -
G - - -   H - -

[a] 35. hujus.
[b] Per construct.
[c] 17. hujus.
[d] Def. 20. hujus.

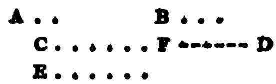
PROP.

PROP. XXXVI. THEOR. [XXXVII.]

Si duo numeri metiantur numerum aliquem; et minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipsum E: dico et E ipsum C D metiri.

Si enim E non metitur C D, E metiens F D relinquat seipso minorem C F. Et quoniam A, B ipsum E metiuntur, E vero ipsum D F; et A, B metientur D F. Sed et metiuntur totum C D: ergo et reliquum C F minorem ipso E metientur, quod[e] fieri non[e] potest. Non igitur E non metitur ipsum C D, metitur igitur. *Q. E. D.* [e] ex hyp.

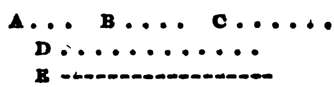


PROP. XXXVII. PROBL. [XXXVIII.]

Tribus numeris datis, invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sint dati numeri A, B, C: oportet invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sumatur[f] numerus D minimus, quem duo A, B[f] metiuntur. Itaque C vel metitur D, vel non metitur. Metiatur primum. Sed et A, B metiuntur ipsum D: ergo A, B, C ipsum D metientur. Dico illum esse minimum. Sit enim E numerus aliquis eorum, quos A, B, C metiuntur. Quoniam igitur A, B, C metiuntur ipsum E, et A, B ipsum E metiuntur: ergo[g] et minimus, quem metiuntur[g] A, B, ipsum E metietur. Minimus autem, quem metiuntur A, B, est D: quare D metitur ipsum E. Minor igitur est D numero E. Similiter ostendetur D minor quolibet eorum, quos A, B, C metiuntur. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.* [f] 36. hujus. [g] 37. hujus.



Non metiatur autem C ipsum D, et sumatur[f] minimus numerus E, quem C, D metiantur. Itaque quoniam A, B metiuntur ipsum D; D vero ipsum E: et A, B ipsum E metientur. Metitur autem et C ipsum E:

ergo

ergo A, B, C ipſum E metiuntur. Dico illum etiam eſſe minimum. Sit enim F unus aliquis eorum, quos A, B, C metiuntur. Et quoniam A, B, C metiuntur F, et A, B [h 37. hujus.] ipſum F metientur: ergo[h] et minimus, quem A, B metiuntur, metietur ipſum F. Minimus autem, quem A, B metiuntur, eſt D: quare D ipſum F metitur. Sed et C metitur ipſum F: ergo D, C ipſum F metiuntur; ac propterea minimus, quem metiuntur D, C, metietur et F. [i Per conſtruct.] Sed[i] minimus, quem metiuntur D, C, eſt E: ergo E ipſum F metitur. Minor igitur eſt E numero F. Similiter oſtendetur E alio quolibet eorum, quos A, B, C metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

A . . B . . . C . . . .
D . . . . . .
E . . . .
F ----------------

SCHOLION.*

Reliqua tria hujus Libri Theoremata vix credo ab Euclide fuiſſe.

[XXXIX.]

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si numerum numerus aliquis metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

Numerum enim A numerus aliquis B metiatur: dico A partem habere ab ipſo B denominatam.

Quoties enim B ipſum A metitur, tot unitates ſint in C; et quoniam B metitur ipſum A per eas, quæ ſunt in C unitates; metitur autem et unitas D ipſum C per unitates, quæ in ipſo ſunt; et D unitas ipſum C numerum æqualiter metietur, atque B ipſum A: quare permutando[k] unitas D ipſum B numerum æqualiter metietur, atque C ipſum A: quæ igitur pars eſt unitas D ipſius B numeri, eadem pars eſt et C ipſius A. Sed unitas D ipſius B numeri pars eſt ab eo denominata: ergo et C ipſius A pars eſt denominata ab ipſo B. Quare A partem habet ſc. C ab ipſo B denominatam. *Q. E. D.*

[k 15. hujus.]

A . . . .
B . . .
C . . . .
D .

PROP.

PROP. XXXIX. THEOR. [XL.]

Si numerus partem quamcumque habeat; eum numerus a parte denominatus metietur.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B, et ab ipsâ parte B denominatus sit numerus C: dico C ipsum A metiri.

Quonian enim B ipsius A pars est, et denominata ab ipso C; est autem et unitas D ipsius C numeri pars ab ipso denominata: quæ igitur pars est unitas D ipsius C numeri, eadem pars est et B ipsius A: ergo unitas D æqualiter metitur ipsum C numerum, atque B ipsum A; et permutando [l] unitas [l] 15. hujus. D ipsum B numerum æqualiter metitur, atque C ipsum A. Ergo C ipsum A metitur. *Q. E. D.*

A . . . .
B . .
C . . . . . .
D .

PROP. XL. PROBL. [XLI.]

Numerum invenire, qui minimus cum sit datas partes habeat.

Sint datæ partes A, B, C: oportet numerum invenire, qui cum minimus sit habeat datas partes A, B, C.

Sint ab ipsis A, B, C partibus denominati numeri D, E, F, et sumatur [m] minimus [m] 38. hujus. numerus G, quem ipsi D, E, F metiuntur. Quoniam igitur D, E, F metiuntur ipsum G; habebit [n] G partes ab ipsis D, E, F [n] 39. hujus. denominatas. Partes autem denominatæ ab ipsis D, E, F [o] sunt [o] Per construct. A, B, C; ergo G partes A, B, C habet. Dico et minimum esse. Si enim G non sit minimus, partes habens A, B, C, erit numerus aliquis minor ipso G, qui easdem partes habeat. Sit H. Quoniam igitur H partes habet A, B, C; eum [p] metientur numeri ab ipsis A, B, C par- [p] 40. hujus. tibus denominati. Sunt autem hi numeri D, E, F: ergo D, E, F ipsum H metientur minorem ipso G, quod [o] fieri non potest. Non igitur erit aliquis numerus minor ipso G, qui partes A, B, C habeat. *Q. E. D.*

A $\frac{1}{2}$ D . .
B $\frac{1}{3}$ E . . .
C $\frac{1}{4}$ F . . . .
G . . . .
H ---------------

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER OCTAVUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Si ſint quotcunque numeri, quorum extremi ſint inter ſe primi; minimi erunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

SINT quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D primi inter ſe ſint: dico A, B, C, D minimos eſſe omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

Si enim non, ſint minores ipſis A, B, C, D numeri E, F, G, H, et in eâdem ratione. Et quoniam A, B, C, D

A,* 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.
E ---	F ----	G -----	H ------

ſunt in eâdem ratione, in quâ E, F, G, H, atque eſt ipſorum A, B, C, D multitudo æqualis multitudini ipſorum E, F, G, H : erit ex æquo [a] ut A ad D ita E ad H. Et [a] 14. ſept. ſunt A, D primi; primi autem et minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem rationem habent [b], [b] 21. ſept. antecedens antecedentem et conſequens conſequentem: ergo A ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt. Non igitur E, F, G, H minores ipſis A, B, C, D exiſtentes in eâdem ſunt ratione cum ipſis: ac propterea

* *In hoc et ſequenti libro Literis adjecimus numeros illis reſpondentes; ne ingens punctorum multitudo, quandoque ex neceſſitate adhibenda, moleſtiam crearet lectoribus.*

A, B, C, D minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium. *Q. E. D.*

[II.] PROP. II. PROBL.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in datâ ratione.

Sit data ratio in minimis numeris, ea sc. quam habet A ad B: oportet numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperaverit, in ratione A ad B.

Imperentur quatuor; et A seipsum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat D; et B seipsum multiplicans faciat E; et adhuc A multiplicans C, D, E ipsos F, G, H faciat; B vero multiplicans E faciat K.

Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit C, multiplicans vero B ipsum
D fecit, numerus A   A, 2.   B, 3.
duos numeros A, B   C, 4.   D, 6.   E, 9.
multiplicans fecit C, D: F, 8.   G, 12.   H, 18.   K, 27.
[c] 17. sept. est igitur[c] ut A ad B,
ita C ad D. Rursus, quoniam A ipsum B multiplicans fecit D, et B seipsum multiplicans fecit E; uterque ipsorum A, B multiplicans B utrumque ipsorum D, E fecit:
[d] 18. sept. ut igitur A ad B, ita[d] D ad E. Sed ut A ad B, ita C ad D: ergo et ut C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros C, D multiplicans ipsos F, G fecit: ut C ad D, ita erit F ad G. Ut autem C ad D, ita erat A ad B; quare ut A ad B, ita F ad G. Rursus, quoniam A numeros D, E multiplicans fecit G, H: erit ut D ad E, ita G ad H. Sed ut D ad E, ita A ad B: ergo ut A ad B, ita G ad H. Et quoniam A, B ipsum E multiplicantes fecerunt H, K; erit ut A ad B, ita H ad K. Ostensum autem est et ut A ad B, ita esse et F ad G, et G ad H: ergo ut F ad G, ita G ad H, et H ad K: numeri igitur C, D, E et etiam F, G, H, K proportionales sunt in ratione, quam habet A ad B. Dico etiam et minimos esse. Nimirum tres C, D, E in ternis minimos, quatuor item F, G, H, K
[e] ex hyp. minimos in quaternis. Quoniam enim[e] A, B minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium;
[f] 23. sept. minimi vero eandem cum ipsis rationem habentium[f] et primi sunt inter se: erunt ipsi A, B inter se primi. Et uterque quidem ipsorum A, B seipsum multiplicans utrumque C, E fecit; utrumque vero C, E multiplicans fecit

fecit utrumque F, K: ergo[g] C, E et F, K primi inter se sunt. Si autem sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et eorum extremi sint inter se primi; minimi[h] erunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium: ergo et C, D, E et etiam F, G, H, K minimi sunt omnium eandem cum ipsis A, B rationem habentium. *Q. E. D.*

g 29. sept.
h 1. hujus.

Cor. 1. Ex hoc manifestum est, si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipsis rationem habentium, extremos eorum quadratos esse; si vero quatuor, esse cubos.

Cor. 2. * Si A, B non sint omnium in datâ ratione minimi, simili tamen modo inveniendi sunt numeri deinceps proportionales, in datâ ratione ipsius A ad B, sed qui minimi non erunt.

PROP. III. THEOR. [III.]

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; eorum extremi primi inter se erunt.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: dico eorum extremos A, D inter se primos esse.

Sumantur enim[l] duo numeri minimi in ratione ipsorum A, B, C, D, qui sint E, F; tres vero G, H, K; et semper deinceps uno plures, quoad assumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipsorum A, B, C, D. Sumantur, et sint L, M, N, O.

l 2. hujus.

A, 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.
E, 2.	F, 3.		
G, 4.	H, 6.	K, 9.	
L, 8.	M, 12.	N, 18.	O, 27.

Extremi igitur ipsorum L, O primi inter se sunt. Quoniam enim E, F primi inter se sunt, et uterque ipsorum seipsum multiplicans utrumque G, K fecit; utrumque vero G, K multiplicans fecit utrumque L, O: erunt[k] et G, K et L, O primi. Et quoniam A, B, C, D minimi sunt eorum eandem cum ipsis rationem habentium; sunt autem et L, M, N, O minimi in eâdem ratione, in quâ A, B, C, D; estque ipsorum A, B, C, D multitudo æqualis multitudini ipsorum L, M, N, O: erit unusquisque ipsorum A, B, C, D unicuique ipsorum L, M, N, O æqualis: ergo A quidem est æqualis L, et D ipsi O. Et

k 29. sept.

 quoniam

quoniam L, O primi sunt inter se, L vero ipsi A æqualis, et O ipsi D; et A, D inter se primi erunt. *Q. E. D.*

[IV.] PROP. IV. PROBL.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps minimos in datis rationibus.

Sint datæ rationes in minimis numeris, videlicet ratio A ad B, et ratio C ad D, et ratio E ad F: oportet numeros invenire deinceps minimos in ratione A ad B, et in ratione C ad D; et adhuc in ratione E ad F.

[l] 36. sept. Sumatur enim[l] minimus numerus, quem B, C metiuntur; sitque G. Et quoties B metitur G, toties A ipsum H metiatur: quoties vero C ipsum G metitur, toties

A, 2. B, 5. C, 3. D, 4. E, 5. F, 6.
H, 6. G, 15. K, 20. L, 24.
N --- O ----- M ------ P --------

et D metiatur K. Itaque E ipsum K vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoties E metitur K, toties F ipsum L metiatur. Et quoniam A æqualiter

[m] 13. sept. metitur H, atque B ipsum G; erit[m] ut A ad B, ita H ad G. Eâdem ratione et ut C ad D, ita G ad K, et adhuc ut E ad F, ita K ad L. Ergo H, G, K, L deinceps proportionales sunt in ratione A ad B, et in ratione C ad D, et adhuc in ratione E ad F. Dico etiam minimos esse. Si enim non sint H, G, K, L deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F; erunt aliqui numeri minores ipsis H, G, K, L deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. Sint N, O, M, P. Et quoniam est ut A ad B ita N ad O; et sunt A, B minimi; minimi autem eos, qui eandem habent rationem[n], æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem, hoc est, antecedens antecedentem et consequens consequentem: metietur B ipsum O. Eâdem ratione et C ipsum O metietur: quare B, C metiuntur O: ac propterea[o] minimus, quem metiuntur B, C, ipsum O metietur. Minimus autem, quem metiuntur B, C[p], est G: ergo G metietur O, major minorem; quod fieri non potest. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis H, G, K, L deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F.

[n] 21. sept.

[o] 37. sept.

[p] ex hyp.

Sed

Sed non metiatur E ipsum K. Et sumatur[q] minimus[q] 36. sept. numerus, quem ipsi E, K metiuntur; sitque M. Quoties autem K metitur M, toties et uterque ipsorum H, G utrumque N, O metiatur; et quoties E metitur M, toties et F metiatur P. Quoniam igitur H ipsum N æqualiter metitur, atque G ipsum O; erit[r] ut H ad G, ita N ad O.[r] 13. sept. Ut autem H ad G, ita A ad B; quare ut A ad B, ita N ad O. Eâdem ratione ut C ad D, ita O ad M. Rursus,

A, 4.	B, 5.	C, 2.	D, 3.	E, 4.	F, 3.
H, 8.	G, 10.	K, 15.			
N, 32.	O, 40.	M, 60.	P, 45.		
Q --	R ---	S ----	T ---		

quoniam E ipsum M æqualiter metitur, atque F ipsum P; erit[r] ut E ad F, ita M ad P. Quare N, O, M, P deinceps proportionales sunt in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. Dico minimos quoque esse. Si enim non sint N, O, M, P deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F; erunt aliqui numeri minores ipsis N, O, M, P deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. Sint Q, R, S, T. Et cum sit ut Q ad R, ita A ad B; sintque A, B minimi; minimi vero eos, qui eandem habent rationem[s], æqualiter metiuntur, ante-[s] 21. sept. cedens antecedentem et consequens consequentem: numerus B ipsum R metietur. Eâdem ratione et C metietur ipsum R; ergo B, C ipsum R metiuntur; et ob id[t] minimus, quem metiuntur B, C, ipsum R metietur.[t] 37. sept. Minimus autem, quem metiuntur B, C, est G: ergo G metitur ipsum R. Atque est[r] ut G ad R, ita K ad S: quare[u] et K ipsum S metitur. Metitur autem et E ip-[u] Def. 20. sept. sum S; ideoque E, K ipsum S metiuntur; et minimus igitur, quem metiuntur E, K, metietur ipsum S. Sed minimus, quem metiuntur E, K[x], est M: ergo M ip-[x] ex hyp. sum S metietur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis N, O, M, P deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F; ergo N, O, M, P deinceps minimi sunt in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. *Q. E. D.*

[V.] PROP. V. THEOR.

*Plani numeri inter se rationem habent * ex lateribus compositam.*

Sint plani numeri A, B, et ipsius quidem A latera sint C, D numeri: ipsius vero B latera sint E, F: dico A ad B rationem habere ex lateribus compositam.

Rationibus enim datis, videlicet quam habet C ad E, et quam D ad F, sumantur [y] numeri deinceps minimi G, H, K in rationibus C ad E, et D ad F; sitque ut C ad

[y] 4. hujus.

A, 6. B, 20.
L, 12.
C, 2. D, 3. E, 4. F, 5.
G, 3. H, 6. K, 10.

E, ita G ad H: ut autem D ad F, ita H ad K. Ergo G, H, K inter se rationes habent laterum. Sed [z] ratio G ad K composita est ex ratione G ad H et ratione H ad K: quare G ad K rationem habet ex lateribus compositam. Dico igitur ut A ad B, ita esse G ad K. Numerus D ipsum E multiplicans faciat L. Et quoniam [a] D multiplicans C ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit [b] ut C ad E, ita A ad L. Ut autem C ad E, ita [c] G ad H: ergo et ut G ad H, ita A ad L. Rursus, quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L; multiplicans vero F ipsum B fecit; ut D ad F, ita erit L ad B. Sed ut D ad F, ita est H ad K; et igitur ut H ad K, ita L ad B. Ostensum autem est et ut G ad H, ita A ad L: quare ex æquo [d] ut G ad K, ita A ad B. Sed [z] G ad K rationem habet compositam ex lateribus. Ergo et A ad B rationem habebit ex lateribus compositam. *Q. E. D.*

[z] Def. 5. sexti.
[a] Def. 16. sept.
[b] 17. sept.
[c] Per construct.
[d] 14. sept.

[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, et A ipsum B non metiatur: dico neque alium aliquem ullum metiri.

* Rectius *ex laterum rationibus.*

Et

Et quidem numeros A, B, C, D, E deinceps sese non metiri, perspicuum est. Neque enim A ipsum B metitur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. Dico

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

enim A, *ex. g.* non metiri ipsum C. Nam quot sunt A, B, C, tot sumantur[e] minimi numeri eandem cum ipsis A, B, C rationem habentes, et sint F, G, H. Quoniam igitur F, G, H in eâdem sunt ratione, in quâ A, B, C, atque est ipsorum A, B, C multitudo æqualis multitudini ipsorum F, G, H; erit ex æquo[f] ut A ad C, ita F ad H. Et quoniam est ut A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipsum B, neque[g] F ipsum G metietur: non igitur unitas est F; unitas enim[h] omnem numerum metitur. Et sunt F, H primi inter se: ergo[i] neque F metitur ipsum H. Atque est ut F ad H, ita A ad C. Neque igitur A ipsum C metietur. Similiter demonstrabimus neque alium ullum aliquem metiri. *Q. E. D.*

[e] 35. sept. [f] 14. sept. [g] Def. 20. sept. [h] Def. 1. sept. [i] Def. 12. sept.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; et secundum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D; et A ipsum D metiatur: dico A ipsum quoque B metiri.

Si enim A non metitur ipsum B[k], neque alius aliquis ullum metietur, quod est absurdum: ponitur enim A ipsum D metiri. Ergo et A ipsum B metietur. *Q. E. D.*

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

[k] 6. hujus.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter alios, eandem cum ipsis rationem habentes, cadent.

Inter duos numeros A, B cadant numeri deinceps proportionales C, D; et fiat ut A ad B, ita E ad F: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem et inter E, F deinceps proportionales cadere.

Quot

Quot enim numeri sunt A, C, D, B, totidem sumantur[l] minimi numeri eandem cum ipsis A, C, D, B rationem habentium G, H, K, L: ergo[m] extremi ipsorum G, L primi inter se sunt. Et quoniam A, C, D, B ad

[l] 35. sept.
[m] 3. hujus.

A, 2.	C, 4.	D, 8.	B, 16.
G, 1.	H, 2.	K, 4.	L, 8.
E, 3.	M, 6.	N, 12.	F, 24.

ipsos G, H, K, L in eâdem sunt ratione, atque est ipsorum A, C, D, B multitudo æqualis multitudini ipsorum G, H, K, L; erit ex æquo[n] ut A ad B, ita G ad L. Ut autem A ad B, ita E ad F; et igitur ut G ad L, ita E ad F. Et sunt G, L primi; sed primi[o] sunt et minimi; minimi vero eos qui eandem rationem habent[p] æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem: ergo G æqualiter metitur ipsum E, atque L ipsum F. Quoties autem G metitur ipsum E, toties et uterque ipsorum H, K utrumque M, N metiatur. Numeri igitur G, H, K, L ipsos E, M, N, F æqualiter metiuntur: ideoque[q] G, H, K, L in eâdem sunt ratione, in quâ ipsi E, M, N, F. At G, H, K, L in eâdem sunt ratione, in quâ A, C, D, B: ergo A, C, D, B in eâdem ratione erunt, in quâ E, M, N, F. Sed[r] A, C, D, B sunt deinceps proportionales: ergo et E, M, N, F deinceps proportionales erunt. Quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem deinceps proportionales et inter E, F cadent. *Q. E. D.*

[n] 14. sept.
[o] 23. sept.
[p] 21. sept.
[q] Def. 20. sept.
[r] ex hyp.

Cor. * Hinc datis numeris duobus A, B, aliisque duobus E, F qui eandem quam A, B inter se rationem habeant; datis etiam quotcunque inter A, B analogiâ mediis; totidem inter E, F analogiâ medii quâ ratione inveniantur, satis patet.

[IX.] PROP. IX. THEOR.

Si duo numeri inter se primi fuerint, et inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter utrumque ipsorum et unitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter se primi A, B, et inter ipsos deinceps proportionales cadant C, D; exponaturque unitas E: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos A, B, totidem et inter utrumque ipsorum

rum A, B et unitatem E numeros deinceps proportionales cadere.

Sumantur enim[s] duo quidem numeri minimi F, G in[s] 35. fept. eâdem ratione, in quâ funt A, C, D, B; tres vero H, I, K, et femper deinceps uno plures, quoad fiat ipforum multitudo æqualis multitudini ipforum A, C, D, B, fumantur[t], [t] 2. hujus.

A, 8.	C, 12.	D, 18.	B, 27.
	E, 1.		
	F, 2.	G, 3.	
H, 4.	I, 6.	K, 9.	
L, 8.	M, 12.	N, 18.	O, 27.

et fint L, M, N, O. Itaque manifeftum eft[u] F feipfum [u] Per conftruct. 2. hujus. quidem multiplicantem feciffe H, multiplicantem vero H feciffe L; et G feipfum multiplicantem feciffe K, multiplicantem vero K feciffe O. Eft igitur E ad F, ut F ad H, et H ad L. Item E ad G, ut G ad K, et K ad O. Sunt igitur F, H proportione medii inter E, L; et G, K totidem proportione medii inter E, O. Quot vero funt numeri L, M, N, O, five A, C, D, B, tot funt numerorum ordines ab E ultimum ufque ordinem L, M, N, O. Quot funt igitur numeri numerorum A, B intermedii, tot funt intermedii numerorum ordines, inter E et ultimum ordinem L, M, N, O. At quot funt inter E et ordinem ultimum intermedii numerorum ordines, tot funt inter E et L, necnon inter E et O numeri proportione medii. Tot igitur funt inter E et L, necnon inter E et O, quot inter ipfos A, B numeri proportione medii. Et quoniam L, M, N, O minimi funt eandem cum ipfis F, G rationem habentium; funt autem et A, C, D, B minimi eandem quam F, G rationem habentium; atque eft ipforum L, M, N, O multitudo æqualis multitudini ipforum A, C, D, B: erit unufquifque ipforum L, M, N, O unicuique ipforum A, C, D, B æqualis: æqualis igitur eft L ipfi A, et O ipfi B. At oftenfi funt numeri F, H inter E, L proportione medii. Iidem igitur F, H inter E, A proportione medii. Similiter G, K inter E, B proportione medii. Numerorum autem F, H, necnon numerorum G, K numerus numero mediorum inter A, B oftenfus eft æqualis. Quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem et inter utrumque ipforum A, B, et unitatem E numeri deinceps proportionales cadent. *Q. E. D.*

Cor.

Cor. * Numeri inter ſe primi, inter quos unus cadit proportione medius, quadrati ſunt. Quibus autem duo intercedunt proportione medii, primis inter ſe exiſtentibus, ii cubi ſunt.

[X.]

PROP. X. THEOR.

Si inter duos numeros et unitatem deinceps proportionales numeri ceciderint; quot inter utrumque ipſorum et unitatem cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter ipſos numeri proportionales cadent.

Inter duos enim numeros A, B et unitatem C numeri deinceps proportionales cadant D, E, et F, G: dico quot inter utrumque ipſorum A, B et unitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter ipſos A, B numeros deinceps proportionales cadere.

Quoniam C unitas eſt ad D, ut D ad E; D ſeipſum multiplicans fecit E. Et cum C unitas ſit ad D, ut E ad A; D multiplicans E fecit A. Simili modo oſtendetur, F ſeipſum multiplicando feciſſe G; et multiplicando G feciſſe B. Numeri igitur D, F ſeipſum quiſque, et a ſe

A, 8. I, 12. K, 18. B, 27.
E, 4. H, 6. G, 9.
D, 2. F, 3.
C, 1.

factos multiplicando, numeros A, B fecerunt. Si capiantur igitur primum tres numeri in continuâ numerorum D, F ratione; tum in eâdem continuâ ratione quatuor; dein quinque; atque hoc ſemper fiat; in ordinem aliquem numerorum tandem devenietur, cujus A, B extremi erunt. Et ordinis illius tot erunt numeri, quot ſunt ab unitate C, ordinem illum uſque numerorum ordines. Ac proinde inter extremos A, B tot erunt intermedii, quot inter unitatem C et ordinem illum, cujus extremi A, B, intermedii numerorum ordines. Aſt tot ſunt inter unitatem C et A, tot etiam inter unitatem C et B, continuâ proportione medii, quot inter unitatem C et ordinem illum, cujus extremi ſunt A, B, intermedii numerorum ordines. Id enim patet ex 2ª hujus et duobus ejus corollariis. Tot igitur inter A et B continuâ proportione medii, quot inter unitatem C et A, vel inter unitatem C et B. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XI. THEOR. [XI.]

Inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis cadit; et quadratus ad quadratum duplicatam rationem habet ejus, quam latus habet ad latus.

Sint quadrati numeri A, B et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere, et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam habet C ad D.

Sit F unitas. Quoniam A numerus quadratus est, cujus latus numerus C; [t] numerus C seipsum multiplicans fecit A. Pari ratione D seipsum multiplicans fecit B. Ergo F unitas est ad C, ut C ad A. Et F unitas ad D, ut D ad B. Unitati igitur et numero A, necnon unitati et numero B, unus intercedit proportione medius. Quare et numeris A, B unus intercedit proportione medius [u].

A, 4. E, 6. B, 9.
C, 2. D, 3.
F, 1.

[t] Def. 18. sept.

[u] 10. hujus.

Dico præterea proportionem A ad B duplicatam esse proportionem numeri C ad D. Numerus C numerum D multiplicans faciet aliquem. Faciat E. Quoniam C seipsum multiplicans fecit A, et D multiplicans fecit E, erit A ad E ut C ad D [x]. Rursum, quoniam D seipsum multiplicans fecit B, et multiplicans C fecit E; erit E ad B ut C ad D. Sed ut C ad D, ita est A ad E (id enim ostensum.) Quare A est ad E ut E ad B. Continua est igitur trium A, E, B proportio. Proportio igitur A ad B duplicata est A ad E, id est, ipsius C ad D duplicata. *Q. E. D.*

[x] 17. sept.

Cor. * Proportione medius inter duos quoscunque quadratos, mutuâ laterum multiplicatione factus est. Continua autem trium ratio, laterum ratio est.

PROP. XII. THEOR. [XII.]

Inter duos numeros cubos duo medii proportionales cadunt; et cubus ad cubum triplicatam habet rationem ejus, quam latus habet ad latus.

Sint numeri cubi A, B; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico inter ipsos A, B duos numeros medios proportionales cadere; et A ad B triplicatam habere rationem ejus, quam C habet ad D.

Sit

Sit K unitas. Numeri C, D seipsum quisque multiplicando facient aliquos. Faciant E, G. Erit igitur K unitas ad C, ut C ad E; et K unitas ad D, ut D ad G.

A, 8. H, 12. I, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
C, 2. D, 3.
K, 1.

Quoniam A cubus est cujus latus C; et E quadratus cujus latus idem C; idcirco C multiplicans E fecerit A. Pari ratione D multiplicans G fecerit B. Erit igitur K unitas ad C ut E ad A; et K unitas ad D ut G ad B. Sed ostensum est unitatem esse ad C, ut C ad E; necnon unitatem ad D, ut D ad G. Unitatis igitur et numerorum C, E, A, necnon unitatis et numerorum D, G, B continua est proportio. Unitati igitur et A duo intercedunt proportione medii, C, E. Unitati quoque et B duo intercedunt D, G. Numeris igitur A, B totidem,
[y] 10. hujus. duo nempe, intercedunt proportione medii [y].

Dico præterea proportionem A ad B, ipsius C ad D triplicatam esse. Numerus C multiplicans D faciet aliquem. Faciat F. Numeri C, D numerum F multiplicantes duos aliquos facient. Facient duos H, I. Inter quadratos E, G est F proportione medius; et E ad F,
[z] Cor. * 11. hujus. necnon F ad G, ut C ad D [z]. Quoniam vero C multiplicans E fecit A, et multiplicans F fecit H; erit A [a] ad H ut
[a] 17. sept. E ad F, id est, ut C ad D. Rursum, quoniam C multipli-
[b] 18. sept. cans F fecit H, et D multiplicans F fecit I, erit [b] H ad I ut C ad D, id est, ex ostensis, ut A ad H. Denique cum D multiplicans F fecit I, et multiplicans G fecit B; erit I ad B ut F ad G, id est, ut C ad D, id est, ut A ad H. Numerorum igitur quatuor A, H, I, B continua est proportio. Proportio igitur A ad B ipsius A ad H, seu C
[c] Def. 11. quinti. ad D, triplicata [c]. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XIII. THEOR. [XIII.]

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et unusquisque seipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis proportionales erunt: et si positi a principio numeri factos multiplicantes alios faciant; et ipsi proportionales erunt; et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B, C, sitque ut A ad B, ita B ad C, et ipsi A, B, C seipsos multiplicantes faciant D, E, F; ipsos vero D, E, F multiplicantes faciant G, H, K: dico numeros D, E, F et G, H, K deinceps proportionales esse.

Numerus enim A ipsum B multiplicans faciat L; uterque autem ipsorum A, B multiplicans L faciat utrumque M, N. Et rursus, B quidem multiplicans C ipsum O

		A, 2	B, 4.	C, 8.		
	D, 4.	L, 8.	E, 16.	O, 32.	F, 64.	
G, 8.	M, 16.	N, 32.	H, 64.	P, 128.	Q, 256.	K, 512.

faciat; uterque vero ipsorum B, C multiplicans O faciat utrumque P, Q.

Eodem modo quo prius ostendemus D, L, E et G, M, N, H deinceps proportionales esse in ratione A ad B; et adhuc E, O, F et H, P, Q, K, deinceps esse proportionales in ratione B ad C. Atque est ut A ad B, ita B ad C: ergo et D, L, E in eâdem sunt ratione, in quâ E, O, F; et præterea G, M, N, H in eâdem ratione, in quâ H, P, Q, K. Estque ipsorum quidem D, L, E multitudo multitudini ipsorum E, O, F æqualis. Multitudo autem ipsorum G, M, N, H æqualis multitudini ipsorum H, P, Q, K: ex æquo igitur [d] ut D ad E, ita E ad F, et ut G ad H, ita H ad K. *Q. E. D.* [d] 14. sept.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum; et latus latus metietur: et si latus metiatur latus; et quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera C, D, et A ipsum B metiatur: dico et latus C ipsum D metiri.

Numerus enim C multiplicans D ipsum E faciat: ergo A, E, B [e] deinceps proportionales sunt in ratione C ad D. [e] Cor. 11. Et hujus.

Et quoniam A, E, B deinceps sunt proportionales, me-
[b] 7. hujus. titurque A ipsum B; et [b] A ipsum E metietur. Atque est ut A ad E, ita C ad D: ergo [c] et C metitur ipsum D.

[c] Def. 20. sept.

A, 4. E, 8. B, 16.
C, 2. D, 4.

Sed C metiatur ipsum D: dico et A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, E, B deinceps proportionales esse in ratione C ad D. Et quoniam est ut C ad D, ita A ad E, metitur autem C ipsum D; et A ipsum E metietur. Et sunt A, E, B deinceps proportionales. Metitur igitur et A ipsum B.

Si igitur numerus quadratus metiatur quadratum numerum; et latus latus metietur: et si latus metiatur latus; et quadratus quadratum metietur. *Q. E. D.*

[XV.]

PROP. XV. THEOR.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum; et latus latus metietur: et si latus latus metiatur; et cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur, et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico C ipsum D metiri.

Numerus enim C seipsum multiplicans faciat E, et multiplicans D faciat F; D vero seipsum multiplicans faciat G; et uterque ipsorum C, D multiplicans F utrumque H, K faciat. Manifestum autem est E, F, G et A, H, K, B deinceps proportionales esse in ratione C ad D; et quoniam A, H, K, B deinceps proportionales sunt, metiturque A ipsum B [d]; et A ipsum H metietur. Est autem ut A ad H, ita C ad D. Ergo [e] C ipsum D metietur.

A, 8. H, 16. K, 32. B, 64.
E, 4. F, 8. G, 16.
C, 2. D, 4.

[d] 7. hujus.
[e] Def. 20. sept.

Sed C metiatur D: dico et A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, H, K, B deinceps proportionales esse in ratione C ad D. Et quoniam C ipsum D metitur, estque ut C ad D, ita A ad H; et A metitur ipsum H. Quare et A ipsum B metietur. *Q. E. D.*

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur; et si latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum.

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera C, D, et A non metiatur ipsum B: dico neque C ipsum D metiri.

Si enim metitur C ipsum D, et A ipsum B metietur[f]. Non metitur autem A ipsum B: non igitur C ipsum D metietur.

A, 9.	B, 16.
C, 3.	D, 4.

[f] 14. hujus.

Sed non metiatur C ipsum D: dico neque A ipsum B metiri.

Si enim A metitur ipsum B, et [f] C ipsum D metietur. Atqui C non metitur D; neque igitur A ipsum B metietur. *Q. E. D.*

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur; et si latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico C ipsum D non metiri.

Si enim C metitur ipsum D, et A ipsum B metietur[g]. Atqui non metitur A ipsum B: non igitur C ipsum D metietur.

A, 8.	B, 27.
C, 2.	D, 3.

[g] 15. hujus.

Sed non metiatur C ipsum D: dico neque A ipsum B metiri.

Si enim A ipsum B metitur, et [g] C metietur ipsum D. Non metitur autem C ipsum D: neque igitur A ipsum B metietur. *Q. E. D.*

PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

Inter duos similes planos numeros unus medius proportionalis cadit; et planus ad planum duplicatam rationem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri plani inter se similes A, B, et ipsius quidem A latera sint C, D, ipsius vero B latera homologa sint E, F. Et quoniam similes plani sunt, qui latera habent proportionalia[h]; erit ut C ad D, ita E ad F. Dico

[h] Def. 21. sept.

inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere; et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F.

Quoniam enim est ut C ad D, ita E ad F; et permutando ut C ad E, ita erit D ad F [i]. Et quoniam planus numerus est A, cujus latera C, D; numerus D ipsum C

[i] 13. sept.

A, 6. G, 12. B, 24.
C, 2. D, 3. E, 4. F, 6.

multiplicans fecit A. Eâdem ratione et E multiplicans F ipsum B fecit; numerus autem D ipsum E multiplicans faciat G. Et cum D ipsum quidem C multiplicans fecit A, multiplicans vero E fecit G; erit ut C ad E, ita A ad G [k]. Sed ut C ad E, ita D ad F; et igitur ut D ad F, ita A ad G. Rursus, quoniam E ipsum D multiplicans fecit G, multiplicans vero F ipsum B fecit; ut D ad F, ita erit G ad B [k]. Ostensum est autem et ut D ad F, ita esse A ad G; et igitur ut A ad G, ita G ad B: ergo A, G, B deinceps proportionales sunt. Ac propterea inter A, B unus medius proportionalis cadit.

[k] 17. sept.

Dico et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam C ad E, vel D ad F. Quoniam enim A, G, B deinceps proportionales sunt, A ad B duplicatam rationem habebit ejus, quam habet ad G [l]. Atque est ut A ad G, ita C ad E, et D ad F. Ergo et A ad B duplicatam rationem habet ejus, quam C habet ad E, vel D ad F. *Q. E. D.*

[l] Def. 10. quinti.

Cor. * Inter duos similes planos qui est proportione medius, et ipse planus est, ex lateribus utique numerorum principio positorum non homologis factus.

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt; et solidus ad solidum triplicatam rationem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri solidi inter se similes A, B, et ipsius quidem A latera sint C, D, E, ipsius vero B latera homologa sint F, G, H. Et quoniam similes solidi sunt, qui latera habent proportionalia [m]; erit ut C ad D, ita F ad G, ut autem D ad E, ita G ad H. Dico inter ipsos A, B duos medios

[m] Def. 21. sept.

medios proportionales cadere; et A ad B triplicatam rationem habere ejus, quam habet C ad F, et D ad G, et adhuc E ad H.

Numerus enim C ipsum D multiplicans faciat K; F vero multiplicans G ipsum L faciat. Et quoniam C, D in eâdem sunt ratione, in quâ F, G, et ex ipsis C, D fit K,

	A, 30.	N, 60.	O, 120.	B, 240.	
		K, 6.	M, 12.	L, 24.	
C, 2.	D, 3.	E, 5.	F, 4.	G, 6.	H, 10.

ex ipsis vero F, G fit L; erunt K, L similes plani numeri[m]: quare inter ipsos unus medius proportionalis cadit[n]. Sit is numerus M: ergo M fit ex D, F[o]. Est autem K ad M, ut M ad L. Et quoniam D ipsum C multiplicans fecit K, multiplicans vero F fecit M; erit ut C ad F, ita K ad M[p]. Sed ut K ad M, ita M ad L: ergo K, M, L deinceps proportionales sunt in ratione C ad F. Et quoniam ut C ad D, ita F ad G; erit permutando ut C ad F, ita D ad G[q]. Rursus, quoniam ut D ad E, ita G ad H; et permutando erit ut D ad G, ita E ad H: ergo K, M, L deinceps proportionales sunt in ratione C ad F, et D ad G, et E ad H. Uterque autem ipsorum E, H multiplicans M faciat utrumque N, O. Et quoniam solidus est A, latera autem ipsius C, D, E; numerus E eum, qui fit ex C, D, multiplicans fecit A; qui vero fit ex C, D est K: ergo E multiplicans K ipsum A fecit. Eâdem ratione et H multiplicans L, qui fit ex F, G, fecit ipsum B. Et quoniam E ipsum K multiplicans fecit A, sed et multiplicans M fecit N; erit[o] ut K ad M, ita A ad N. Ut autem K ad M, ita C ad F, et D ad G, et adhuc E ad H: ergo ut C ad F, et D ad G, et E ad H, ita A ad N. Rursus, quoniam uterque ipsorum E, H multiplicans M fecit utrumque N, O; erit ut E ad H, ita N ad O. Sed ut E ad H, ita C ad F, et D ad G: est igitur ut C ad F, et D ad G, ita et A ad N, et N ad O. Rursus, quoniam H multiplicans M fecit ipsum O, sed et multiplicans L fecit B: erit ut M ad L, ita O ad B. Sed ut M ad L, ita C ad F, et D ad G, et E ad H; et igitur ut C ad F, et D ad G, et E ad H, ita non solum O ad B, sed et A ad N, et N ad O. Ergo A, N, O, B deinceps proportionales sunt in dictis laterum rationibus.

[m] Def. 21. sept.
[n] 18. hujus.
[o] Cor. * 18. hujus.
[p] 17. sept.
[q] 13. sept.

Dico et A ad B triplicatam rationem habere ejus, quam habet

habet latus homologum ad homologum latus; hoc eſt, quam habet numerus C ad F, vel D ad G, vel E ad H. Quoniam enim quatuor numeri proportionales ſunt A, N, O, B; habebit A ad B triplicatam rationem ejus,
p Def. 11. quinti. quam habet A ad N [p]. Sed ut A ad N, ita oſtenſus eſt et C ad F, et D ad G, et E ad H. Ergo A ad B triplicatam habet rationem ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt, quam C habet ad F, et D ad G, et E ad H. *Q. E. D.*

[XX.]

PROP. XX. THEOR.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat; numeri ſimiles plani erunt.

Inter duos enim numeros A, B unus medius proportionalis cadat C: dico numeros A, B ſimiles planos eſſe.

Sumantur enim D, E minimi omnium eandem cum
q 35. ſept. ipſis A, C, rationem habentium [q]: æqualiter igitur

A, 8.		C, 12.	B, 18.
D, 2.	E, 3.	F, 4.	G, 6.

r 21. ſept. D ipſum A metitur, atque E ipſum C [r]. Et quoties D metitur A, tot unitates ſint in F; proptereaque F
s Def. 15. ſept. multiplicans D ipſum A fecit, multiplicans vero E fecit C [s]: quare A planus numerus eſt, cujus latera D, F [t].
t Def. 16. ſept. Rurſus, quoniam D, E ſunt minimi omnium eandem cum C, B rationem habentium; D æqualiter ipſum C metitur, atque E ipſum B [r]. Quoties autem E ipſum B metitur, tot unitates ſint in G: quare G ipſum E multiplicans fecit B [s]: ideoque B numerus planus eſt, cujus latera E, G [t]: ergo numeri A, B ſunt plani. Dico et ſimiles eſſe. Quoniam enim uterque ipſorum F, G multiplicans E utrumque C, B fecit; ut F ad G, ita erit C ad
u 18. ſept. B [u]. Ut autem C ad B, ita D ad E; et igitur ut D ad E, ita F ad G. Quare A, B ſimiles plani ſunt; cum ipſo-
x Def. 21. ſept. rum latera ſint proportionalia [x]. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant; numeri similes solidi erunt.

Inter duos enim numeros A, B duo medii proportionales cadant C, D: dico ipsos A, B similes solidos esse.

Sumantur enim numeri tres, minimi trium omnium eandem cum A, C, D rationem habentium, qui sint E, F, G[x]: [x] 35. sept.

A, 24.		C, 72.	D, 216.		B, 648.
	E, 1.		F, 3.	G, 9.	
H, 1.	K, 1.	N, 24.	L, 3.	M, 3.	O, 72.

extremi igitur ipsorum E, G primi inter se sunt[y]. Et [y] 3. hujus. quoniam inter E, G unus medius proportionalis F cecidit; erunt numeri E, G similes plani[z]. Sint ipsius qui- [z] 20. hujus. dem E latera H, K, ipsius vero G latera homologa sint L, M. Manifestum igitur est ex antecedente E, F, G deinceps proportionales esse in ratione H ad L, et in ratione K ad M. Et quoniam E, F, G minimi sunt eandem quam A, C, D rationem habentium; erit ex æquo ut E ad G, ita A ad D[a], [a] 14. sept. Sunt autem E, G inter se primi: sed primi sunt et minimi[b]: [b] 23. sept. minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem[c]; hoc est, [c] 21. sept. antecedens antecedentem et consequens consequentem: ergo E ipsum A æqualiter metitur, atque G ipsum D. Quoties autem E metitur A, tot unitates sint in N: ergo N ipsum E multiplicans fecit A. Sed E fit ex H, K: ac propterea N eum, qui fit ex H, K, multiplicans ipsum A fecit. Solidus igitur est A, cujus latera H, K, N. Rursus, quoniam E, F, G minimi sunt eandem quam ipsi C, D, B rationem habentium; E ipsum C æqualiter metitur, atque G ipsum B. Et quoties G metitur B, tot unitates sint in O: ideoque O multiplicans G ipsum B fecit. At G fit ex L, M: ergo O eum, qui fit ex L, M, multiplicans fecit B. Solidus igitur est B, et ejus latera L, M, O. Quare A, B solidi sunt. Dico etiam eos similes esse. Quoniam enim A ad C ut C ad D, et C ad D ut D ad B; erit ex æquo ut A ad D, ita C ad B[a]. Sed E, G minimi sunt omnium in ratione numerorum A, D. (Nimirum cum inter se sint primi.) Minimi igitur in ratione numerorum C, B. Numeri igitur E, G numeros C, B æqua-

 liter

A, 24.		C, 72.	D, 216.		B, 648.
	E, 1.	F, 3.		G, 9.	
H, 1.	K, 1.	N, 24.	L, 3.	M, 3.	O, 72.

liter metiuntur. Quoties vero G metitur B, tot ſunt in O unitates[a]. Quoties igitur E metitur C, tot ſunt in O unitates. Quapropter O multiplicans E ipſum C fecerit. Sed oſtenſum eſt N multiplicando E feciſſe A. Quare N, O multiplicantes E ipſos A, C fecerunt[b]. Ut igitur N ad O, ita erit A ad C, hoc eſt, E ad F. Sed ut E ad F, ita H ad L, et K ad M; et igitur ut H ad L, ita K ad M, et N ad O. Sunt autem H, K, N latera ipſius A, et L, M, O latera ipſius B. Ergo A, B ſimiles ſolidi erunt. *Q. E. D.*

[a] ex hyp.
[b] 17. ſept.

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem ſit quadratus; et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales A, B, C; ſitque primus A quadratus: dico et tertium C quadratum eſſe.

Numeri quadrati A latus ſit numerus D. Et numerus B ſui multiplicatione numerum E faciat. Propter proportionem trium A, B, C continuam; illum E, ex ſecundo B factum, primus A metietur[c]. Quadratus utique quadratum. Quare et D, qui latus eſt quadrati A, metietur B latus quadrati E[d]. Quoties igitur D metitur B, tot ſint in F unitates. Numerus igitur D illum F multiplicans numerum B fecerit. Seipſum multiplicans numerus F faciat G. Jam cum numerus D ſeipſum multiplicans fecerit A, et illum F multiplicando fecerit B; erit A ad B ut D ad F[e]. Sed A ad B ut B ad C[f]. Quare B eſt ad C ut D ad F. Rurſus cum numerus F illum D et ſeipſum multiplicans numeros B, G fecerit; erit B ad G ut D ad F[e]. Eſt igitur B ad G ut idem B ad C. Numeri igitur G, C inter ſe æquales: numerus autem G quadratus, ex F ſcilicet. Quadratus igitur C. *Q. E. D.*

	E, 36.	
A, 4.	B, 6.	C, 9.
D, 2.	F, 3.	G, 9.

[c] 1. Cor. 20. ſept.
[d] 14. hujus.
[e] 17. ſept.
[f] ex hyp.

PROP.

PROP. XXIII. THEOR. [XXIII.]

Si quatuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus; et quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri deinceps proportionales A, B, C, D; et A sit cubus: dico et D cubum esse.

Si quatuor illi A, B, C, D minimi sunt quatuor suæ deinceps analogiæ, res patet ex Corollario 1°. Prop. ii. hujus Libri.

A, 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.

Sed A, B, C, D non sint minimi quatuor suæ deinceps analogiæ. Inveniantur igitur minimi illi quatuor E, F, G, H [g], quorum extremi necessario cubi erunt.[g] Cuborum E, H sint K, L latera. Et cubi A latus sit M. [g] 2. hujus.

A, 64.	B, 96.	C, 144.	D, 216.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.
K, 2.	L, 3.		
M, 4.	N, 6.		
O, 16.	P, 24.	Q, 36.	
R, 64.	S, 96.	T, 144.	V, 216.

Quatuor illorum E, F, G, H ac propterea et aliorum quatuor A, B, C, D, perpetua erit in ratione K ad L deinceps analogia (id enim ex constructione 2. hujus manifestum est.) Quatuor autem illi E, F, G, H, cum sint minimi quatuor suæ analogiæ, quatuor illos alios A, B, C, D, singuli singulos æqualiter metientur; antecedens antecedentem, consequens consequentem [h]. [h] 21. sept. Numerus igitur E metietur numerum A; cubus cubum. Quare et K, latus cubi E, metietur M, latus cubi A [i]. [i] 15. hujus. Quoties K metitur M, toties L metiatur N. Erit igitur M ad N ut K ad L. Jam M seipsum multiplicando faciat O. Idem autem M, multiplicando N, faciat P. Et N seipsum multiplicando faciat Q. Ita tres facti fuerint O, P, Q, quorum perpetua, in ratione M ad N, sive K ad L, analogia; et extremi O, Q quadrati sunt ex M, N. Rursum numerus M tres O, P, Q multiplicando faciat tres R, S, T; et numerus N numerum Q multiplicando faciat V. Ita quatuor facti fuerint R, S, T, V, quorum perpetua, in eâdem illâ numerorum K, L, ratione, analogia:

 logia:

logia: extremi autem R, V cubi ſunt ex M, N. Cum vero quatuor A, B, C, D, atque quatuor R, S, T, V, ordine ſumpti in eâdem ſint ratione, ex æquo erit A ad D

[k] 14. ſept. ut R ad V[k]. Et permutando A ad R ut D ad V[l]. Sed

[l] 13. ſept. æquales inter ſe ſunt A, R; nempe cum uterque cubus ſit ex M. Quare et D, V inter ſe æquales. Cubus autem V, nempe ex N. Quare et D cubus. *Q. E. D.*

[XXIV.] PROP. XXIV. THEOR.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; primus autem ſit quadratus, et ſecundus quadratus erit.

Duo enim numeri A, B inter ſe rationem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D; ſitque A quadratus: dico et B quadratum eſſe.

Quoniam enim C, D quadrati ſunt, erunt C, D ſimiles plani: ideoque inter ipſos C, D unus

[m] 18. hujus. medius proportionalis cadit[m]. Eſt autem ut C ad D, ita A ad B: quare etiam inter A, B cadit unus medius propor-

[n] 8. hujus. tionalis[n]. Eſtque A quadratus. Ergo et B quadratus

[o] 22. hujus. erit[o]. *Q. E. D.*

A, 4.	B, 9.
C, 16.	D, 36.

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum; primus autem ſit cubus, et ſecundus cubus erit.

Duo enim numeri A, B inter ſe rationem habeant, quam cubus numerus C ad numerum cubum D; ſitque A cubus: dico et B cubum eſſe.

Quoniam enim C, D cubi ſunt, erunt C, D ſimiles ſolidi: idcirco inter ipſos duo medii proportionales

A, 8.	E, 12.	F, 18.	B, 27.
C, 64.			D, 216.

[p] 19. hujus. cadent[p]. Quot autem inter C, D cadunt medii proportionales, totidem cadent et inter eos, qui eandem quam

[q] 8. hujus. ipſi rationem habent[q]: ergo inter A, B duo medii cadent proportionales. Cadant E, F. Quoniam igitur quatuor numeri A, E, F, B deinceps proportionales ſunt, eſtque

[r] 23. hujus. A cubus; et B cubus erit[r]. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

Similes plani numeri inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri A, B: dico A ad B rationem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A, B similes plani sunt, inter eos cadit unus medius proportionalis[s]. Cadat, sitque C; et sumantur minimi numeri eandem quam A, C, B rationem habentium sc. D, E, F[t]: ergo ipsorum extremi D, F quadrati sunt[u]. Et quoniam est ut D ad F, ita A ad B, et sunt D, F quadrati; habebit A ad B rationem, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. *Q. E. D.*

A, 6.	C, 12.	B, 24.
D, 1.	E, 2.	F, 4.

[s] 18. hujus.
[t] 35. sept.
[u] Cor. 1. 2. hujus.

PROP. XXVII. THEOR. [XXVII.]

Similes solidi numeri inter se rationem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri A, B: dico A ad B rationem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Quoniam enim A, B similes solidi sunt, inter ipsos duo medii proportionales cadent[x]. Cadant C, D; et sumantur minimi numeri, qui eandem quam A, C, D, B

A, 16.	C, 24.	D, 36.	B, 54.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

rationem habeant, ipsis multitudine æquales E, F, G, H[y]: ergo eorum extremi E, H cubi sunt[z]. Atque est ut E ad H, ita A ad B. Habet igitur A ad B rationem, quam numerus cubus ad cubum numerum. *Q. E. D.*

[x] 19. hujus.
[y] 2. hujus.
[z] Cor. 1. 2. hujus.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER NONUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Si duo similes plani numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

SINT duo similes plani numeri A, B; et A ipsum B multiplicans faciat C: dico C quadratum esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo D quadratus est. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; ut A ad B, ita erit D ad C [a]. Et quoniam A, B similes plani sunt; inter ipsos unus medius proportionalis cadet [b]. Si autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ciciderint; quot inter ipsos cadunt, totidem cadent et inter eos, qui eandem habent rationem [c]: quare et inter D, C unus medius proportionalis cadit. Atque est D quadratus. Ergo et C quadratus erit [d]. Q. E. D.

A, 6.	B, 54.
D, 36.	C, 324.

[a] 17. sept.
[b] 18. octavi.
[c] 8. octavi.
[d] 22. octavi.

Aliter *. Sint similes plani numeri A, B; et numerus A, numerum B multiplicans, faciat C. Dico numerum C quadratum esse. Numeri A, B, cum sint similes plani, unum capiunt proportione medium [b].

A, 6.	D, 18.	B, 54.
	C, 324.	
	E, 324.	

Esto

Esto medius ille D; et D seipsum multiplicans faciat E. Propter continuam trium A, D, B analogiam, E factus e medio facto ex extremis, C, æqualis erit. Quadratus autem E. Quare et C quadratus. *Q. E. D.*

Cor. * Numeri quadrati se mutuo multiplicantes quadratum facient; qui æqualis erit quadrato numeri plani ex lateribus numerorum principio positorum facti.

Quadratus A multiplicet quadratum B, et faciat C. Quadratorum A, B latera sint E, F. Numeri E, F se mutuo multiplicantes faciant G. G seipsum multiplicans faciat H. Dico quadratum esse C, et quadrato H æqualem.

A, 4.	G, 14.	B, 49.
	C, 196.	
E, 2.		F, 7.
	H, 196.	

Et quadratum esse C, id quidem hâc ipsâ ex propositione manifestum est. Dico præterea ipsi H æqualem esse. Cum enim numeri E, F quadratorum A, B sint latera; numerus G, mutuâ laterum E, F multiplicatione
[e] Cor.* 11. octavi. factus, inter ipsos A, B proportione medius est [e]. Et cum perpetua sit trium A, G, B proportio; factus ex extremis A, B facto ex medio G æqualis erit. Sed ex extremis A, B factus est C; et ex medio G factus est H. Quare C æqualis est ipsi H. *Q. E. D.*

SCHOLION. *

Numeris igitur duobus literis *a*, *b* designatis, et plano ex illis facto notis *a b* designato, quadratum ex *a b* factum notis a^2, b^2, rite exprimit Algebra.

[II.] PROP. II. THEOR.

Si duo numeri sese multiplicantes quadratum numerum efficiant, similes plani erunt.

Duo enim numeri A, B sese multiplicantes quadratum numerum C efficiant: dico A, B similes planos esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo D quadratus est. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; ut A ad B, ita erit
[f] 17. sept. D ad C [f]. Et quoniam D quadratus est, sed et C etiam; erunt D, C similes plani: quare inter

A, 3.	B, 12.
D, 9.	C, 36.

D, C

D, C unus medius proportionalis cadit[g]. Atque eſt ut D [g] 18. octavi.
ad C, ita A ad B: ergo et inter A, B cadet unus medius proportionalis[h]. Si autem inter duos numeros unus me- [h] 8. octavi.
dius proportionalis cadat, erunt ſimiles plani[i]. Ergo [i] 20. octavi.
A, B ſimiles plani ſunt. *Q. E. D.*

PROP. III. THEOR. [III.]

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A ſeipſum multiplicans faciat B: dico B cubum eſſe.

Sumatur enim ipſius A latus C, et C ſeipſum multiplicans faciat D: manifeſtum igitur eſt C multiplicantem D facere ipſum A[k]. Et quoniam C ſeipſum multiplicans fecit D; metitur C ipſum D per eas, quæ in ipſo C ſunt, unitates[l]. Sed et unitas metitur C per eas, quæ in ipſo C ſunt, unitates: eſt igitur ut unitas ad C, ita C ad D[m]. Rurſus, quoniam C multiplicans D ipſum A fecit, metitur D ipſum A per unitates, quæ ſunt in C. Metitur autem et unitas ipſum C per unitates, quæ in ipſo ſunt: ergo ut unitas ad C, ita D ad A. Sed ut unitas ad C, ita C ad D: ut igitur unitas ad C, ita C ad D, et D ad A: ideoque inter unitatem et numerum A duo medii deinceps proportionales cadunt C, D. Rurſus, quoniam A ſeipſum multiplicans fecit B, et A ipſum B metitur per eas, quæ in ipſo A ſunt, unitates[l]. Metitur autem et unitas ipſum A per unitates, quæ ſunt in ipſo: eſt igitur ut unitas ad A, ita A ad B[m]. Sed inter unitatem et A cadunt duo medii proportionales: ergo et inter A et B duo medii proportionales cadent[n]. Quod ſi inter duos numeros cadant duo medii proportionales, primus autem ſit cubus; et quartus cubus erit[o]. Atque eſt A cubus. Ergo et B cubus erit. *Q. E. D.*

A, 8.
D, 4.
C, 2.
1.
B, 64.

[k] Def. 19. ſeptimi.
[l] Def. 15. ſeptimi.
[m] Def. 20. ſeptimi.
[n] 8. octavi.
[o] 23. octavi.

PROP. IV. THEOR. [IV.]

Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipſum C faciat: dico C cubum eſſe.

Numerus

o Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo
[o] 3. hujus. D cubus est[o]. Et quoniam A seipsum multiplicans fecit D; multiplicans vero B ipsum C fecit: ut A ad B, ita
[p] 17. sept. erit D ad C[p]. Et quoniam A, B cubi sunt, erunt similes solidi numeri: ac propterea inter
[q] 19. octavi. A, B cadent duo medii proportionales[q]: quare et inter
[r] 8. octavi. D, C duo medii proportionales cadent[r]. Estque D cubus.
[s] 23. octavi. ergo et C cubus erit[s]. *Q. E. D.*

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

Cor. * Cubus, cuborum multiplicatione factus, cubus erit plani ex lateribus numerorum principio positorum facti.

SCHOLION. *

Literis igitur *a*, *b* numeros duos significantibus, cubum ex numero plano *a b*, notis $a^3 b^3$, rite exprimit Algebra. Et progressio infinita est.

[V.] PROP. V. THEOR.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, et multiplicatus cubus erit.

Cubus enim A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum C: dico B cubum esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo
[t] 3. hujus. D cubus est[t]. Et quoniam A seipsum quidem multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; ut A ad B,
[u] 17. sept. ita erit D ad C[u]. Et quoniam D, C cubi sunt, similes sunt solidi; ac propterea inter ipsos
[x] 19. octavi. cadunt duo medii proportionales[x]. Atque est ut D ad C, ita A ad B: ergo et inter A, B duo medii proportionales
[y] 8. octavi. cadent[y]. Estque A cubus. Ergo et B cubus erit[z].
[z] 23. octavi. *Q. E. D.*

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, et ipse cubus erit.

Numerus enim A seipsum multiplicans cubum B faciat: dico et A cubum esse.

Numerus enim A multiplicans B faciat C. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B, multiplicans vero B
[a] Def. 19. sept. ipsum C fecit, erit C cubus[a]. Et quoniam A seipsum quidem

A, 8.	B, 64.	C, 512.

quidem multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit C, ut A ad B, ita erit B ad C [b]. Et quoniam B, C cubi sunt, similes solidi erunt: ideoque inter B, C duo medii proportionales cadunt [c]. Et est ut B ad C, ita A ad B: quare et inter A, B duo medii proportionales cadunt [d]. Atque est B cubus. Ergo et A cubus erit [e]. Q. E. D.

[b] 17. sept.
[c] 19. octavi.
[d] 8. octavi.
[e] 23. octavi.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat, factus solidus erit.

Compositus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipsum C faciat: dico C solidum esse.

Quoniam enim A compositus est, eum numerus aliquis metietur [f]. Metiatur D. Et quoties D ipsum A

[f] Def. 13. sept.

A, 6. B, 7. C, 42.
D, 3. E, 2.

metitur, tot unitates sint in E: ergo E multiplicans D fecit A. Et quoniam A ipsum B multiplicans fecit C; estque A, qui fit ex D, E; numerus, qui fit ex D, E, ipsum B multiplicans fecit C: ergo B multiplicans eum, qui fit ex D, E, ipsum C fecit [g]. Ac propterea C solidus est, cujus latera D, E, B [h]. Q. E. D.

[g] 16. sept.
[h] Def. 17. sept.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab unitate quadratus est, et unum intermittentes omnes; quartus autem est cubus, et duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul et quadratus, et quinque intermittentes omnes.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F: dico tertium quidem ab unitate sc. B quadratum esse, et unum intermittentes omnes; quartum autem C cubum, et duos intermittentes omnes; septimum vero F cubum simul et quadratum, et quinque intermittentes omnes.

Quoniam enim ut unitas ad A, ita A ad B; unitas æqualiter metitur numerum A, atque A ipsum B [i]. Sed

[i] Def. 20. sept.

I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729.

unitas metitur A per unitates, quæ in ipso sunt: ergo et

I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F. 729.

et A ipſum B per unitates, quæ ſunt in A, metitur: quare A ſeipſum multiplicans fecit B; quadratus igitur eſt B. Et quoniam B, C, D deinceps proportionales ſunt, eſt-
[k] 22. octavi. que B quadratus; et D quadratus erit[k]. Eâdem ratione erit et F quadratus. Similiter demonſtrabimus et unum intermittentes omnes quadratos eſſe. Dico et quartum ab unitate, videlicet C, eſſe cubum, et duos intermittentes omnes. Quoniam enim eſt ut unitas ad A, ita B ad C; unitas numerum A æqualiter metitur, atque B
[l] Def. 20. sept. ipſum C[l]. Sed unitas numerum A metitur per unitates, quæ in A ſunt: ergo et B metitur C per unitates, quæ ſunt in A; et ob id A multiplicans B ipſum C fecit. Quoniam igitur A ſeipſum multiplicans fecit B, multi-
[m] Def. 19. sept. plicans vero B fecit C; erit C cubus[m]. Quod cum C, D, E, F deinceps proportionales ſint, ſitque C cubus,
[n] 23. octavi. et F cubus erit[n]. Oſtenſum autem eſt quadratum eſſe: ſeptimus igitur ab unitate F et cubus eſt et quadratus. Similiter quoque demonſtrabimus quinque intermittentes omnes et cubos et quadratos eſſe. *Q. E. D.*

[IX.] PROP. IX. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt unitatem ſit quadratus; et reliqui omnes quadrati erunt. Si poſt unitatem ſit cubus; et reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab unitate numeri quotcunque deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, et qui poſt unitatem A ſit quadratus: dico et reliquos omnes quadratos eſſe.

Tertium quidem ab unitate B eſſe quadratum, et
[o] 8. hujus. unum intermittentes omnes, demonſtratum jam eſt[o].

I. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Sunt igitur B, D, F &c. quadrati. Dico et reliquos omnes quadratos eſſe. Quoniam enim A, B, C deinceps ſunt proportionales, eſtque A quadratus; et C quadratus
[p] 22. octavi. erit[p]. Rurſus, quoniam C, D, E deinceps proportionales ſunt; eſt autem C quadratus; et E quadratus erit. Similiter oſtendemus et reliquos omnes quadratos eſſe.

Sit autem A cubus: dico et reliquos cubos eſſe.

Quartum quidem ab unitate C eſſe cubum, et duos intermittentes omnes, jam demonſtratum eſt[o]. Sunt igitur

igitur C, F &c. cubi. Dico et reliquos omnes cubos esse. Quoniam enim est ut unitas ad A, ita A ad B, unitas numerum A æqualiter metitur, atque A ipsum B [p]. [p] Def. 20. sept.

1. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096 E, 32768. F, 262144.

Ergo A seipsum multiplicans fecit B [q]. Atqui est A [q] Def. 15. sept. cubus. Si autem cubus numerus seipsum multiplicans fecerit aliquem, factus cubus erit [r]; ergo B est cubus. [r] 3. hujus. Et quoniam quatuor numeri A, B, C, D deinceps proportionales sunt, estque A cubus; et D cubus erit [s]. [s] 23. octavi. Eâdem ratione et E est cubus, et similiter reliqui omnes cubi sunt. *Q. E. D.* [X.]

PROP. X. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate et unum intermittentes omnes. Si qui post unitatem non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes.

Sint ab unitate deinceps proportionales numeri A, B, C, D, E, F, et qui post unitatem ipse A non sit quadratus: dico neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate, et unum intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit C quadratus. Est autem et B quadratus [t]: ergo B, C inter se rationem habent, quam [t] 8. hujus.

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

numerus quadratus ad quadratum numerum. Atque est ut B ad C, ita A ad B: habent igitur A, B inter se rationem eam, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoque A, B similes plani sunt [u]. Et est B [u] Def. 21. septimi. quadratus: ergo et A quadratus est, quod est contra hypothesin. Non igitur C quadratus erit. Similiter ostendemus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate, et unum intermittentes omnes.

Sed non sit A cubus. Dico neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate, et duos intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit D cubus. Est autem et cubus C, quartus enim est ab unitate [x]; et ut C ad D, ita est [x] 8. hujus. B ad C: ergo et B ad C rationem habet, quam cubus ad

I. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

[x] Def. 21. sept. cubum; ac propterea B, C similes solidi sunt [x]. Atque est C cubus; ergo et B cubus erit. Et quoniam est ut unitas ad numerum A, ita A ad B; A æqualiter metietur [y] Def. 20. sept. B, atque unitas ipsum A [y]. Quare A seipsum multiplicans cubum B fecit [z]. Si autem numerus seipsum multiplicans cubum faciat, et ipse cubus erit [a]: cubus igitur est A, cujus ponitur contrarium Ergo neque D est cubus. Similiter demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes. *Q. E. D.*

[z] Def. 15. sept.

[a] 6. hujus.

[XI.] PROP. XI. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor majorem metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F. Dico horum B, C, D, E, F

A, 1. B, 3. C, 9. D, 27. E, 81. F, 243.

quemvis D majorem quemvis in serie, puta F, metiri, per aliquem eorum, qui sunt in serie. Sit enim C numerus ille unus in proportionalium serie, quem inter et unitatem tot in serie intercedunt medii, quot inter D et F. Et propter continuam numerorum analogiam, erit ex æquali A unitas ad C ut D ad F [b]. Quare numerus D metitur F per ipsum C. *Q. E. D.*

[b] 14. sept.

[XII.] PROP. XII. THEOR.

Si ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum metiuntur ultimum, iidem et eum, qui unitati proximus est, metientur.

Sint ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales A, B, C, D: dico quicunque primorum numerorum metiuntur D, eosdem et ipsum A metiri.

Metiatur enim aliquis primus numerus E ipsum D: dico E ipsum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipsum A. Atqui E est primus; omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est [c]: ergo E, A numeri inter se primi sunt. Et cum E metitur ipsum D, metiatur per unitates, quæ sunt in F: ergo

[c] 31. sept.

ergo E multiplicans F ipsum D fecit. Rursus, quoniam C metitur ipsum D per eas, quæ sunt in A unitates[d]; A [d 11. hujus.] multiplicans C ipsum D fecit. Sed et E multiplicans F

I. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256.
E, 2. H, 8. G, 32. F, 128.

fecit D: qui igitur fit ex A, C ei, qui fit ex E, F, est æqualis: ergo ut A ad E, ita F ad C[e]. Suntque A, E [e 19. sept.] primi; primi autem, et minimi[f]; minimi vero eos, qui [f 23. sept.] eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem[g]: me- [g 21. sept.] titur igitur E ipsum C. Metiatur per G: ergo E ipsum G multiplicans fecit C. Sed et A multiplicans B ipsum C fecit: qui igitur fit ex A, B æqualis est ei, qui ex E, G: ergo ut A ad E, ita G ad B. Et sunt A, E primi, sed primi etiam et minimi[f], minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem[g]: quare et E ipsum B metitur. Metiatur per H: multiplicans igitur E ipsum H fecit B. Sed et A seipsum multiplicans fecit B; ergo qui fit ex H, E est æqualis ei, qui fit ab ipso A: est igitur ut E ad A, ita A ad H[h]. Suntque A, E primi, [h 20. sept.] sed primi etiam et minimi, minimi vero æqualiter metiuntur eos, qui eandem quam ipsi rationem habent, major majorem et minor minorem, hoc est, antecedens antecedentem et consequens consequentem[g]: ergo E metitur ipsum A, quem ponebatur non metiri. Non igitur A, E sunt inter se primi: ergo compositi erunt. Compositos vero primus aliquis numerus metitur[i]: quare [i Def. 14.] ipsos A, E metietur aliquis numerus primus. Et quo- [sept.] niam E primus ponitur, primum autem non metitur alius numerus præter seipsum[k]: metitur igitur E ipsos A, E: [k Def. 11.] ideoque E ipsum A metitur. Similiter demonstrabimus [sept.] quicunque primorum numerorum metiuntur ipsum D, eosdem et ipsum A metiri. *Q. E. D.*

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem primus sit; maximum nullus alius metietur, præter eos qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint quotcunque numeri ab unitate deinceps proportionales A, B, C, D; et qui post unitatem, videlicet A, sit primus: dico maximum D nullum alium metiri, præter ipsos A, B, C.

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum D, et non sit E idem qui aliquis ipsorum A, B, C: manifestum est E primum non esse. Si enim primus sit, et metiatur D;

1.	A, 5.	B, 25.	C, 125.	D, 625.
	E-----	H----	G-----	F-------

[l] 12. hujus. ipsum quoque A metietur primum existentem[l], cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: non igitur E primus est; ergo compositus: omnem autem compositum [m] 33. sept. numerum primus aliquis numerus metitur[m]. Dico nullum alium primum metiri ipsum E, præterquam A. Si enim alius metitur E, et E metitur D, et alius ille ipsum D metietur: quare et ipsum A primum existentem[l], cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: ergo A ipsum E metitur. Et quoniam E metitur D, metiatur ipsum per F. Dico non esse F eundem cum aliquo ipsorum A, B, C. Si enim est idem, metiturque ipsum D per E; et unus ipsorum A, B, C ipsum D per E metietur. Sed quilibet ipsorum A, B, C metitur D [n] 11. hujus. per aliquem ipsorum A, B, C[n]: quare et E idem erit qui unus ipsorum A, B, C. Similiter ostendetur F non esse primum, et A metiri F. Et quoniam E metitur D per F; et E multiplicans F ipsum D fecit. Sed [o] ex hyp. et A multiplicans C fecit D[o]: qui igitur fit ex A, C est [p] 19. sept. æqualis ei, qui ex E, F: ergo ut A ad E, ita est F ad C[p]. [q] Def. 20. sept. Sed A metitur E: quare et F ipsum C metitur[q]. Metiatur per G. Similiter demonstrabimus G non esse eundem qui unus ipsorum A, B, et A ipsum G metiri. Et quoniam F ipsum C metitur per G, multiplicans F ipsum G fecit C. Sed et A multiplicans B ipsum C fecit: ergo qui fit ex A, B ei, qui ex F, G, est æqualis: ut igitur A ad F, ita est G ad B. Metitur autem A ipsum F: ergo et G ipsum B metietur. Metiatur per H. Similiter demon-

demonstrabimus H non esse eundem qui A. Et quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. Sed et A, seipsum multiplicans fecit B [r]: qui igitur fit ex H, G est æqualis quadrato, qui ex A. Ergo ut H ad A, ita A ad G [s]. Metitur autem A ipsum G; quare et H ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idem qui A; quod est absurdum. Non igitur aliquis alius metietur ipsum D maximum, præter ipsos A, B, C. *Q. E. D.*

[r] ex hyp.
[s] 20. sept.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Si minimum numerum primi numeri metiantur: nullus alius primus numerus metietur ipsum, præter eos qui a principio metiebantur.

Minimum enim numerum A primi numeri B, C, D metiantur: dico nullum alium primum numerum metiri ipsum A, præter ipsos B, C, D.

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum A; et non sit E idem qui aliquis ipsorum B, C, D. Et quoniam E metitur A, ipsum per F metiatur. Ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri B, C, D. Si autem duo numeri sese multiplicantes aliquem faciant, et factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, et unum eorum qui a principio positi sunt metietur [t]. Ergo numeri B, C, D metientur unum ipsorum E, F. Ipsum quidem E non metientur, etenim E primus est [u]; et non idem qui aliquis ipsorum B, C, D. Ergo metientur ipsum F, qui est minor quam A, quod fieri non potest; ponitur enim A minimus eorum, quos B, C, D metiantur. Non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos B, C, D. *Q. E. D.*

A, 30.
B, 2. C, 3. D, 5.
E----- F-------

[t] 32. sept.
[u] ex hyp.

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt.

Sint A, B, C tres numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: dico duos quoslibet compositos ad reliquum primos esse, videlicet A, B ad C, et B, C ad A, et A, C ad B.

Sumantur enim duo minimi numeri, eandem cum ipsis A, B, C rationem habentes, DE, EF. Manifestum est DE seipsum quidem mul- [x] 2. octavi. tiplicantem facere A [x]; multiplicantem vero EF facere B, et EF seipsum multiplicantem facere C.

A, 9. B, 12. C, 16.

D . . . E . . . . F.

Et quoniam DE, EF, minimi sunt; [y] 24. sept. primi erunt inter se [y]. Si autem duo numeri primi inter [z] 30. sept. se fuerint, et uterque simul ad utrumque primus erit [z]. Ergo DF ad utrumque ipsorum DE, EF primus est. Sed et DE ad EF est primus. Quare DF, DE ad EF primi sunt. Ac propterea qui fit ex FD, DE, primus [a] 26. sept. est ad EF [a]. Si autem duo numeri primi inter se fuerint; [b] 27. sept. qui fit ex uno ipsorum ad reliquum primus erit [b]. Ergo qui fit ex FD, DE ad eum, qui fit ex EF, est primus. Sed † qui ex FD, DE est is, qui fit ex DE, una cum [c] 3. secundi. eo, qui ex DE, EF [c]. Qui igitur ex DE, una cum eo, qui ex DE, EF, primus est ad eum, qui ex EF. Sed qui fit ex DE est A; qui vero ex DE, EF est B, et qui ex EF est C. Ergo A, B compositi ad ipsum C primi sunt. Similitur ostendemus et B, C, ad A esse primos. Dico et A, C ad B primos esse. Quoniam enim DF, ad utrumque ipsorum DE, EF est primus [z]; et qui fit [d] 26. & 27. sept. ex DF ad eum, qui ex DE, EF, primus erit [d]. Sed ei, qui fit ex DF, æquales sunt qui ex DE et EF fiunt, una [e] 4. secundi. cum eo, qui bis fit ex DE, EF [e]. Qui igitur ex DE et EF fiunt, una cum eo, qui bis ex DE, EF, primi sunt ad eum, qui ex DE, EF. Ergo et dividendo, qui fiunt ex DE et EF, una cum eo, qui semel fit ex DE, EF, primi sunt ad eum, qui ex DE, EF; et rursus dividendo, qui fiunt ex DE et EF, ad eum, qui fit ex DE, EF, primi sunt. Sed qui fit ex DE, est A; qui vero ex DE, EF, est B; et qui ex EF, est C. Ergo A, C compositi ad ipsum B primi erunt. *Q. E. D.*

† *Hoc ex eis est, quæ ab Euclide in rectangulis ostensa sunt sub partibus lineæ rectæ comprehensis in Libro ii; a nobis autem in numeris planis ex partibus numeri factis in Schelio nostro ad vicesimam septimi, et ejusce Scholii corollario. Hic igitur et in sequentibus, Propositiones Libri ii. de rectangulis, in numerorum materiâ, quando opus sit, laudamus, ac si de numeris planis pronuntiatæ essent.*

PROP.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; non erit ut primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium ullum.

Duo enim numeri A, B primi inter ſe ſint: dico non eſſe ut A ad B, ita B ad alium ullum.

Si enim fieri poteſt, ſit ut A ad B, ita B ad C. Et ſunt A, B primi; primi vero ſunt et minimi [e]; minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, et conſequens conſequentem. Metitur igitur A ipſum B, ut antecedens antecedentem [f]. Sed et ipſe ſeipſum metitur. Ergo A metitur ipſos A, B primos inter ſe exiſtentes; quod eſt abſurdum. Non igitur eſt ut A ad B, ita B ad C. *Q. E. D.*

A, 5. B, 8. C------

[e] 23. ſept.
[f] 21. ſept.

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; non erit ut primus ad ſecundum, ita ultimus ad alium ullum.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, extremi autem ipſorum A, D primi ſint inter ſe: dico non eſſe ut A ad B, ita D ad alium ullum.

Si enim fieri poteſt, ſit ut A ad B, ita D ad E. Quare permutando ut A ad D, ita erit B ad E [g]. Et etiam ſunt A, D primi [h]; primi etiam et minimi [i]; minimi vero

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E------

eos, qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem [k]. Metitur igitur A ipſum B. Atque eſt ut A ad B, ita B ad C. Ergo et B metitur ipſum C, et ob id A quoque ipſum C metitur. Et quoniam eſt ut B ad C, ita C ad D, metitur autem B ipſum C; et C ipſum D metitur. Sed A metitur C; quare et A metitur ipſum D. Metitur autem et ſeipſum. Ergo A ipſos A, D primos inter ſe exiſtentes metitur; quod fieri non poteſt. Non igitur erit ut A ad B, ita D ad alium ullum. *Q. E. D.*

[g] 13. ſept.
[h] ex hyp.
[i] 23. ſept.
[k] 21. ſept.

[XVIII.] PROP. XVIII. PROBL.

Duobus numeris datis considerare, an tertius ipsis proportionalis invenire possit. Vide 2. Cor. * *20. septimi.*

[XIX.] PROP. XIX. PROBL.

Tribus numeris datis considerare, an quartus ipsis proportionalis inveniri possit. Vide 2. Cor. * *19. septimi.*

[XX.] PROP. XX. THEOR.

Primi numeri plures sunt omni propositâ multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri A, B, C: dico ipsis A, B, C plures esse primos numeros.

Sumatur enim minimus, quem ipsi A, B, C metian-
l 38. sept. tur[l], sitque DE; et ipsi DE apponatur unitas DF. Ergo EF, vel primus est, vel non. Sit primum primus: inventi igitur sunt primi numeri A, B, C, EF plures quam ipsi A, B, C.

A, 2. B, 3. C, 5.
30.
E——D . F.

m 33. sept. Sed non sit EF primus. Ergo eum primus metitur[m]. Metiatur G: dico G nulli ipsorum A, B, C eundem esse. Si enim G idem sit qui unus ipsorum A, B, C, ipsi autem A, B, C metiantur DE; et G ipsum DE metietur. Metitur autem et EF; et reliquam igitur DF unitatem metietur G numerus existens, quod est absurdum. Ergo G non est idem qui unus ipsorum A, B, C. Et ponitur primus. Inventi igitur sunt primi numeri A, B, C, G plures propositâ multitudine primorum numerorum A, B, C. *Q. E. D.*

A, 2. B, 3. C, 7.
105.
E——D . F.
G, 53.

[XXI.] PROP. XXI. THEOR.

Si pares numeri quotcunque componantur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcunque AB, BC, CD, DE: dico totum AE, parem esse.

Cum enim numeri AB, BC seorsim pares sint; nu-
n Def. 6. sept. merus binarius utrumque metitur[n]. Compositum igitur AC metietur. Metitur autem CD, parem scilicet.

Compositum

Compositum igitur A D metietur. Metitur autem D E,

A . . . . B . . . . . . C . . . . D . . . . E

parem. Compositum igitur A E. Par igitur est numerus A E. *Q. E. D.*

Cor. * Qui imparem metitur numerus impar erit.

PROP. XXII. THEOR. [XXII.]

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit.

Componantur enim impares numeri quotcunque, multitudine pares, A B, B C, C D, D E: dico totum A E parem esse.

CAS. 1. Componantur primum duo numeri impares A B, B C. Ab A B auferatur unitas B F, et a B C auferatur unitas B G. Numerus A F erit par, necnon G C.

A . . F . B . G . . . . C . . . . D . . . . E

Cæterum F G par, ipse scilicet binarius. Totus igitur A C par, ex tribus utique paribus A F, F G, G C compositus [o]. [o] 21. hujus.

CAS. 2. Componantur vero numeri impares quotcunque, multitudine tantum pares, A B, B C, C D, D E. Dico totum A E parem. Bini enim A B, B C compositi parem conficiunt A C [p]. Similiter bini C D, D E parem conficiunt C E. Pares vero A C, C E parem conficiunt A E [q]. Et quotcunque fuerint numeri A B, B C, C D, D E, modo eorum multitudo sit par, totus A E in binos resolvetur. Quilibet vero bini simul sumpti conficiunt parem [p]. Quotlibet igitur e binis quisque compositi, simul sumpti, conficiunt parem [q]. Totus igitur A E par. *Q. E. D.*

[p] Per cas. 1.

[q] 21. hujus.

PROP. XXIII. THEOR. [XXIII.]

Si impares numeri quotcunque componantur, et multitudo ipsorum sit impar; et totus impar erit.

Componantur enim numeri impares quotcunque, quorum multitudo sit impar, A B, B C, C D: dico et totum A D imparem esse.

Auferatur ab ipso C D unitas D E: reliquus igitur C E

A . . . . . B . . . . C . . . . E . D

par est [r]. Est autem et A C par [s]. Ergo et totus A E par

[r] Def. 7. sept.

[s] 22. hujus.

[t] 21. hujus. par erit[t]. Atque eſt D E unitas. Impar igitur eſt A D. *Q. E. D.*

[XXIV.] PROP. XXIV. THEOR.

Si a pari numero par auferatur, et reliquus par erit.

A pari enim numero A B par auferatur B C: dico et reliquum C A parem eſſe.

Quoniam A B par eſt, binarius metietur A B. Sed et
[u] Per hyp. C B, parem ſcilicet[u]. Quare et reliquum A C. Par igitur eſt A C. *Q. E. D.*

A . . . . . . C . . . . B

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

Si a pari numero impar auferatur, et reliquus impar erit.

A pari enim numero A B impar B C auferatur: dico et reliquum C A imparem eſſe.

[x] Def. 7. ſept. Auferatur ab ipſo B C unitas C D. Ergo D B par eſt[x]. Eſt autem par et A B. Et
[y] 24. hujus. reliquus igitur A D eſt par[y]. Atque eſt C D unitas. Ergo C A impar eſt. *Q. E. D.*

A . . . . C . D . . . . B

[XXVI.] PROP. XXVI. THEOR.

Si ab impari numero impar auferatur, et reliquus par erit.

Ab impari enim numero A B impar B C auferatur: dico reliquum C A parem eſſe.

Quoniam enim A B impar eſt, auferatur unitas B D: reliquus A D igitur eſt par. Eâdem ratione et C D eſt par. Quare et reliquus A C
[z] 24. hujus. par eſt[z]. *Q. E. D.*

A . . . . C . . . . . . D . B

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ab impari enim numero A B par auferatur B C: dico reliquum C A imparem eſſe.

Auferatur enim unitas A D. Ergo D B par eſt. Eſt autem par et B C. Et reliquus
[a] 24. hujus. igitur C D eſt par[a]. Atque eſt D A unitas. Ergo C A impar
[b] Def. 7. ſept. eſt[b]. *Q. E. D.*

A . D . . . . C . . . . B

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR. [XXVIII.]

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A, parem numerum B multiplicans, faciat C: dico C parem esse.

Quoniam enim A, multiplicans B, ipsum C fecit; componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot unitates sunt in A. Atque est B par. Ergo C ex paribus numeris componitur. Si autem pares numeri quotcunque componantur, totus par erit[c]. Ergo C est par. *Q. E. D.*

A . . .   B . . . .
C . . . .

[c] 21. hujus.

PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A, numerum imparem B multiplicans, faciat C: dico C imparem esse.

Quoniam enim A, multiplicans B, ipsum C fecit; componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot sunt in A unitates. Atque est uterque ipsorum A, B impar. Ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. Qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, et ipse impar erit[d]. Ergo C est impar. *Q. E. D.*

A . . .   B . . . . .
C . . . .

[d] 23. hujus.

PROP. XXX. THEOR. [XXX.]

Si impar numerus parem numerum metiatur, et dimidium ejus metietur.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur: dico et dimidium ejus metiri.

Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsum per C: dico C non esse imparem. Nam si fieri potest, sit impar.

A . . .   B . . . .
C . . . .
D . .   E . . . . . .

Et quoniam A ipsum B metitur per C; impar ille A, multiplicans ipsum C imparem, fecit B. Ac propterea impar

A . . . B . . . .
C . . . .
D . . E . . . . . .

[c] 29. hujus. impar est B[c]; quod est absurdum, par enim ponitur. Non igitur C est impar. Ergo par. Paris igitur C sit D dimidius. Impar autem A, numerum D multiplicans, faciat E. A igitur metietur E, ex A et D factum. Sed cum numerus A, numeros C, D multiplicans, fecerit
[d] 17. sept. B, E; erit B ad E ut C ad D[d]. Sed D dimidius est ipsius C. Quare et E ipsius B dimidius. Numerus igitur A, numerum E metiendo, dimidium ipsius B metitur. *Q. E. D.*

[XXXI.] PROP. XXXI. THEOR.

Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, et ad ipsius duplum primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B sit primus, et sit C ipsius B duplus: dico A etiam ad C primum esse.

Si enim non sint A, C primi, eos aliquis numerus metietur. Metiatur, sitque D. Et est A impar. Impar igitur est

A . . . B . . . . .
C . . . .
D ------

[e] Cor. [e] 21. hujus. et D[e]. Et quoniam D impar existens metitur ipsum C, atque est C par; et D ipsius C dimi-
[f] 30. hujus. dium metietur[f]. Sed ipsius C dimidium est B. Ergo D ipsum B metitur. Metitur autem et ipsum A. Quare D ipsos A, B metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest. Numeros igitur A, C nullus quidem D metitur. Ergo A, C inter se primi sunt. *Q. E. D.*

[XXXII.] PROP. XXXII. THEOR.

Numerorum a binario duplatorum unusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri B, C, D: dico B, C, D pariter pares esse tantum.

At vero unumquemque ipsorum B, C, D pariter parem
[g] Def. 8. sept. esse manifesto constat[g]: a binario namque duplatus est.

E, 1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

Dico et tantum. Exponatur enim unitas E. Quoniam igitur ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales

E, 1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

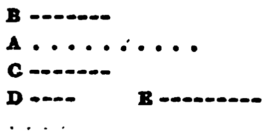
tionales sunt, et post unitatem A primus est; maximum ipsorum numerorum A, B, C, D, videlicet D, nullus alius metietur præter ipsos A, B, C[h]. Atque est unusquisque ipsorum A, B, C par. Ergo D pariter par est tantum. Similiter demonstrabimus et unumquemque ipsorum A, B, C pariter parem esse tantum. *Q. E. D.* [h] 13. hujus.

PROP. XXXIII. THEOR. [XXXIII.]

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat: dico A pariter imparem esse tantum.

At vero pariter imparem esse perspicuum est[i]: dimidius enim ipsius impar existens ipsum pariter metitur. Dico et tantum. Metiatur enim, si fieri possit, par numerus B numerum A (cujus dimidius est impar) pari C. Paris C sit D dimidius. Et B multiplicans D faciat E. Jam cum numerus B numeros C, D multiplicans faciat A, E; erit A ad E, ut C ad D[k]. Sed D dimidius est illius C. Ergo et E ipsius A dimidius. Sed E factus est ex D et numero pari B. Par igitur est E[l]. Numerus igitur A dimidium parem habet. Quod hypothesi repugnat. Nam imparem habere posuimus. Non igitur pariter par est A. Pariter igitur impar tantum. *Q. E. D.* [i] Def. 9. sept. [k] 17. sept. [l] 21. hujus.



PROP. XXXIV. THEOR. [XXXIV.]

Si par numerus neque sit a binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par est et pariter impar.

Numerus enim A neque sit a binario duplatus, neque dimidium imparem habeat: dico A et pariter parem, et pariter imparem esse.

At vero A, pariter parem esse manifestum est[m]; dimidium enim imparem non habet. Dico etiam pariter imparem esse. Nam si A bifariam secemus, et dimidium ipsius bifariam, et hoc semper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipsum A per numerum parem metietur. Si enim non incidemus in aliquem [m] Def. 8. sept.



aliquem imparem, qui ipſum A per numerum parem metietur, incidemus in binarium; atque erit A a binario duplatus, quod non ponitur. Quare A pariter impar eſt. Oſtenſum autem eſt et pariter eſſe parem. Eſt igitur A, et pariter par, et pariter impar. *Q. E. D.*

[XXXV.] PROP. XXXV. THEOR.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, auferantur autem a ſecundo et ultimo æquales primo; erit ut ſecundi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B C, D, E F incipientes a minimo A; et auferatur ab ipſo B C, et ab E F, æqualis ipſi A; videlicet G C, F H: dico ut B G ad A, ita eſſe E H ad A, B C, D.

Ponatur enim ipſi quidem B C æqualis F K; ipſi vero D æqualis F L. Quoniam igitur F K eſt æqualis ipſi B C,

A . . . .

B . . . . G C

D . . . .

E . . . . L . . . . . . K . . . . H . . . . F

quorum F H eſt æqualis G C; erit reliquus H K reliquo G B æqualis. Et quoniam eſt ut E F ad D, ita D ad B C, et B C ad A; æqualis autem eſt D ipſi F L, et B C ipſi F K, et A ipſi F H. Erit ut E F ad L F, ita L F ad F K, et F K ad F H. Quare dividendo ut E L ad L F, ita L K ad F K, et K H ad F H; et ut unus antecedentium ad unum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes[a]. Eſt igitur ut K H ad F H, ita E L, L K, K H, ad L F, K F, H F. Atque eſt K H quidem æqualis B G; F H vero ipſi A; et L F, K F, H F æquales ipſis D, B C, A. Ergo ut B G ad A, ita eſt E H ad D, B C, A. Eſt igitur ut ſecundi exceſſus ad primum ita exceſſus ultimi ad omnes ipſum antecedentes. *Q. E. D.*

[a] 12. ſept.

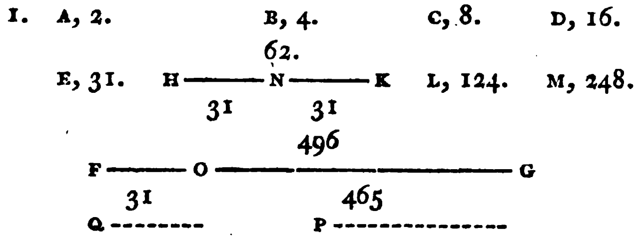
[XXXVI.] PROP. XXXVI. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales exponantur in duplâ analogiâ, quoad totus compoſitus primus fiat, et totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

Ab unitate enim exponantur quotcunque numeri deinceps proportionales in duplâ analogiâ, ſc. A, B, C, D, quoad totus compoſitus primus fiat, et toti æqualis ſit E, et

et E ipsum D multiplicans faciat F G: dico F G perfectum esse.

Quot enim sunt A, B, C, D multitudine, tot sumantur ab ipso E in duplâ analogiâ, qui sint E, H K, L, M. Ergo ex æquo ut A ad D, ita erit E ad M. Ac propterea qui fit ex E, D, est æqualis ei, qui ex A, M [o]. Est [o] 19. sept.



autem qui ex E, D ipse F G. Quare F G est qui fit ex A, M. Multiplicans igitur A ipsum M fecit F G. Atqui est A binarius: duplus igitur est F G ipsius M. Sunt autem et M, L, H K, E deinceps dupli inter se. Ergo E, H K, L, M, F G deinceps proportionales sunt in duplâ analogiâ. Auferatur a secundo H K, et ab ultimo F G ipsi primo E æqualis uterque H N, F O: est igitur ut secundi numeri excessus ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes [p]. Quare ut N K ad E, ita O G ad [p] 35. hujus. M, L, H K, E. Atque est N K ipsi E æqualis [q]. Ergo [q] Per con- et O G est æqualis ipsis M, L, H K, E. Est autem F O struct. æqualis ipsi E [q]; atque E ipsis A, B, C, D, et unitati æqualis. Totus igitur F G æqualis est et ipsis E, H K, L, M, et ipsis A, B, C, D et unitati [r]; qui omnes ipsum [r] Ax. 2. F G metiuntur. Scilicet cum numerus D ipsum F G, primi. ex D et E factum, necessario metiatur. In numeris autem A, B, C, D, quorum continua est ab ipsâ unitate analogia, maximum D præcedentium quisque metitur [s], [s] 11. hujus. et quem maximus ille metitur, F G. Numerum igitur F G metitur quisque illorum, A, B, C, D. Rursum in numeris E, H K, L, M, F G, quorum perpetua inde ab E in ratione unitatis ad binarium analogia, metitur quisque proxime sequentem, ac proinde se sequentes omnes. Metitur igitur et eorum unusquisque numerum F G. Omnes igitur A, B, C, D, E, H K, L, M illum F G metiuntur. Dico nullum alium metiri F G præter ipsos A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitatem. Si enim fieri potest, metiatur aliquis numerus ipsum F G, qui sit P. Sitque P

nulli

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

62.

E, 31. H———N———K L, 124. M, 248.

31 31

496

F——O——————G

31 465

Q -------- P ---------------

nulli ipſorum A, B, C, D, E, H K, L, M idem. Et quoties P ipſum F G metitur, tot unitates ſint in Q. Ergo Q ipſum P multiplicans fecit F G. Sed et E multiplicans D ipſum F G fecit[s]: eſt igitur ut E ad Q, ita P ad D[t]. Et quoniam ab unitate deinceps proportionales ſunt A, B, C, D, et qui unitatem ſequitur A primus eſt; non metietur ipſum D aliquis alius numerus præter ipſos A, B, C[u]; et ponitur P nulli ipſorum A, B, C idem. Non igitur P ipſum D metietur. Ut autem P ad D, ita E ad Q. Ergo neque E metietur ipſum Q[x]. Atqui eſt E primus[y]. Omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt[z]. Quare E, Q primi inter ſe ſunt. Sed primi etiam et minimi[a]; minimi vero eos, qui eandem quam ipſi rationem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem[b]; atque eſt ut E ad Q, ita P ad D. Ergo E æqualiter metitur ipſum P, atque Q ipſum D. Sed nullus alius metitur numerum D præter ipſos A, B, C. Quare Q idem eſt qui unus ipſorum A, B, C. Sit idem qui B; et quot ſunt B, C, D multitudine, tot ab ipſo E ſumantur E, H K, L. Suntque E, H K, L in eâdem ratione, in quâ B, C, D[c]. Ex æquo igitur ut B ad D, ita eſt E ad L. Ergo qui fit ex B, L eſt æqualis ei, qui ex D, E[d]. Sed qui fit ex D, E eſt æqualis ei, qui ex Q, P. Qui igitur fit ex Q, P ei, qui ex B, L, æqualis erit. Quare ut Q ad B, ita eſt L ad P[d]. Eſtque Q idem qui B. Ergo et L idem erit qui P; quod fieri non poteſt; etenim P nulli ipſorum expoſitorum idem ponitur. Non igitur ipſum F G metitur aliquis numerus præter ipſos A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitatem. Atque oſtenſus eſt F G æqualis ipſis A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitati. Perfectus autem numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis[e]. Ergo F G perfectus eſt. *Q. E. D.*

[s] Per conſtruct.
[t] 19. ſept.
[u] 13. hujus.
[x] Def. 20. ſept.
[y] ex hyp.
[z] 31. ſept.
[a] 23. ſept.
[b] 21. ſept.
[c] Per conſtruct.
[d] 19. ſept.
[e] Def. 22. ſept.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER DECIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

COMMENSURABILES magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.

II.

Incommenſurabiles autem, quarum nullam eſſe communem menſuram contingit.

III.

Rectæ lineæ potentiâ commenſurabiles ſunt, cum ea, quæ ab ipſis fiunt, quadrata idem ſpatium metitur.

IV.

Incommenſurabiles autem, cum quadrata, quæ ab ipſis fiunt, nullum commune ſpatium metiri contingit.

V.

His poſitis oſtenditur, cuicunque rectæ lineæ propoſitæ rectas lineas, multitudine infinitas, et commenſurabiles eſſe et incommenſurabiles; alias quidem longitudine ſimul et potentiâ commenſurabiles, alias vero potentiâ ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, rationalis.

VI.

Et huic commenſurabiles, ſive longitudine et potentiâ, ſive potentiâ ſolum, rationales.

VII.

Incommenſurabiles vero, irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratum, quod a rectâ lineâ propoſitâ fit, dicatur rationale.

IX.

Et ſpatia huic commenſurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommenſurabilia vero, dicantur irrationalia.

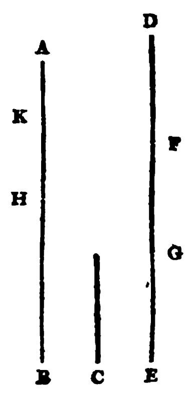
XI.

Et lineæ, quæ incommenſurabilia poſſunt, vocentur irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſorum latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, ipſæ a quibus æqualia quadrata deſcribuntur.

[I.] PROPOSITIO I. THEOREMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum eſt, rurſus auferatur majus quam dimidium, et hoc ſemper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expoſitâ minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales A B, C, quarum major A B: dico ſi ab ipſâ A B auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum eſt, rurſus auferatur majus quam dimidium, atque hoc ſemper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit.



Etenim C multiplicata fiet aliquando major magnitudine A B. Multiplicetur, et ſit D E ipſius quidem C multiplex, major autem quam A B; dividaturque D E in partes ipſi C æquales D F, F G, G E; et ab ipſâ A B auferatur majus quam dimidium B H, ab ipſâ vero A H rurſus majus quam dimidium auferatur H K, atque hoc ſemper fiat,

quoad

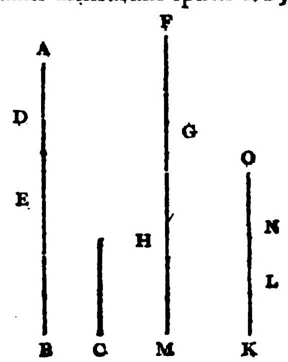
quoad divisiones, quæ sunt in A B, multitudine æquales fiant divisionibus, quæ in D E. Sint igitur divisiones A K, K H, H B divisionibus D F, F G, G E multitudine æquales.

Et quoniam major est D E quam A B, et ablatum est ab ipsâ quidem D E minus quam dimidium, sc. E G, ab ipsâ vero A B majus quam dimidium, sc. B H; erit reliquum G D reliquo H A majus. Rursus, quoniam major est G D quam H A, et ablatum est ab ipsâ quidem G D dimidium G F, ab ipsâ vero H A majus quam dimidium H K; reliquum D F reliquo A K majus erit. Estque D F æqualis ipsi C. Ergo C quam A K est major. Minor igitur est A K quam C. Ergo ex magnitudine A B relicta est magnitudo A K, expositâ minori magnitudine C minor. *Q. E. D.*

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint.

Aliter. Exponantur duæ magnitudines inæquales A B, C, sitque C minor; et quoniam minor est C, multiplicata erit aliquando magnitudine A B major. Fiat ut F M, dividaturque in partes ipsi C æquales M H, H G, G F; et ab ipsâ A B auferatur majus quam dimidium B E, et ab E A majus quam dimidium E D; atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in A B, numero æquales fiant divisionibus, quæ in F M. Fiant igitur ut B E, E D, D A; et ipsi D A unaquæque ipsarum K L, L N, N O sit æqualis, atque hoc fiat, quoad divisiones ipsius K O numero æquales sint divisionibus ipsius F M.

Et quoniam B E major est quam dimidium ipsius A B, erit B E major quam E A: multo igitur major est B E quam D A. Sed ipsi D A æqualis est O N. Ergo B E major est quam O N. Rursus, quoniam E D major est quam dimidium E A, erit E D major quam D A. Sed ipsi D A est æqualis N L. Quare E D quam N L est major: tota igitur D B major est quam O L. Ipsi vero D A æqualis est L K. Quare tota A B quam tota O K major erit.



Sed

Sed M F major eſt quam B A: multo igitur M F quam O K eſt major. Et quoniam O N, N L, L K inter ſe æquales ſunt; ſunt autem et M H, H G, G F inter ſe æquales, atque eſt multitudo earum, quæ ſunt in M F, æqualis multitudini ipſarum, quæ in O K: erit ut K L ad F G, ita O K ad F M [a]. Major autem eſt F M quam O K. Ergo et F G quam L K eſt major [b]. Atqui eſt F G ipſi C æqualis; et K L æqualis ipſi A D. Ergo C quam A D major erit. *Q. E. D.*

[a] 12. quinti.

[b] 14. quinti.

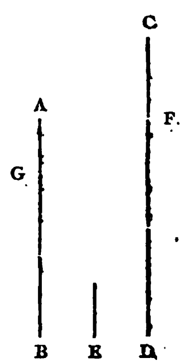
[II.]

PROP. II. THEOR.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, detractâ ſemper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommenſurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus inæqualibus expoſitis A B, C D, quarum minor ſit A B, et detractâ ſemper minore de majore, reliqua minime metiatur præcedentem: dico magnitudines A B, C D incommenſurabiles eſſe.

Si enim commenſurabiles ſint, eas magnitudo quædam metietur. Metiatur, ſi fieri poteſt; ſitque E; et A B quidem metiens D F relinquat ſeipſâ minorem C F; C F vero metiens B G relinquat ſeipſâ minorem A G; et hoc ſemper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ ſit minor ipſâ E. Itaque fiat, et relinquatur A G ipſâ E minor. Quoniam igitur E metitur A B, A B vero metitur D F; et E ipſam D F metitur. Sed et metitur totam C D. Ergo et reliquam C F metietur. At C F metitur B G. Quare et E ipſam B G metitur. Metitur autem et totam A B. Et reliquam igitur A G metietur, major minorem, quod fieri non poteſt. Non igitur magnitudines A B, C D aliqua magnitudo metietur. Ergo A B, C D magnitudines incommenſurabiles erunt.



Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, detractâ ſemper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommenſurabiles erunt. *Q. E. D.*

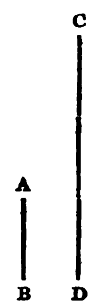
PROP.

PROP. III. PROBL. [III.]

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles A B, C D, quarum minor A B: oportet ipsarum A B, C D maximam communem mensuram invenire.

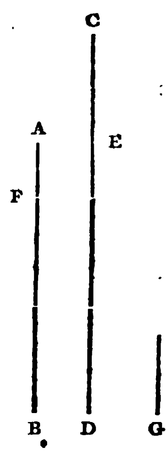
Vel igitur A B metitur C D, vel non metitur. Et si quidem A B metitur C D, metitur autem et seipsam; erit A B ipsarum A B, C D communis mensura. Et perspicuum est maximam esse; magnitudo enim major magnitudine A B ipsam A B non metietur.



Si vero A B non metitur C D; detractâ semper minore de majore, relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ præcedentem metietur [c], propterea quod A B, C D non sint incommensurabiles; et A B quidem metiens C D relinquat seipsâ minorem E C; E C vero metiens A B relinquat seipsâ minorem A F; et A F ipsam C E metiatur.

[c] 2. hujus.

Quoniam igitur A F metitur C E, sed C E metitur F B; et A F ipsam F B metitur. Metitur autem et seipsam; et totam igitur A B metietur. Sed A B metitur D E. Ergo A F ipsam D E metitur. Metitur autem et C E; et totam igitur C D metietur. Ergo A F ipsas A B, C D metitur. Ac propterea A F ipsarum A B, C D est communis mensura. Dico et maximam esse. Nisi enim ita sit, erit aliqua magnitudo, major ipsâ A F, quæ ipsas A B, C D metietur. Itaque metiatur, et sit G. Et quoniam G metitur A B, A B vero metitur E D; et G ipsam E D metitur. Metitur autem et totam C D. Ergo et reliquam C E metietur. Sed C E metitur F B. Quare G ipsam F B metitur. Metitur autem et totam A B; et reliquam igitur A F metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur magnitudo quædam major ipsâ A F magnitudines A B, C D metietur.



Ergo A F ipsarum A B, C D maxima erit communis mensura.

Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis A B, C D, maxima ipsarum communis mensura A F inventa est. *Q. E. F.*

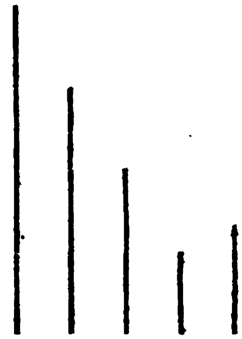
Cor. Ex hoc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

[IV.] PROP. IV. PROBL.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

Sint datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C: oportet ipsarum A, B, C maximam communem mensuram invenire.

Sumatur enim duarum A, B maxima communis mensura [d], quæ sit D; itaque D ipsam C vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoniam D ipsam C metitur, metitur autem et A, B; et ipsas A, B, C metietur. Quare D ipsarum A, B, C communis est mensura. Et manifestum est maximam esse; magnitudo enim major magnitudine D ipsas A, B, C non metietur. Nam si fieri potest, metiatur eas magnitudo major ipsâ D, quæ sit E. Quoniam igitur E magnitudines A, B, C metitur, et ipsas A, B metietur, et ipsarum A, B maximam communem mensuram D [e], major minorem, quod fieri non potest.



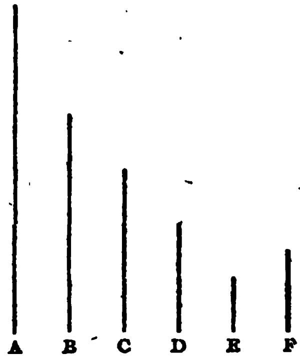
[d] 3. hujus.

[e] Cor. 3. hujus.

Sed non metiatur D ipsam C. Dico primum C, D commensurabiles esse. Quoniam enim commensurabiles sunt A, B, C, metitur eas aliqua magnitudo, quæ scilicet et ipsas A, B metitur; ergo et ipsarum A, B maximam communem mensuram D. Metitur autem et ipsam C. Quare dicta magnitudo ipsas C, D metitur: ideoque C, D commensurabiles sunt [f]. Sumatur ipsarum maxima communis mensura [d]; et sit E. Quoniam igitur E metitur D, D vero metitur A, B; et E ipsas A, B metietur.

[f] Def. 1. primi.

metietur. Metitur autem et C. Ergo E ipsarum A, B, C communis est mensura. Dico et maximam esse. Si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo F major ipsâ E, quæ magnitudines A, B, C metiatur. Et quoniam F metitur A, B, C, et ipsas A, B metietur; et igitur ipsarum A, B maximam communem mensuram metietur[g]. Sed D est maxima communis mensura ipsarum A, B: ergo F metitur D. Metitur autem et C: quare F ipsas C, D metitur; et igitur F metitur ipsarum C, D maximam communem mensuram. Sed ipsarum C, D maxima communis mensura est E: ergo F ipsam E metietur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur magnitudo major ipsâ E magnitudines A, B, C metietur. Ergo E ipsarum A, B, C maxima erit communis mensura, si D ipsam C non metiatur; si vero metiatur, erit ipsa D.



[g] Cor. 3. hujus.

Tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, maxima ipsarum communis mensura inventa est. *Q. E. F.*

Cor. Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, et ipsarum maximam communem mensuram metiri.

Similiter et in pluribus magnitudinibus maxima communis mensura invenietur, et Corollarium procedet.

PROP. V. THEOR. [V.]

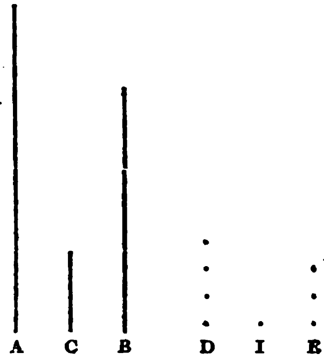
Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines A, B: dico magnitudinem A ad B rationem habere, quam numerus ad numerum.

Quoniam enim A, B commensurabiles sunt, metietur ipsas aliqua magnitudo. Metiatur, et sit C. Et quoties

ties C ipſam A metitur, tot unitates ſint in D; quoties autem C metitur B, tot unitates ſint in E.

Quoniam igitur C ipſam A metitur per unitates, quæ ſunt in D, metitur autem et unitas numerum D per unitates, quæ in ipſo ſunt; unitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipſam A. Ergo ut C ad A, ita eſt unitas ad D, et invertendo ut A ad C, ita D ad unitatem. Rurſus, quoniam C ipſam B metitur per unitates, quæ ſunt in E, metiturque unitas numerum E per unitates, quæ in ipſo ſunt; unitas numerum E æqualiter metietur, atque C ipſam B. Eſt igitur ut C ad B, ita unitas ad E. Oſtenſum autem eſt et ut A ad C, ita eſſe D ad unitatem. Quare ex æquo ut A ad B, ita numerus D ad E numerum.



Commenſurabiles igitur magnitudines A, B inter ſe rationem habent, quam D numerus ad numerum E. *Q. E. D.*

[VI.] PROP. VI. THEOR.

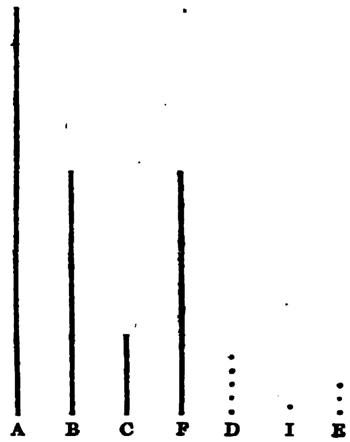
Si duæ magnitudines inter ſe rationem habeant, quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commenſurabiles.

Duæ enim magnitudines A, B inter ſe rationem habeant, quam D numerus ad numerum E: dico A, B magnitudines commenſurabiles eſſe.

Quot enim unitates ſunt in D, in tot partes æquales dividatur magnitudo A; et uni ipſarum æqualis ſit C: quot autem unitates ſunt in E, ex tot magnitudinibus, æqualibus ipſi C, componatur magnitudo F.

Quoniam igitur quot ſunt in D unitates, tot magnitudines ſunt in A ipſi C æquales; quæ pars eſt unitas ipſius D, eadem pars erit et C ipſius A; ut igitur C ad A, ita eſt unitas ad D. Erit igitur invertendo ut A ad C, ita D numerus ad unitatem. Rurſus, quoniam quot unitates ſunt in E, tot ſunt et in F magnitudines

nitudines ipsi C æquales; ut C ad F, ita erit unitas ad E numerum. Ostensum autem est et ut A ad C, ita D esse ad unitatem. Ergo ex æquo ut A ad F, ita D ad E. Sed ut D ad E, ita A ad B; et igitur ut A ad B, ita A ad F. Quod cum A ad utramque ipsarum B, F eandem habeat rationem, erit B ipsi F æqualis[h]. Metitur autem C ipsam F. Ergo et ipsam B metietur. Sed et metitur A. Quare C ipsas A, B metitur: commensurabilis igitur est A ipsi B[i].



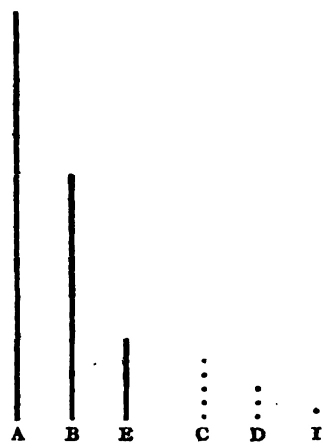
[h] 9. quinti.

[i] Def. 1. hujus.

Quare si duæ magnitudines inter se rationem habeant, quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commensurabiles. *Q. E. D.*

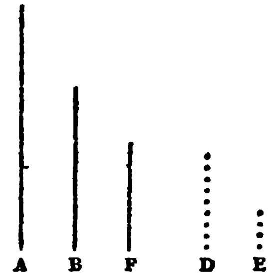
Aliter. Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem habeant, quam numerus C ad numerum D: dico magnitudines commensurabiles esse.

Quot enim unitates sunt in C, in tot partes æquales dividatur A; et uni ipsarum æqualis sit E: est igitur ut unitas ad C numerum, ita E ad A. Est autem et ut C ad D, ita A ad B. Ergo ex æquo ut unitas ad D numerum, ita E ad B. Sed unitas metitur D. Ergo et E ipsam B metitur. Metitur autem et E ipsam A, quoniam et unitas metitur C. Quare E utramque ipsarum A, B metietur; ideoque A, B commensurabiles sunt; atque est E communis ipsarum mensura.



Cor.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo numeri ut D, E, et recta linea ut A, inveniri poſſe aliam rectam F, adquam A rationem habeat, quam numerus D ad numerum E. Si autem inter ipſas A, F media proportionalis ſumatur ut B, erit ut A ad F, ita quod ſit ex A ad id quod ex B; hoc eſt, ut prima ad tertiam, ita figura, quæ ſit a primâ, ad eam, quæ a ſecundâ, ſimilem et ſimiliter deſcriptam [k]. Sed ut A ad F, ita D numerus ad numerum E. Factum igitur eſt et ut D numerus ad numerum B, ita quod ſit ex rectâ lineâ A ad id quod ex rectâ lineâ B.



[k] Cor. 2. 20. ſexti.

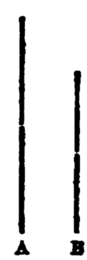
[VII.] PROP. VII. THEOR.

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe rationem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint incommenſurabiles magnitudines A, B: dico A ad B rationem non habere, quam numerus ad numerum.

Si enim A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum; commenſurabilis erit A ipſi B [l]. Atqui non eſt commenſurabilis. Non igitur A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum.

Quare incommenſurabiles magnitudines inter ſe rationem non habent, quam numerus ad numerum. *Q. E. D.*



[l] 6. hujus.

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

Si duæ magnitudines inter ſe rationem non habeant, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles erunt.

Duæ enim magnitudines A, B inter ſe rationem non habeant, quam numerus ad numerum: dico magnitudines A, B incommenſurabiles eſſe.

Si enim commenſurabilis eſt A ipſi B, rationem habet, quam numerus ad numerum [m]. Atqui non habet: incommenſurabiles igitur ſunt A, B magnitudines.



[m] 5. hujus.

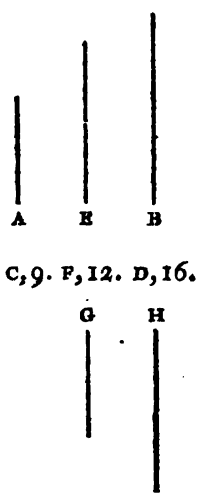
Ergo

Ergo si duæ magnitudines inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. *Q. E. D.*

* LEMMA I.

Si quatuor quantitatum prima sit ad secundam ut tertia ad quartam; erit et prima ad aliam, primæ utique et secundæ proportione mediam, ut tertia ad aliam, tertiæ et quartæ proportione mediam: modo tam tertia et quarta, quam prima et secunda, istiusmodi sint in suo genere quantitates, quæ proportione mediam capiant.

Sint A, B, C, D quatuor quantitates. Quarum prima A ad secundam B rationem habeat eandem, quam tertia C ad quartam D. Primæ et secundæ, A et B, sit E proportione media. Tertiæ item et quartæ, C et D, sit F proportione media. Dico esse A ad E ut C ad F. Non enim. Sed habeat A ad aliam quandam G proportionem eam, quam C ad F. Quam autem F ad D, eam habeat G ad H. Trium igitur A, G, H continua erit analogia; propter continuam trium C, F, D analogiam. Jam vero cum sit A ad G ut C ad F, et G ad H ut F ad D; ex æquo eirt A ad H ut C ad D. Sed ut C ad D, ita A ad B [a]. Erit igitur A ad H ut eadem A ad B. Quantitates igitur H, B inter se æquales. Quare E quæ duarum A, B proportione media est, ipsi G æqualis erit, quæ duarum A, H proportione media. Quare A ad E eandem proportionem habet, quam A ad G. Est autem A ad G ut C ad F [c]. Quare et A ad E ut C ad F. *Q. E. D.*



[a] ex hyp.

[c] Per construct.

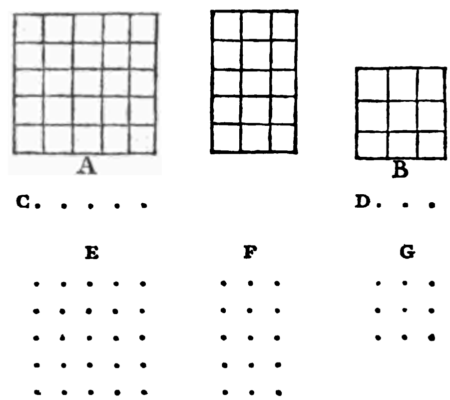
PROP.

[IX.] PROP. IX. THEOR.

Quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, inter ſe rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: et quadrata inter ſe rationem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quadrata vero, quæ a longitudine incommenſurabilibus rectis lineis fiunt, inter ſe rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: et quadrata inter ſe rationem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

Sint rectæ lineæ A, B longitudine commenſurabiles: dico quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B eam rationem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Quoniam enim commenſurabilis eſt A ipſi B longi-
[q] 5. hujus. tudine, rationem habet, quam numerus ad numerum [q].



Habeat, quam C ad D; et C ſeipſum quidem multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F; et D ſeipſum multiplicans faciat G. Itaque quoniam C ſeipſum quidem multiplicans fecit E, multiplicans vero
[r] Per conſtruct. D fecit F; erit ut C ad D, hoc eſt, ut A ad B [r], ita E ad F [s]. Sed ut A ad B, ita quadratum quod fit ex A ad
[s] 17. ſept.
[t] 1. ſexti. rectangulum, quod fit ſub A, B [t]. Eſt igitur ut quadratum

tum quod ex A, ad rectangulum sub A, B, ita E ad F. Rursus, quoniam D seipsum multiplicans fecit G, multiplicans vero C ipsum F fecit; ut C ad D, hoc est, ut A ad B, ita erit F ad G [u]. Ut autem A ad B, ita rectan- [u] 17. sept.
gulum, quod fit sub A, B, ad quadratum, quod fit ex B: ergo ut rectangulum sub A, B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. Sed ut quadratum, quod fit ex A, ad rectangulum sub A, B, ita erat E ad F: ex æquo igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. Est autem uterque ipsorum E, G quadratus, et E quidem est a numero C, G vero ab ipso D. Quadratum igitur, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B, rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. *Q. E. D.*

Sed quadratum, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B, rationem habeat, quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G: dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Sit enim ipsius quidem E latus C, ipsius vero G latus D; et C ipsum D multiplicans faciat F: ergo E, F, G deinceps proportionales sunt in ratione ipsius C ad D [u]. Et quoniam inter quadrata, quæ fiunt ex A, B, medium proportionale est rectangulum sub A, B [x]; inter numeros vero quadratos E, G medius [x] 1. sexti.
proportionalis est F [y]: erit ut quadratum, quod fit ex A, ad [y] 11. octavi.
rectangulum sub A, B, ita E ad F [z]. Sed ut quadra- [z] Lem. 1.
tum ex A, ad rectangulum sub A, B, ita A ad B: ergo 8. hujus.
A, B commensurabiles sunt; rationem enim habent, quam numerus E ad numerum F, hoc est, quam C ad D. *Q. E. D.*

Sed incommensurabilis sit A ipsi B longitudine: dico quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim quadratum ex A ad quadratum ex B rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine [a]. Non [a] ex demon-
est autem. Non igitur quadratum ex A ad quadratum stratis.
ex B rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. Si enim commensurabils sit A ipsi B longitudine,

tudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B rationem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Atqui non habet. Non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis.

Ergo quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, &c. *Q. E. D.*

Cor. Et manifestum est ex jam demonstratis, lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino et potentiâ commensurabiles esse; quæ vero potentiâ commensurabiles, non semper et longitudine; et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non semper et potentiâ incommensurabiles; quæ vero potentiâ incommensurabiles, omnino et longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata, quæ fiunt a rectis lineis longitudine commensurabilibus, rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quæ vero rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilia sunt: erunt rectæ lineæ longitudine commensurabiles, non solum longitudine, sed et etiam potentiâ, commensurabiles.

Rursus, quoniam quæcunque quadrata inter se rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commensurabilia, ut ostensum est, eorum igitur latera tam longitudine quam potentiâ commensurabilia sunt: quæcunque autem quadrata rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam aliquis numerus non quadratus ad alium numerum, commensurabilia sunt; hoc est, rectæ lineæ, a quibus ipsa describuntur, commensurabiles sunt potentiâ, non autem et longitudine. Ergo rectæ lineæ longitudine quidem commensurabiles, omnino et potentiâ commensurabiles sunt; potentiâ vero commensurabiles, non semper et longitudine, nisi earum quadrata rationem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico et longitudine incommensurabiles non semper potentiâ incommensurabiles esse. Quoniam potentiâ commensurabiles possunt rationem non habere, quam numerus ad numerum, ideoque cum potentiâ commensurabiles sint, longitudine sunt incommensurabiles. Ergo non

non quæ longitudine incommensurabiles sunt, omnino et potentiâ: sed longitudine incommensurabiles existentes aliæ etiam potentiâ aliæ potentiâ commensurabiles erunt.

Potentiâ vero incommensurabiles omnino et longitudine incommensurabiles sunt: si enim longitudine sint commensurabiles, et potentiâ commensurabiles erunt[c]. Atqui ponuntur incommensurabiles, quod est absurdum: potentiâ igitur incommensurabiles omnino et longitudine incommensurabiles erunt. [c] Ex hactenus ostensis.

PROP. X. THEOR. [X.]

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; et tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; et tertia quartæ incommensurabilis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales, A, B, C, D; sitque ut A ad B, ita C ad D, et sit A ipsi B commensurabilis: dico et C ipsi D commensurabilem esse.



Quoniam enim A commensurabilis est ipsi B, habebit A ad B rationem, quam numerus ad numerum[d]. Atque est ut A ad B, ita C ad D: ergo et C ad D rationem habet, quam numerus ad numerum: commensurabilis igitur est C ipsi D[e]. [d] 5. hujus. [e] 6. hujus.

Sed A ipsi B sit incommensurabilis: dico et C ipsi D incommensurabilem esse. Non enim. Commensurabilis igitur. Habet igitur C ad D rationem, quam numerus ad numerum. Sed ut C ad D, ita A ad B. Quare et numerus ad numerum. Si enim C ad D rationem habeat, quam numerus ad numerum; et A ad B eam, quam numerus ad numerum, rationem habebit[g]: atque erit A ipsi B commensurabilis[h], quod est absurdum; incommensurabilis enim ponitur. Ergo C ad D rationem non habet, quam numerus ad numerum. Ideoque C ipsi D est incommensurabilis[i]. [g] 11. quinti. [h] 6. hujus. [i] 8. hujus.

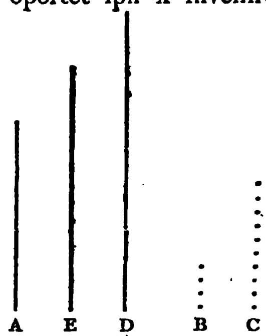
Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et quæ sequuntur. *Q. E. D.*

PROP.

[XI.] PROP. XI. PROBL.

Propositæ rectæ lineæ invenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentiâ.

Sit proposita recta linea A: oportet ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentiâ.



Exponantur duo numeri B, C, inter se rationem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc enim ante traditum est[l]. Ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex D. Et quoniam B ad C rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex A ad quadratum ex D rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est A ipsi D longitudine[m]. Sumatur inter ipsas A, D media proportionalis E: est igitur ut A ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E[n]. Sed A ipsi D longitudine est incommensurabilis: ergo et quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit[o]: incommensurabilis igitur est A ipsi E potentiâ. Ergo propositæ rectæ lineæ rationali, a qua dicebamus mensuras sumi, nempe A, potentiâ quidem commensurabilis inventa est D, hoc est, rationalis potentiâ tantum commensurabilis, irrationalis vero E[p]. Irrationales enim universe appellantur, quæ rationali et longitudine et potentiâ incommensurabiles sunt. *Q. E. D.*

[l] Cor. 6. hujus.
[m] 9. hujus.
[n] Cor. 2. 20. sexti.
[o] 10. hujus.
[p] Def. 5. hujus.

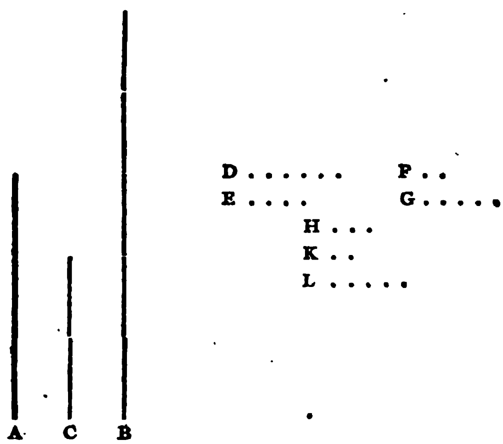
PROP.

PROP. XII. THEOR. [XII.]

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, et inter se commensurabiles sunt.

Utraque enim ipsarum A, B ipsi C sit commensurabilis: dico et A ipsi B commensurabilem esse.

Quoniam enim A commensurabilis est ipsi C, habebit A ad C rationem, quam numerus ad numerum[p]. Habeat, [p] 5. hujus.



quam numerus D ad numerum E. Rursus, quoniam commensurabilis est B ipsi C, habebit C ad B rationem, quam numerus ad numerum. Habeat, quam F ad G. Et rationibus datis quibuscunque, videlicet quam habet D ad E, et quam habet F ad G, sumantur numeri deinceps proportionales H, K, L in datis rationibus[q]; sitque ut D ad E, ita H ad K; ut autem F ad G, ita K ad L. [q] 2. octavi.

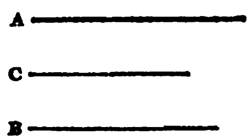
Quoniam igitur est ut A ad C, ita D ad E; sed ut D ad E, ita H ad K: erit et ut A ad C, ita H ad K. Rursus, quoniam est ut C ad B, ita F ad G, sed ut F ad G, ita K ad L; erit et ut C ad B, ita K ad L. Est autem et ut A ad C, ita H ad K: ex æquo igitur ut A ad B, ita H ad L[r]: ergo A ad B rationem habet quam numerus H ad L numerum: ac propterea A ipsi B est commensurabilis[s]. [r] 23. quinti. [s] 6. hujus.

Quæ igitur eidem magnitudini sunt commensurabiles, et inter se commensurabiles sunt. *Q. E. D.*

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

Si sint duæ magnitudines, et altera quidem alii cuidam sit commensurabilis, altera vero eidem incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Sint enim duæ magnitudines A, B, alia autem sit C; et A quidem ipsi C commensurabilis sit, B vero eidem incommensurabilis: dico et A ipsi B incommensurabilem esse.



Si enim commensurabilis est A ipsi B, quoniam et ipsi C commensurabilis est A; erit et C ipsi B commensurabilis[t]. Quod est contra hypothesin.

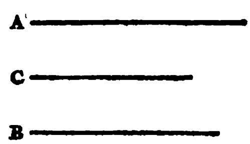
[t] 12. hujus.

[XIV.] PROP. XIV. THEOR.

Si duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A, B; altera vero ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis: dico et reliquam B ipsi C incommensurabilem esse.

Si enim commensurabilis est B ipsi C, quoniam et ipsi B commensurabilis est A; et A ipsi C commensurabilis erit[u]. Sed et incommensurabilis, quod fieri non potest. Non igitur commensurabilis est B ipsi C: ergo est incommensurabilis.



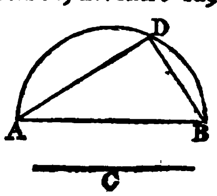
[u] 12. hujus.

Si igitur duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; et reliqua eidem incommensurabilis erit. *Q. E. D.*

LEMMA II.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo major plus potest quam minor.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B, C, quarum major sit A B: oportet invenire id, quo A B plus potest quam C.



Describatur super rectam lineam A B semicirculus A D B; et in eo aptetur

tetur recta linea A D, ipsi C æqualis [x]; et D B jungatur. [x] 1. quarti.
Perspicuum est angulum A D B rectum esse [y], et ipsam [y] 31. tertii.
A B plus posse quam A D, hoc est, quam C, quantum est rectæ lineæ D B quadratum [z]. [z] 47. primi.

Similiter autem et datis duabus rectis lineis, quæ ipsas potest hoc modo invenietur.

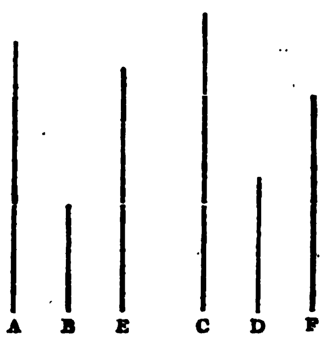
Sint duæ datæ rectæ lineæ A D, D B, et oporteat invenire rectam lineam, quæ ipsas possit. Exponantur enim ita, ut rectum angulum A D B contineant, et A B jungatur: patet rursus rectam lineam A B ipsas A D, D B posse [z].

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et tertia quam quarta tanto plus poterit, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Sint quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, sitque ut A ad B, ita C ad D; et A quidem plus possit quam B quadrato, quod fit ex E; C vero plus possit quam D quadrato ex F: dico si A ipsi E longitudine sit commensurabilis, et C ipsi F longitudine commensurabilem esse; si vero A ipsi E sit longitudine incommensurabilis, et C ipsi F longitudine incommensurabilem esse.

Quoniam enim est ut A ad B, ita C ad D; erit ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratum ex C ad id quod ex D fit quadratum [b]. Sed quadrato quidem, quod fit ex A, æqualia sunt quadrata, quæ ex ipsis E, B [c]; quadrato autem ex C æqualia sunt quadrata ex F, D: igitur ut quadrata, quæ fiunt ex E, B, ad quadratum ex B, ita quadrata, quæ fiunt ex F, D, ad quadratum ex D; et dividendo ut quadra-



[b] 22. sexti.
[c] ex hyp.

 tum

[d] 17. quinti. tum ex E ad quadratum ex B, ita quadratum ex F,
[e] 22. sexti. ad quadratum ex D[d]. Quare ut E ad B, ita est F ad D[e],
[f] 4. quinti. et invertendo ut B ad E, ita D ad F[f]. Est autem et ut A ad B, ita C ad D: ex æquo igitur ut A ad E, ita
[g] 22. quinti. est C ad F[g]. Ergo si A longitudine est commensurabilis ipsi E, et C ipsi F longitudine erit commensurabilis; si
[h] 10. hujus. vero incommensurabilis est A ipsi E, et C ipsi F incommensurabilis erit[h].

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. *Q. E. D.*

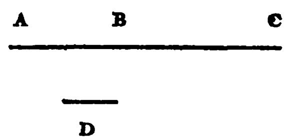
[XVI.]

PROP. XVI. THEOR.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum sit commensurabilis; et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles A B, B C: dico et totam magnitudinem A C utrique ipsarum A B, B C commensurabilem esse.

Quoniam enim commensurabiles sunt A B, B C, me-
[i] Def. 1. hujus. tietur eas aliqua magnitudo[i]. Metiatur, sitque D. Et quoniam D metitur ipsas A B, B C, et totam A C metietur. Metitur autem et A B, B C: ergo D magnitudines A B, B C et ipsam A C metitur. Commensurabilis igitur est A C utrique ipsarum A B, B C.



Sed A C uni ipsarum A B, B C sit commensurabilis, videlicet ipsi A B: dico et A B, B C commensurabiles esse.

Quoniam enim commensurabiles sunt A C, A B, metietur eas aliqua magnitudo. Metiatur, et sit D. Itaque quoniam D metitur ipsas A C, A B, et reliquam B C metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipsas A B, B C metietur. Ac propterea A B, B C commensurabiles sunt.

Si igitur duæ magnitudines commensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si &c. *Q. E. D.*

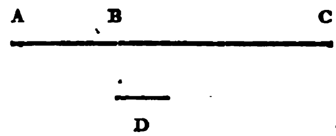
PROP

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si duæ magnitudines incommenſurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo uni ipſarum ſit incommenſurabilis; et quæ a principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommenſurabiles A B, B C: dico et totam magnitudinem A C utrique ipſarum A B, B C incommenſurabilem eſſe.

Si enim non ſunt incommenſurabiles C A, A B, metietur eas aliqua magnitudo. Metiatur, ſitque D, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur D metitur ipſas C A, A B, et reliquam B C metietur. Metitur autem et B A: ergo D ipſas A B, B C metitur; ac propterea commenſurabiles ſunt A B, B C[k]. Ponuntur autem et incommenſurabiles, quod fieri non poteſt. Non igitur ipſas C A, A B metietur aliqua magnitudo: quare C A, A B incommenſurabiles ſunt. Similiter et A C, C B incommenſurabiles eſſe demonſtrabimus. Ergo A C utrique ipſarum A B, B C eſt incommenſurabilis.



[k] Def. 1. hujus.

Sed A C uni ipſarum A B, B C incommenſurabilis ſit; et primum ipſi A B: dico et A B, B C incommenſurabiles eſſe. Si enim ſunt commenſurabiles, eas aliqua magnitudo metietur[k]. Metiatur, et ſit D. Quoniam igitur D metitur ipſas A B, B C, et totam A C metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipſas C A, A B metitur: ideoque C A, A B commenſurabiles ſunt. Ponuntur autem et incommenſurabiles, quod fieri non poteſt. Non igitur ipſas A B, B C metietur aliqua magnitudo: quare A B, B C incommenſurabiles erunt. Similiter demonſtrabimus, ſi A C incommenſurabilis ſit ipſi C B, etiam A B, B C incommenſurabiles eſſe.

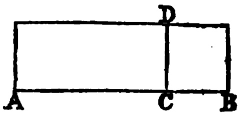
Si igitur duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, &c. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ; parallelogram-

mum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub partibus rectæ lineæ, ex applicatione factis, continetur.

Ad aliquam enim rectam A B, applicetur A D parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ D B: dico parallelogrammum A D rectangulo sub A C, C B æquale esse.



Atque hoc per se patet: quoniam enim quadratum est D B, erit D C ipsi C B æqualis; atque A D est parallelogrammum, quod sub A C, C B continetur.

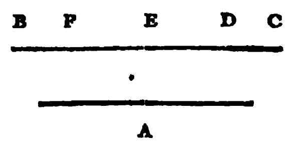
Si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, &c. *Q. E. D.*

[XVIII.] PROP. XVIII. THEOR.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes longitudine commensurabiles ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si major tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A, B C, quarum major B C; quartæ autem parti quadrati quod fit a minori A, (hoc est, ei, quod fit a dimidiâ ipsius A) æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et sit quod continetur sub B D, D C; sitque B D ipsi D C commensurabilis longitudine: dico B C plus posse quam A quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

Secetur enim B C bifariam in puncto E, et ipsi D E æqualis ponatur E F: reliqua igitur D C est æqualis B F. Et quoniam recta linea B C secatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum D; erit rectangulum sub B D, D C unà



1 5. secundi. cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E C[1]; quare et

et eorum quadrupla inter se æqualia erunt. Quod igitur quater sub B D, D C continetur unà cum quadrato, quod quater fit ex E D, æquale est quadrato, quod quater fit ex E C. Sed ei quidem, quod quater sub B D, D C continetur, æquale est quadratum ex A; ei vero, quod quater fit ex D E, æquale est quadratum ex D F [m]; et- enim D F ipsius D E est dupla; et ei, quod quater fit ex E C, æquale est quadratum ex B C; rursus enim B C dupla est ipsius E C. Ergo quadrata, quæ fiunt ex A, D F, æqualia sunt ei quod fit ex B C quadrato: ac propterea quadratum, quod fit ex B C, majus est quam quadratum, quod ex A, quadrato ex D F. Recta igitur linea B C tanto plus potest quam A, quantum est ipsius D F quadratum. Ostendendum est et B C ipsi D F commensurabilem esse. Quoniam B D commensurabilis est ipsi D C longitudine [m], erit et B C ipsi D C longitudine commensurabilis [n]. Sed D C ipsis C D, B F simul sumptis est commensurabilis longitudine; æqualis enim est C D ipsi B F [o]. Quare et B C ipsis B F, C D simul sumptis longitudine est commensurabilis; et reliquæ igitur F D longitudine commensurabilis erit [o]. Ergo B C plus potest quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

[m] ex hyp.
[n] 16. hujus.
[o] 6. hujus.

Sed B C plus possit quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A, æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et sit quod continetur sub B D, D C. Ostendendum est B D ipsi D C longitudine commensurabilem esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus B C plus posse quam A quadrato rectæ lineæ F D. Sed B C plus potest quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [n]: ergo B C commensurabilis est ipsi F D longitudine; et reliquæ igitur, duabus scilicet B F, D C simul sumptis, longitudine est commensurabilis [o]. Sed ex duabus B F, D C composita ipsi D C commensurabilis est longitudine, etenim B F est æqualis D C; ergo et B C ipsi D C longitudine est commensurabilis. Constat igitur B D ipsi D C longitudine commensurabilem esse [o].

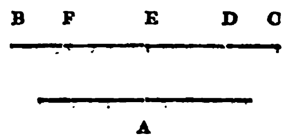
Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, &c. *Q. E. D.*

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A, B C, quarum major B C; quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori A, æquale parallelogrammum ad ipsam B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et sit quod continetur sub B D, D C; sitque B D ipsi D C longitudine incommensurabilis: dico B C plus posse quam A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendedemus ipsam B C plus posse quam A, quadrato rectæ lineæ D F. Ostendendum igitur est B C ipsi D F longitudine incommensurabilem esse. Quoniam incommensurabilis est B D ipsi D C, erit et B C ipsi

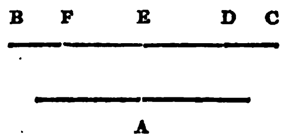


q 17. hujus. D C longitudine incommensurabilis[q]. Sed D C commensurabilis est duabus B F, D C simul sumptis: ergo et B C duabus B F, D C simul sumptis longitudine est incom-
r 14. hujus. mensurabilis[r]. Ac propterea B C reliquæ F D incommensurabilis est longitudine; et B C plus potest quam A, quadrato ex F D[q]. Igitur B C plus potest quam A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Sed B C rursus plus possit quam A, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A, æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et sit quod sub B D, D C continetur. Ostendendum est B D ipsi D C longitudine incommensurabilem esse.

Iisdem

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus B C plus posse quam A, quadrato rectæ lineæ D F. Sed B C plus potest quam A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis [s]: incommensurabilis igitur est B C ipsi D F longitudine: quare et reliquæ, videlicet duabus B F, D C simul sumptis, est incommensurabilis [t]. Sed ex duabus B F, D C composita commensurabilis est longitudine ipsi D C [u]. Ergo et B C ipsi D C est incommensurabilis longitudine [x]; ac propterea dividendo B D ipsi D C longitudine incommensurabilis erit [t].



[s] ex hyp.
[t] 17. hujus.
[u] 6. hujus.
[x] 14. hujus.

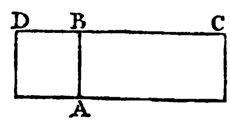
Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, &c. *Q. E. D.*

PROP. XX. THEOR. [XX.]

Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, rationale est.

Exponatur recta quædam A B, et longitudine huic commensurabilis alia B C. Dico rectangulum A C, sub duabus A B, B C comprehensum, rationale esse.

Describatur ex A B quadratum A D: ergo A D est rationale [y]. Et quoniam A B commensurabilis est ipsi B C longitudine, atque est A B æqualis B D; erit B D ipsi B C longitudine commensurabilis. Est autem et ut B D ad B C, ita D A ad A C [z]; et commensurabilis est B D ipsi B C: ergo et D A ipsi A C commensurabile erit [a]. Estque rationale D A: quare et A C est rationale [b].



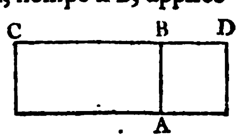
[y] Def. 8. hujus.
[z] 1. sexti.
[a] 10. hujus.
[b] Def. 9. hujus.

Quod igitur sub rationalibus, &c. *Q. E. D.*

PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, et ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

Rationale enim A C ad rationalem, nempe A B, applicetur, latitudinem faciens B C: dico B C rationalem esse, et ipsi A B longitudine commensurabilem.



Describatur enim ex A B quadratum A D: ergo A D rationale est. Sed et rationale est A C: ergo A D ipsi A C est commensurabile,

[a] Def. 9. hujus. [b] 1. sexti. mensurabile [a]. Atque est ut DA ad AC, ita DB ad BC [b]. Commensurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. Est autem BD æqualis BA: quare AB ipsi BC longitudine commensurabilis est. Sed AB est rationalis. Rationalis igitur est et BC, et ipsi BA longitudine commensurabilis.

Si igitur rationale ad rationalem applicetur, &c. *Q. E. D.*

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

Quod sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, irrationale est; et recta linea, ipsum potens, est irrationalis, vocetur autem media.

Vide fig. Prop. 20. Sub rationalibus enim potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis AB, BC contineatur rectangulum AC: dico AC irrationale esse; et rectam lineam, quæ ipsum potest, irrationalem esse; vocetur autem media.

Describatur enim ex AB quadratum AD: ergo AD rationale est [c]. Et quoniam AB incommensurabilis est ipsi BC longitudine, potentiâ enim solum ponuntur commensurabiles, atque est AB æqualis BD: incommensurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. Est autem ut DB ad BC, ita AD ad AC [d]: ergo AC ipsi AD est incommensurabile. Sed AD rationale est: irrationale igitur est AC [e]: quare et recta linea, quæ ipsum AC potest, videlicet, quæ potest quadratum ipsi æquale, est irrationalis [f]. Vocetur autem media; propterea quod ipsius quadratum est æquale rectangulo, quod sub AB, BC continetur, et inter ipsas AB, BC media sit proportionalis. *Q. E. D.*

[c] Def. 8. hujus.
[d] 1. sexti.
[e] Def. 10. hujus.
[f] Def. 11. hujus.

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

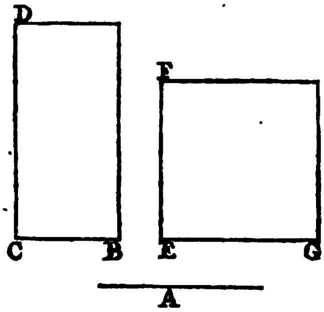
Quod fit a mediâ ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem; sed ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

Duarum quarundam rationalium, potentiâ solum commensurabilium, fit media A; et ad aliquam rationalem, CB, ei quod fit ex A æquale spatium applicetur BD, latitudinem faciens CD: dico CD rationalem esse, sed ipsi BC longitudine incommensurabilem.

Quoniam enim media est A, potest spatium contentum sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus [g]. Possit GF, sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus EG, EF comprehensum. Sed potest et BD. Æquale

[g] 22. hujus.

Æquale igitur est B D ipsi G F. Atque est illi æquiangulum; æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproce proportionalia [h]: ergo ut recta B C ad E G rectam, ita est E F ad C D. Est igitur et ut quadratum ex B C ad quadratum ex E G, ita quadratum ex E F ad id quod fit ex C D quadratum [l]. Sed quadratum ex B C commensurabile est quadrato ex E G [k], utraque enim ipsarum est rationalis: commensurabile igitur est et quadratum ex E F quadrato ex C D [l]. Est autem quadratum ex E F rationale; nimirum cum E G, E F rationales sint potentiâ commensurabiles. Ergo et rationale est quadratum ex C D. Ac propterea recta linea C D est rationalis [k]. Præterea quoniam F E incommensurabilis est ipsi E G longitudine, potentiâ enim solum commensurabiles sunt [m], ut autem F E ad E G, ita quadratum ex E F ad rectangulum sub F E, E G: erit quadratum ex E F incommensurabile rectangulo sub F E, E G [l]. Sed quadrato quidem ex E F commensurabile est quadratum ex C D, id enim ostensum: ergo quadratum ex C D incommensurabile est rectangulo sub E F, E G. Sed eidem rectangulo sub E F, E G est commensurabile rectangulum sub D C, C B, utrumque enim est æquale quadrato ex A: ergo quadratum ex C D incommensurabile est rectangulo sub D C, C B [n]. Sed ut quadratum ex C D ad rectangulum sub D C, C B, ita est D C ad C B. Ergo D C ipsi C B incommensurabilis est longitudine; et ob id D C est rationalis, sed ipsi C B longitudine incommensurabilis [k]. *Q. E. D.*



[h] 14. sexti.

[l] 22. sexti.

[k] Def. 6. hujus.

[l] 10. hujus.

[m] 22. hujus.

[n] 13. hujus.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

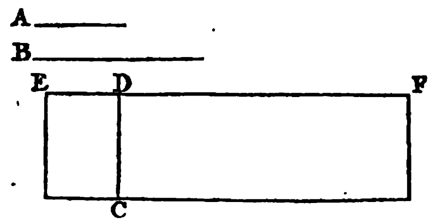
Mediæ commensurabilis, sive longitudine sive potentiâ tantum, media est.

Sit media A, et ipsi A commensurabilis sit B: dico et B mediam esse.

Exponatur enim rationalis C D, et quadrato quidem ex A æquale ad C D applicetur spatium rectangulum

C E,

C E, latitudinem efficiens E D. Rationalis igitur eſt E D,



[s] 23. hujus. ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis [s]. Quadrato autem ex B æquale ad D C applicetur ſpatium rectangulum C F, latitudinem efficiens D F. Quoniam igitur recta A potentiâ ſaltem commenſurabilis eſt ipſi B, erit [t] Def. 3. hujus. quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile [t]. Sed quadrato quidem ex A æquale eſt rectangulum E C [u]; qua- [u] Per conſtruct. drato autem ex B æquale C F. Commenſurabile igitur eſt rectangulum E C rectangulo C F. Atque eſt ut E C ad C F, [x] 1. ſexti. ita E D ad D F [x]: ergo E D ipſi D F longitudine eſt commenſurabilis. Eſt autem E D rationalis, et longitudine incommenſurabilis ipſi D C [s]: ergo et D F rationalis eſt, [y] 13. hujus. et ipſi D C longitudine incommenſurabilis [y]: rationales igitur ſunt C D, D F, potentiâ ſolum commenſurabiles. Quod autem ſub rationalibus potentiâ ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, irrationale eſt; et recta linea ipſum potens eſt irrationalis, vo- [z] 22. hujus. caturque media [z]: ergo recta linea quæ poteſt rectangulum ſub C D, D F eſt media. Sed B poteſt rectangulum ſub C D, D F: quare B media erit.

* DEFINITIO XII.

Spatium medium dicitur, quod quadrato ex mediâ eſt æquale.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt ſpatium medio ſpatio commenſurabile medium eſſe. Poſſunt enim ipſa rectæ lineæ quæ ſunt potentiâ commenſurabiles, quarum altera media eſt: ergo et reliqua media erit.

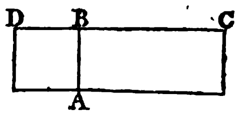
[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

Quod ſub mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur, rectangulum medium eſt.

Sub mediis enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis A B, B C contineatur rectangulum A C: dico A C medium eſſe.

Deſcribatur

Describatur enim ex A B quadratum A D: ergo A D medium est. Et quoniam commensurabilis est A B ipsi B C longitudine, æqualis autem A B ipsi B D; erit D B ipsi B C longitudine commensurabilis: quare D A commensurabile est ipsi A C. Sed A D est medium: ergo et A C medium erit[a]. *Q. E. D.*



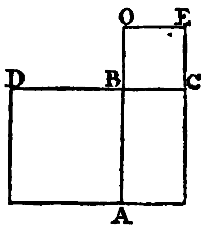
[a] Cor. 24. hujus.

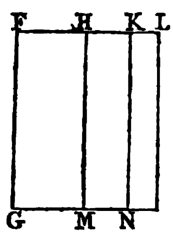
PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

Quod sub mediis potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est vel medium.

Sub mediis enim potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis A B, B C contineatur rectangulum A C: dico A C vel rationale esse, vel medium.

Describantur enim ex A B, B C, quadrata A D, B E: utrumque igitur ipsorum A D, B E medium est. Exponatur rationalis F G; et ipsi quidem A D æquale ad F G applicetur parallelogrammum rectangulum G H, latitudinem faciens F H; ipsi vero A C æquale ad H M applicetur rectangulum M K, latitudinem faciens H K[b]; et insuper ipsi B E æquale similiter ad K N applicetur N L, latitudinem faciens K L. In rectâ igitur lineâ sunt F H, H K, K L[c]. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum A D, B E, atque est A D quidem æquale ipsi G H, B E vero ipsi N L; erit et utrumque ipsorum G H, N L medium, et ad rationalem F G applicata sunt. Ergo et utraque ipsarum F H, K L est rationalis, et ipsi F G longitudine incommensurabilis[d]. Et quoniam commensurabile est A D ipsi B E[e]; erit et G H ipsi N L commensurabile. Sed est ut G H ad N L, ita F H ad K L[f]. Ergo F H ipsi K L est commensurabilis longitudine[g]; ac propterea F H, K L rationales sunt longitudine commensurabiles. Rationale igitur est rectangulum, quod sub F H, K L continetur[h]. Et quoniam B D quidem ipsi B A est æqualis, O B vero ipsi B C; erit ut





[b] 45. primi.

[c] 14. primi.

[d] 23. hujus.

[e] ex hyp.

[f] 1. sexti.

[g] 10. hujus.

[h] 20. hujus.

ut D B ad B C, ita A B ad B O. Sed ut D B ad B C, ita D A quadratum ad rectangulum A C [g]. Ut autem A B ad B O, ita A C rectangulum ad quadratum C O: est igitur ut D A ad A C, ita A C ad C O. Æquale autem est A D ipsi G H, et A C ipsi M K, et C O ipsi N L. Quare ut G H ad M K, ita M K ad N L; et igitur ut F H ad H K, ita H K ad K L: ideoque quod sub F H, K L continetur est æquale quadrato, quod fit ex H K [h]. Est autem quod continetur sub F H, K L rationale [i]: ergo et rationale est quadratum ex H K; ac propterea recta linea H K rationalis. Et si quidem H K commensurabilis est ipsi H M, hoc est, ipsi F G, longitudine, erit rectangulum N H rationale [k]. Si vero H K est incommensurabilis ipsi F G longitudine, K H, H M rationales erunt potentiâ solum commensurabiles, et ob id rectangulum H N medium erit [k]: ergo H N vel rationale est vel medium. Sed H N est, æquale ipsi A C: quare A C vel rationale, vel medium est.

[g] 1. sexti.
[h] 17. sexti.
[i] 20. hujus.
[k] 22. hujus. & Def. 12.

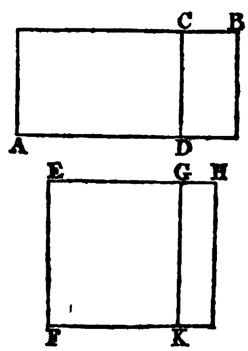
Quod igitur sub mediis potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est, vel medium. *Q. E. D.*

[XXVII.]

PROP. XXVII. THEOR.

Medium non superat medium rationali.

Si enim fieri potest, medium A B superet medium A C rationali D B; et exponatur rationalis E F, atque ipsi quidem A B æquale ad E F applicetur parallelogrammum rectangulum F H, latitudinem faciens E H; ipsi vero A C æquale auferatur F G [l]: reliquum igitur B D reliquo K H est æquale. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum A B, A C, estque A B æquale F H, et A C æquale F G; erit et utrumque ipsorum F H, F G medium. Et ad rationalem E F applicata sunt: rationalis igitur est utraque earum E H, E G, sed ipsi E F longitudine incommensurabilis [m]. Et quoniam rationale est D B, et ipsi K H æquale; et K H rationale erit. Est autem ad rationalem E F applicatum: rationalis igitur est G H, et ipsi E F commen-



[l] 45. primi.
[m] 23. hujus.

commensurabilis longitudine[m]. Sed et E G est ratio- [m] 21. hujus.
nalis, et ipsi E F longitudine incommensurabilis: ergo
E G incommensurabilis est ipsi G H longitudine[n]. At- [n] 13. hujus.
que est ut E G ad G H, ita quadratum ex E G ad rectan-
gulum, quod sub E G, G H continetur[o]: incommensura- [o] 1. sexti.
bile igitur est quadratum ex E G rectangulo sub E G,
G H[p]. Sed quadratum quidem ex E G commensura- [p] 10. hujus.
bile est quadratis ex E G, G H simul sumptis; nimirum
cum quadrata illa ex E G, G H utraque sunt rationalia.
Rectangulo autem sub E G, G H commensurabile est
quod bis sub E G, G H continetur rectangulum, utpote
illius duplum. Quadratis igitur ex E G, G H simul
sumptis incommensurabile est id, quod bis sub E G, G H
continetur rectangulum[q]. Quapropter et quod com- [q] 14. hujus.
ponitur ex quadratis ex E G, G H simul sumptis, unà
cum eo, quod bis sub E G, G H continetur, rectangulo,
hoc est, ipsum ex E H quadratum[r], incommensurabile [r] 4. secundi.
est quadratis ex E G, G H[s]. Sunt autem rationalia quæ [s] 17. hujus
fiunt ex E G, G H quadrata: irrationale igitur est qua-
dratum ex E H[t]: ac propterea E H est irrationalis. Sed [t] Def. 10. hujus.
et rationalis, quod fieri non potest.

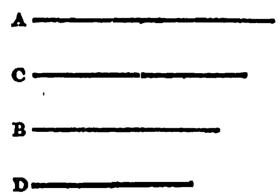
Non igitur medium superat medium rationali. *Q. E. D.*

PROP. XXVIII. PROBL. [XXVIII.]

Datis duabus rationalibus potentiâ solum commensurabilibus, medias invenire potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant.

Exponantur duæ rationales potentiâ solum commensurabiles A, B, et sumatur inter ipsas A, B media proportionalis C[u], fiatque ut A ad B, ita C ad D[x]. [u] 13. sexti. [x] 12. sexti.

Quoniam igitur A, B rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, erit quod sub ipsis A, B continetur rectangulum[y], hoc est, quadratum ex C[z], medium: ergo recta linea C media est. Et quoniam ut A ad B, ita est C ad D, suntque A, B potentiâ solum commensurabiles; et C, D potentiâ solum commensurabiles erunt[a]. Est autem recta linea C media: media igitur est et D[b]: quare C, D mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico etiam ipsas rationale continere. Quoniam enim est ut A ad B, ita C ad D, erit permutando ut A ad C, ita B ad D[c]. [y] 22. hujus. [z] 17. sexti. [a] 10. hujus. [b] 24. hujus. [c] 16. quinti.



Sed

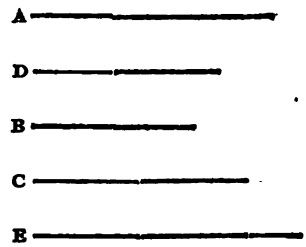
Sed ut A ad C, ita C ad B: ergo et ut C ad B, ita B ad D: quod igitur sub ipsis C, D continetur, quadrato ex B
[z] 17. sexti. est æquale [z]. Rationale autem est quadratum ex B. Ergo et quod continetur sub C, D, rationale erit.

Inventæ igitur sunt mediæ potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale continent. *Q. E. F.*

[XXIX.] PROP. XXIX. PROBL.

Datis tribus rationalibus potentiâ solum commensurabilibus, medias invenire potentiâ solum commensurabiles, quæ medium contineant.

Exponantur tres rationales potentiâ solum commensurabiles A, B, C, sumaturque inter ipsas A, B media
[d] 13. sexti. proportionalis D [d], et fiat ut B ad C, ita D ad E [e].
[e] 12. sexti. Quoniam igitur A, B rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, erit quod sub A, B continetur rectan-
[f] 22. hujus. gulum [f], hoc est, quadratum
[g] 17. sexti. ex D, medium [g]: ergo D media est. Et quoniam B, C sunt rationales potentiâ solum commensurabiles, atque est ut B ad C, ita D ad E; rectæ lineæ D, E potentiâ so-
[h] 10. hujus. lum commensurabiles erunt [h]. Est autem D media: ergo et
[i] 24. hujus. E media est [i]; ac propterea D, E mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico ipsas etiam medium continere. Quoniam enim est ut B ad C, ita D ad E, erit permutando ut B ad D, ita C ad E. Ut autem B ad D, ita est D ad A: ergo et ut D ad A, ita C ad E. Quod igitur sub A, C continetur rectangulum, est æquale
[k] 16. sexti. contento sub D, E [k]. Est autem quod continetur sub A, C medium [f]. Ergo et quod continetur sub D, E, medium erit.



Inventæ igitur sunt mediæ potentiâ solum commensurabiles, quæ medium continent. *Q. E. F.*

LEMMA IV.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipsis componitur etiam quadratus sit.

Exponantur duo numeri A B, B C, qui vel pares sint

A . . . . . D . . . . . C . . . . B

utrique, vel utrique impares. Et quoniam sive a pari par auferatur,

auferatur, ſive ab impari impar, reliquus par eſt[l]; erit A C [l] 24. & 26.
numerus par. Secetur A C bifariam in D. Ergo qui fit noni.
ſub A B, B C una cum quadrato ex C D eſt æqualis ei, qui fit ex B D quadrato[m]. Sed et ſimiles plani ſint [m] 6. ſecundi.
A B, B C. Itaque qui fit ex A B, B C eſt quadratus; oſtenſum enim eſt ſi duo ſimiles plani ſeſe multiplicantes aliquem faciant, factum quadratum eſſe[n]. In- [n] 1. noni.
venti igitur ſunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit ſub A B, B C, et qui fit ex C D, qui quidem inter ſe compoſiti quadratum numerum faciunt, nempe eum qui fit ex B D. *Q. E. F.*

Cor. Et manifeſtum eſt rurſus inventos eſſe duos numeros quadratos, et qui fit ex B D, et qui ex C D, ita ut ipſorum exceſſus, videlicet qui fit ſub A B, B C, ſit quadratus; quando A B, B C ſimiles plani ſunt. Quando autem non ſunt ſimiles plani, inventi ſunt duo quadrati, et qui fit ex B D, et qui ex C D, quorum exceſſus, nempe qui ſub A B, B C, non eſt quadratus.

LEMMA V.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipſis componitur non ſit quadratus.

Sit enim qui ſub A B, B C quadratus[o], ut dictum eſt, [o] Lemma
et par numerus C A; ſeceturque C A bifariam in D. præc.
Perſpicuum eſt quadratum factum ex A B, B C, una cum quadrato ex C D, æqualem eſſe ei qui fit ex B D quadrato[m]. Auferatur unitas D E; ergo qui ſub A B, B C quadratus una cum quadrato ex C E, minor eſt quadrato ex B D. Dico igitur numerum, ex quadrato ſub A B, B C, una cum quadrato ex C E compoſitum, quadratum non eſſe.

Vel quod perinde eſt, ſi factus ſub A B, B C et quadratus ex C E compoſiti efficiant numerum M, dico M non eſſe quadratum. Propter æquales A D, D C, major

A . . G . . . D . E . . . . C . . . . B

M 160.

N ——

erit A E quam E C. Majori igitur A E auferatur E G, minori E C æqualis. Et cum E A major ſit quam E G, addito communi B E, major erit B A quam B G. Factus igitur ex A B, B C facto ex G B, B C major. Et quadrato

A . . G . . . D . E . . . . C . . . . B

M 160.

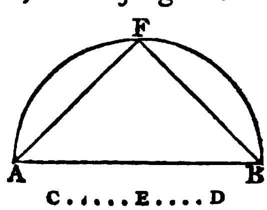
N ——

ex C E communiter addito, qui componitur ex facto sub A B, B C una cum quadrato ex C E major erit eo, qui componitur ex facto sub G B, B C una cum quadrato ex C E. Sed composito ex prioribus æqualis est numerus
p 6. secundi. M; ex alteris composito, quadratus ex B E [p]. Numerus igitur M quadrato ex B E major erit. Idem vero numerus M, ex facto utique sub A B, B C una cum quadrato C E compositus, quadrato ex B D, ex supra ostensis, minor. Jam vero si quadratus sit numerus M, numerus aliquis seipsum multiplicans illum M fecerit. Sit igitur N numerus, qui, seipsum multiplicans, illum M fecit. Et cum quadratus M quadrato ex B E major, quadrato autem ex B D minor sit, quadrati autem majores ex majoribus necessario fiant; omnino numerus N, ex quo factus est quadratus M, numero B E major, numero autem B D minor erit. Quod est absurdum. Non datur enim numerus minor quam B D, qui major idem sit quam B E. Quando ipsi B D, B E unitate differunt. Non est igitur quadratus M. Inventi sunt igitur quadrati duo, nempe quadratus sub A B, B C factus, et quadratus ex C E, qui compositi non quadratum efficiunt.

[XXX.] PROP. XXX. PROBL.

Invenire duas rationales, potentiâ solum commensurabiles, ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponatur rationalis quædam A B, et duo quadrati numeri C D, D E, ita ut ipsorum excessus C E non
q Cor. Lem. 4. sit quadratus [q]: describatur autem super rectam lineam A B semicirculus A F B, fiatque ut D C ad C E, ita ex A B
r Cor. 6. hujus. quadratum ad quadratum ex A F [r]; et F B jungatur.



Quoniam igitur est ut quadratum ex B A ad quadratum ex A F, ita D C ad C E; habebit quadratum ex B A ad quadratum ex A F rationem eam, quam numerus D C ad C E numerum. Ergo quadratum ex B A quadrato ex A F est commensurabile.

ſurabile [s]. Sed rationale eſt quadratum ex A B [t]: ergo et quadratum ex A F rationale erit [u]; ac propterea recta linea A F eſt rationalis [x]. Et quoniam D C ad C E rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum [y], neque quadratum ex B A ad quadratum ex A F rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt recta linea B A ipſi A F longitudine [z]: ergo A B, A F rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles [a]. Quod cum ſit ut D C ad C E, ita quadratum ex B A ad quadratum ex F A; erit per converſionem rationis ut C D ad D E, ita quadratum ex A B ad quadratum ex B F [b]. Sed C D ad D E rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo et quadratum ex A B ad quadratum ex B F rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ob id recta linea A B ipſi B F longitudine eſt commenſurabilis [z]. Atque eſt quadratum ex A B æquale quadratis ex A F, F B: ergo A B plus poteſt quam A F, quadrato rectæ lineæ B F ſibi commenſurabilis longitudine.

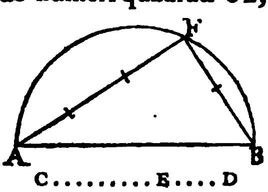
[s] 6. hujus. [t] Def. 8. hujus. [u] Def. 9. hujus. [x] Def. 6. hujus. [y] Per conſtruct. [z] 9. hujus. [a] Def. 3. hujus. [b] Cor. 19. quinti, & 47. primi.

Inventæ igitur ſunt duæ rationales potentiâ ſolum commenſurabiles B A, A F, ita ut major B A plus poteſt quam minor A F, quadrato ipſius F B, ſibi longitudine commenſurabilis. *Q. E. F.*

PROP. XXXI. PROBL. [XXXI.]

Invenire duas rationales, potentiâ ſolum commenſurabiles, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Exponatur rationalis A B, et duo numeri quadrati C E, E D, ita ut C D, qui ex ipſis componitur, non ſit quadratus [c]; atque ſuper rectam lineam A B ſemicirculus A F B deſcribatur, et fiat ut D C ad C E, ita quadratum ex A B ad quadratum ex A F [d], et jungatur F B. Similiter quidem oſtendemus, ut in antecedente, A B, A F rationales eſſe potentiâ ſolum commenſurabiles. Et quoniam eſt ut D C ad C E, ita quadratum ex B A ad id quod ex A F quadratum; erit per converſionem rationis



[c] Lemma 5. hujus. [d] Cor. 6. hujus.

ut C D ad D E, ita quadratum ex A B ad quadratum ex B F. Sed C D ad D E rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum [f]. Non igitur quadratum ex A B ad quadratum ex B F rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo A B ipsi B F longitudine est incommensurabilis [g]. Et A B plus potest quam A F quadrato rectæ lineæ F B, sibi longitudine incommensurabilis. *Q. E. F.*

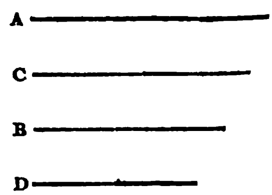
[f] Per construct.
[g] 9. hujus.

[XXXII.]

PROP. XXXII. PROBL.

Invenire duas medias potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant; ita ut major plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponantur duæ rationales potentiâ solum commensurabiles A, B, ita ut A major plus possit quam B minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [h]. Et sit rectangulo sub A, B æquale quadratum, quod sit a rectâ lineâ C. Media igitur est recta C [i]. Quadrato vero, quod



sit ex B, æquale sit rectangulum sub C, D; rationale autem est quod ex B: ergo et rectangulum sub C, D est rationale. Et quoniam est ut A ad B, ita rectangulum sub A, B ad quadratum ex B; sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex C, quadrato autem ex B æquale rectangulum sub C, D [k]: erit ut A ad B, ita quadratum ex C ad rectangulum sub C, D. Sed ut quadratum ex C ad rectangulum C, D, ita recta linea C ad ipsam D: ut igitur A ad B, ita C ad D. Commensurabilis autem est A ipsi B potentiâ solum: ergo et C ipsi D potentiâ solum est commensurabilis [l]. Atque est C media: media igitur est et D [m]. Et quoniam est ut A ad B, ita C ad D, et A plus potest quam B quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et C plus poterit quam D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [n].

[h] 30. hujus.
[i] 22. hujus.
[k] Per construct.
[l] 10. hujus.
[m] 24. hujus.
[n] 15. hujus.

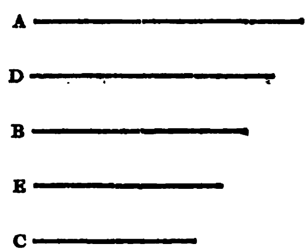
Inventæ igitur sunt duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles C, D, quæ rationale continent, et C plus potest quam D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. *Q. E. F.*

Similiter

Similiter autem oſtendetur, inveniri poſſe duas medias, potentiâ ſolum commenſurabiles, et continentes rationale, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Id enim efficietur, ſi A plus poſſit quam B quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

PROP. XXXIII. PROBL. [XXXIII.]

Invenire duas medias potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant; ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.



Exponantur tres rationales A, B, C potentiâ ſolum commenſurabiles, quarum A plus poſſit quam C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; et ſit rectangulo ſub ipſis A, B æquale quadratum, quod ſit ex D [s]. Itaque recta linea D media [t]. Rectangulo autem ſub B, C æquale ſit rectangulum ſub D, E [u]. Quoniam igitur eſt ut rectangulum ſub A, B ad rectangulum ſub B, C, ita recta linea A ad ipſam C [x]; ſed rectangulo quidem ſub A, B æquale eſt quod fit ex D quadratum, rectangulo autem ſub B, C æquale rectangulum ſub D, E; erit ut A ad C, ita quadratum ex D ad rectangulum ſub D, E. Sed ut quadratum ex D ad rectangulum ſub D, E, ita D ad E [x]; et igitur ut A ad C, ita D ad E. Commenſurabilis autem eſt A ipſi C potentiâ ſolum [y]: ergo et D ipſi E potentiâ ſolum eſt commenſurabilis [z]. Atqui eſt D media: media igitur eſt et E [a]. Itaque quoniam eſt ut A ad C, ita D ad E, et A plus poteſt quam C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; et D plus poterit quam E quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine [b]. Dico præterea rectangulum ſub D, E medium eſſe. Quoniam enim rectangulo ſub B, C æquale eſt rectangulum ſub D, E [y]; medium autem eſt quod ſub B, C [c]: ergo et quod ſub D, E medium erit.

Inventæ igitur ſunt duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles D, E, quæ medium contineant; ita ut

[s] 14. ſecundi.
[t] 22. hujus.
[u] 45. primi.
[x] 1. ſexti.
[y] Per conſtruct.
[z] 10. hujus.
[a] 24. hujus.
[b] 15. hujus.
[c] 22. & Def. 12. hujus.

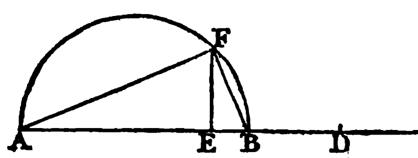
major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. *Q. E. F.*

Rurſus ſimiliter oſtenditur, quomodo inveniantur duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles et medium continentes, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Id enim efficietur, ſi A plus poſſit quam C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

[XXXIV.] PROP. XXXIV. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentiâ incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod ſub ipſis continetur, medium.

Exponantur duæ rationales potentiâ ſolum commenſurabiles A B, B C, ita ut major A B plus poſſit quam minor B C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incom-



[e] 31. hujus. menſurabilis [e]; et recta B C ſecta ſit bifariam ad D; et quadrato, quod ſit ab alterutrâ ipſarum B D, D C, æquale parallelogrammum ad rectam lineam A B applicetur, de-
[f] 28. ſexti. ficiens figurâ quadratâ [f], et ſit quod continetur ſub A B, E B; et deſcribatur ſuper rectam lineam A B ſemicirculus A F B, ducaturque ipſi A B ad rectos angulos E F; et A F, F B jungantur: quæ, propter ſemicirculum, angu-
[g] 31. tertii. lum A F B rectum continebunt [g].

Quoniam igitur duæ rectæ lineæ A B, B C inæquales ſunt, et A B plus poteſt quam B C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod ſit a minori B C, hoc eſt, quadrato dimidiæ ipſius, æquale parallelogrammum applicatum eſt ad A B, deficiens figurâ quadratâ, quod quidem ſub A E, E B
[h] 19. hujus. continetur; erit A E ipſi E B incommenſurabilis [h]. Et quoniam eſt ut A E ad E B, ita rectangulum ſub B A,
[i] 1. ſexti. A E ad rectangulum ſub A B, B E [i]; rectangulum autem ſub A B, A E, quadrato ex A F eſt æquale, et rectangulum ſub

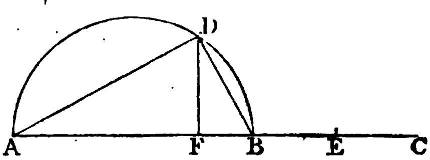
ſub A B, B E æquale quadrato ex B F[k]; quadratum igi- [k] Cor. 8.
tur ex A F incommenſurabile eſt quadrato ex F B: ideo- ſexti.
que rectæ lineæ A F, F B potentiâ ſunt incommenſura-
biles. Et quoniam A B rationalis eſt, et quadratum,
quod fit ex A B, erit rationale: ergo et rationale com-
poſitum ex quadratis ipſarum A F, F B. Nimirum cum
ex quadratis illis compoſitum ſit quadratum ipſum ex
A B[l]. Rurſus, quoniam rectangulum ſub A E, E B eſt [l] 47. primi.
æquale quadrato ex E F[k], ponitur autem rectangulum
ſub A E, E B quadrato etiam ex B D æquale: ergo F E
eſt æqualis B D: ac propterea B C ipſius E F eſt dupla.
Rectangulum igitur ſub A B, B C duplum eſt rectanguli
ſub A B, E F[m]. Sed rectangulum ſub A B, B C eſt me- [m] 1. ſexti.
dium[n]: ergo et medium eſt, quod continetur ſub A B, [n] 22. &
E F. Eſt autem quod ſub A B, E F continetur æquale Def. 12.
contento ſub A F, F B[o]. Nimirum cum utrumque tri- hujus.
anguli A F B duplum ſit[p]. Contentum igitur ſub A F, [o] Ax. 6. primi.
F B medium eſt. Sed et oſtenſum eſt, rationale eſſe [p] 41. primi.
quod componitur ex ipſarum quadratis.

Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles A F, F B, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod ſub ipſis continetur, medium. *Q. E. F.*

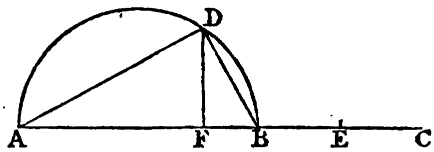
PROP. XXXV. PROBL. [XXXV.]

Invenire duas rectas lineas potentiâ incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur rationale.

Exponantur duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles A B, B C, quæ rationale contineant, ita ut A B plus poſſit quam B C quadrato rectæ lineæ ſibi longi-



tudine incommenſurabilis[q]; et ſuper ipſam A B, deſcri- [q] 32. hujus.
batur ſemicirculus A D B, ſeceturque B C bifariam in E;
et applicetur ad A B parallelogrammum æquale qua-
drato ipſius B E, deficiens figurâ quadratâ[r], et ſit quod [r] 28. ſexti
U 4 continetur



continetur sub A F, F B. Incommensurabilis igitur est A F ipsi F B longitudine[u]. A puncto autem F ipsi A B ad rectos angulos ducatur F D, et A D, D B jungantur: quæ, propter semicirculum, angulum A D B, rectum continebunt.

[u] 19. hujus.

Itaque quoniam A F est incommensurabilis ipsi F B, erit et rectangulum sub B A, A F rectangulo sub A B, B F incommensurabile[x]. Est autem rectangulum quidem sub B A, A F quadrato ipsius A D æquale; rectangulum vero sub A B, B F æquale quadrato ipsius D B[y]. Incommensurabile igitur est quadratum ex A D ipsius D B quadrato; ac propterea rectæ lineæ A D, D B potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam est medium quadratum ipsius A B, erit et compositum ex quadratis ipsarum A D, D B medium. Nimirum cum ex quadratis illis compositum sit quadratum ipsum ex A B[z]. Quod cum dupla sit B C ipsius D F, et rectangulum sub A B, B C rectanguli sub A B, F D duplum erit[a]: quare et commensurabile. Rationale autem est rectangulum sub A B, B C, ita enim ponitur: ergo et rectangulum sub A B, F D est rationale. Sed rectangulo sub A B, F D æquale est rectangulum sub A D, D B: nimirum cum utrumque trianguli A D B duplum sit[b]. Quare et ipsum sub A D, D B rectangulum rationale erit.

[x] 1. sexti. & 10. hujus.
[y] Cor. 8. sexti.
[z] 47. primi.
[a] 1. sexti.
[b] 41. primi.

Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles A D, D B, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, rationale. *Q. E. F.*

[XXXVI.]

PROP. XXXVI. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentiâ incommensurabiles, quæ faciant et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum quod sub ipsis continetur medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Exponantur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles A B, B C, quæ medium contineant, ita ut A B plus possit quam B C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine

dine incommensurabilis[b]; et super A B semicirculus A D B[b] describatur, et reliqua fiant, ut in iis quæ superius dicta sunt. [b] 33. hujus.

Quoniam igitur A F incommensurabilis est ipsi F B longitudine, erit et A D ipsi D B potentiâ incommensurabilis. Et quoniam medium est, quod fit ex A B, et compositum ex quadratis ipsarum D A, D B est medium. Quod cum rectangulum sub A F, F B æquale sit quadrato alterutrius ipsarum B E, D F, erit D F æqualis B E; ac propterea B C ipsius F D dupla. Rectangulum igitur sub A B, B C duplum est ejus, quod sub A B, F D continetur. Medium autem est rectangulum sub A B, B C[c]: [c] ex hyp. ergo et quod continetur sub A B, F D est medium: atque est æquale contento sub A D, D B. Quare et ipsum sub A D, D B rectangulum medium erit. Et quoniam incommensurabilis est A B ipsi B C longitudine, commensurabilis autem C B ipsi B E; erit et A B ipsi B E longitudine incommensurabilis: ergo et quadratum ex A B incommensurabile est rectangulo sub A B, B E[d]. [d] 1. sexti. & 10. hujus. Sed quadrato quidem ex A B æqualia sunt quæ ex A D, D B sunt quadrata; rectangulo autem sub A B, B E æquale est rectangulum sub A B, F D, hoc est, rectangulum sub A D, D B. Compositum igitur ex quadratis ipsarum A D, D B rectangulo sub A D, D B est incommensurabile.

Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum quod sub ipsis continetur medium, et adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile. *Q. E. F.*

Principium

Principium Senariorum per Compositionem.

SCHOLION.*

Monitos Tyrones velim non omnia, quæ Junioribus sermone Algebraico Surdorum nomine veniunt, apud Veteres ἄλογα, Latinè irrationalia, nuncupari. Etenim illi rectas omnes, quæ expositæ cuidam ῥητῇ, id est, rationali, seu effabili potius, sive longitudine sive potentiâ tantum, commensurabiles essent, ῥητὰς seu effabiles statuerunt: cum nobis surdæ sint, quæcunque ipsi expositæ non sunt ipsâ longitudine commensurabiles. Quæ vero tam potentiâ quam longitudine incommensurabiles essent, eas demum Veteres ἀλόγους, seu irrationales, vocarunt. Quæcunque igitur illis irrationalia, nobis omnino surda sunt. Haud item quæ nobis surda, ea omnia Veteribus irrationalia. Nobis scilicet surda est radix quadratica binarii; $\sqrt{2}$. Veteribus, effabilis. Vel ut magis geometrice loquamur, positâ a effabili, illa quæ potest $2 . a^2$, sive $\sqrt{2} \times a$, nobis surda, illis effabilis. Quæ vero duabus a, $\sqrt{2} \times a$ proportione media est, cum nobis surda tum illis quoque irrationalis. Quadrati diagoniam, posito latere effabili, nos surdam habemus, quanquam Veteribus effabilem. At si lateri et diagoniæ capiatur proportione media, ea cum nobis surda tum Veteribus irrationalis. Cum igitur in sequentibus hujusmodi binomia $a + \sqrt{2} . a$, irrationalia esse Euclides statuit, hoc scilicet intelligi vult, ad simplices radices quadraticas talia non posse revocari.

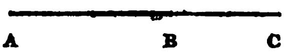
[XXXVII.] PROP. XXXVII. THEOR.

Si duæ rationales, potentiâ solum commensurabiles, componantur, tota irrationalis erit; vocetur autem ex binis nominibus.

Componantur enim duæ rationales potentiâ solum commensurabiles A B, B C: dico A C irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est A B ipsi B C longitudine, potentiâ enim solum commensurabiles sunt; et ut A B ad B C, ita rectangulum sub A B, B C ad id quod sit

fit ex B C quadratum[e]: erit rectangulum fub A B, B C[e] 1. fexti.
quadrato ex B C incommenfurabile[f]. Sed rectangulo [f] 10. hujus.



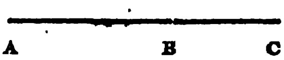
quidem fub A B, B C commenfurabile eft id quod bis fub A B, B C continetur[g]; quadrato autem ex B C com- [g] 6. hujus.
menfurabilia funt quadrata ex A B, B C[h]. Quod igitur [h] 16. hujus.
bis fub A B, B C continetur, incommenfurabile eft quadratis ex A B, B C; et componendo, quod bis fub A B, B C continetur una cum quadratis ex A B, B C, hoc eft quadratum ex A C[i], incommenfurabile eft compofito ex [i] 4. fecundi.
ipfarum A B, B C quadratis. Rationale autem eft compofitum ex quadratis ipfarum A B, B C. Ergo quadratum ex A C irrationale eft; et ob id recta linea A C eft irrationalis: vocetur autem ex binis nominibus.

PROP. XXXVIII. THEOR. XXXVIII.]

Si duæ mediæ potentiâ folum commenfurabiles componantur, quæ rationale contineant; tota irrationalis erit: vocetur autem ex binis mediis prima.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ folum commenfurabiles A B, B C, quæ rationale contineant: dico totam A C irrationalem effe.

Quoniam enim incommenfurabilis eft A B ipfi B C longitudine, et quadrata ex A B, B C incommenfurabilia



erunt rectangulo, quod bis fub A B, B C continetur[k]. Ergo [k] 13. hujus.
componendo, quadrata ex A B, B C, una cum eo quod bis fub A B, B C continetur, quod eft ipfius A C quadratum[l], incommenfurabile eft rectangulo fub A B, B C. [l] 4. fecundi.
Sed rectangulum rationale ponitur. Ergo quadratum ex A C irrationale eft: igitur et recta linea A C irrationalis: vocetur autem ex binis mediis prima.

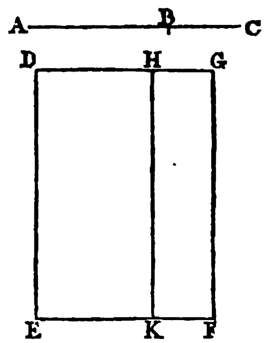
PROP. XXXIX. THEOR. [XXXIX.]

Si duæ mediæ potentiâ folum commenfurabiles componantur, quæ medium contineant; tota irrationalis erit: vocetur autem ex binis mediis fecunda.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ folum commenfurabiles, A B, B C, quæ medium contineant: dico A C irrationalem effe.

Exponatur

Exponatur rationalis D E, et quadrato ex A C æquale parallelogrammum rectangulum D F ad ipſam D E applicetur, latitudinem faciens D G[m]. Itaque quoniam quadratum ex A C æquale eſt quadratis ex A B, B C et rectangulo quod bis ſub A B, B C continetur[n]; applicetur ad ipſam D E quadratis ex A B, B C, æquale parallelogrammum rectangulum E H. Reliquum igitur F H æquale eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur. Et quoniam media eſt utraque ipſarum A B, B C, erunt et quadrata ex A B, B C media. Medium autem ponitur et quod bis continetur ſub A B, B C; atque eſt quadratis quidem ex A B, B C æquale parallelogrammum E H, rectangulo autem bis ſub A B, B C contento æquale eſt ipſum H F. Medium igitur eſt utrumque ipſorum E H, H F, et ad rationalem D E applicantur: ergo utraque recta linea D H, H G eſt rationalis, et ipſi D E longitudine incommenſurabilis[o]. Et quoniam incommenſurabilis eſt A B ipſi B C longitudine, atque eſt ut A B ad B C, ita quadratum ex A B ad rectangulum ſub A B, B C[p]; erit quadrato ex A B rectangulum ſub A B, B C incommenſurabile[q]. Sed quadrato quidem ex A B commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C; rectangulo autem ſub A B, B C eſt commenſurabile, quod bis ſub A B, B C continetur[r]: ergo compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C incommenſurabile erit ei, quod bis continetur ſub A B, B C[s]. Sed quadratis ex A B, B C æquale eſt parallelogrammum E H, et rectangulo quod bis ſub A B, B C continetur æquale H F parallelogrammum[t]. Quare E H ipſi H F eſt incommenſurabile; et ob id recta linea D H ipſi H G incommenſurabilis longitudine. Oſtenſæ autem ſunt rationales: ergo D H, H G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea D G eſt irrationalis[u]. Spatium igitur D F eſt irrationale. Nam ſi rationale eſſet, propter D E rationalem, talis enim ponitur, rationalis etiam eſſet D G[x]. Irrationale igitur eſt ſpatium D F, et ideo quæ ipſum poteſt eſt irrationalis. Poteſt autem ipſum D F recta linea A C[t]: ergo A C irrationalis erit; vocetur autem ex binis mediis ſecunda.



[m] 45. primi.
[n] 4. ſecundi.
[o] 23. hujus.
[p] 1. ſexti.
[q] 10. hujus.
[r] ex hyp.
[s] 14. hujus.
[t] Per conſtruct.
[u] 37. hujus.
[x] 21. hujus.

Cor.

Cor. * Quod sub rationali et irrationali continetur rectangulum irrationale est.

PROP. XL. THEOR. [XL.]

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium; tota recta linea irrationalis erit: vocetur autem major.

Componantur enim duæ rectæl ineæ potentiâ incommensurabiles A B, B C, facientes ea, quæ proposita sunt: dico A C irrationalem esse.

Quoniam enim id, quod sub A B, B C continetur, medium est; et quod bis continetur sub A B, B C medium



erit [x]: quapropter et irrationale [y]. Compositum autem ex ipsarum A B, B C quadratis est rationale: ergo quod bis sub A B, B C continetur incommensurabile est composito ex quadratis ipsarum A B, B C; et ob id quadrata ex A B, B C unà cum eo, quod bis sub A B, B C continetur, quod est quadratum ex A C [z], incommensurabile est quadratis ex A B, B C [a]. Rationale autem est compositum ex quadratis A B, B C [b]. Ergo quadratum ex A C irrationale erit; ac propterea recta linea A C est irrationalis, vocetur autem major.

x Cor. 24. hujus.
y 22. hujus. & Def. 12.
z 4. secundi.
a 17. hujus.
b ex hyp.

PROP. XLI. THEOR. [XLI.]

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur, rationale: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem rationale ac medium potens.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles A B, B C, facientes ea, quæ proposita sunt: dico A C irrationalem esse.

Quoniam enim compositum ex ipsarum A B, B C quadratis medium est, quod autem bis sub A B, B C contine-



tur rationale: erit compositum ex ipsarum A B, B C quadratis incommensurabile ei, quod bis sub A B, B C continetur: quare componendo quadratum ex A C, est incommensurabile ei, quod bis continetur sub A B, B C [c]. Est autem rationale, quod bis sub A B, B C continetur: quadratum

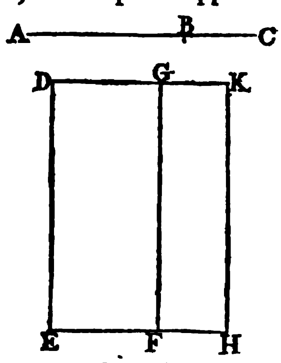
c 17. hujus.

quadratum igitur ex A C irrationale eſt. Ideoque recta linea A C eſt irrationalis, vocetur autem rationale ac medium potens.

[XLII.] PROP. XLII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis medium; et quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem bina media potens.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles A B, B C, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum A B, B C quadratis medium, et quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum A B, B C quadratis: dico A C irrationalem eſſe.



Exponatur enim rationalis D E, et ad ipſam applicetur parallelogrammum rectangulum D F æquale quadratis ipſarum A B, B C, et parallelogrammum G H æquale ei, quod
e 45. primi. bis ſub A B, B C continetur [e]. Totum igitur D H quadrato ip-
f 4. ſecundi. ſius A C eſt æquale [f]. Et quoniam medium eſt compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C, et æquale parallelogrammo D F; erit ipſum quoque D F medium, et ad rationalem D E applicatum eſt. Rationalis igitur eſt
g 23. hujus. D G, et ipſi D E longitudine incommenſurabilis [g]. Ob eandem cauſam et G K eſt rationalis, et incommenſurabilis longitudine ipſi F G, hoc eſt, ipſi D E. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur; erit et parallelogrammum D F ipſi H G incommenſurabile: ergo
h 1. ſexti. et recta linea D G incommenſurabilis eſt ipſi G K [h]. Et ſunt
& 10. hujus. rationales: quare D G, G K rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea D K eſt irrationalis,
i 37. hujus. quæ ex binis nominibus appellatur [i]. Rationalis autem
k Cor. 39. hujus. D E: ergo parallelogrammum D H irrationale eſt [k], et ipſum

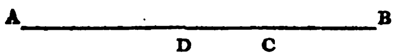
sum potens irrationalis. Sed ipsum D H potest recta linea A C [n]; quare A C irrationalis est, vocetur autem bina media potens. [n] Per construct.

Cor. * Omnis divisio rectæ in nomina fit extra punctum divisionis mediæ.

PROP. XLIII. THEOR. [XLIII.]

Quæ ex binis nominibus ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis nominibus A B divisa in nomina ad punctum C: ergo A C, C B rationales sunt potentiâ solum



commensurabiles. Dico A B ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentiâ solum commensurabiles.

Si enim fieri potest, dividatur in D, ita ut A D, D B rationales sint potentiâ solum commensurabiles. Manifestum est rectam A B, in utroque puncto C, D inæqualiter dividi. Haud enim potentiâ tantum commensurabilia essent segmenta, si in æqualia divisio fieret. Quo igitur differunt quadrata rectarum linearum A C, C B ab ipsarum A D, D B quadratis, hôc differt et quod bis sub A D, D B continetur ab eo, quod bis continetur sub A C, C B; quoniam et quadrata rectarum linearum A C, C B, unà cum eo, quod bis continetur sub A C, C B, et quadrata ipsarum A D, D B, unà cum eo quod bis sub A D, D B continetur, æqualia sunt quadrato ipsius A B [o]. [o] 4. secundi. Sed quadrata ipsarum A C, C B a quadratis ipsarum A D, D B differunt rationali, etenim rationalia utraque sunt: ergo et quod bis sub A D, D B continetur a contento bis sub A C, C B differt rationali; cum ipsa media sint. Atqui medium non superat medium rationali [p]. Non igitur [p] 27. hujus. quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur: quare ad unum duntaxat dividitur in nomina. *Q. E. D.*

PROP. XLIV. THEOR. [XLIV.]

Quæ ex binis mediis prima ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis mediis prima A B divisa in puncto C, ita ut A C, C B mediæ sint potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant: dico A B in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur etiam in D, ita ut A D,

D B



D B sint mediæ potentiâ solùm commensurabiles, quæ rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis sub A D, D B ab eo, quod bis sub A C, C B continetur, hôc differunt etiam quadrata rectarum linearum A C, C B ab ipsarum A D, D B quadratis; rationali autem differt contentum bis sub A D, D B ab eo, quod bis sub A C, C B continetur, utraque enim sunt rationalia; rationali igitur differunt quadrata ipsarum A C, C B a quadratis ipsarum A D, D B, existentia utra-
[q] 27. hujus. que media. Illud autem fieri non potest [q]. Non igitur quæ ex binis mediis prima in alio atque alio puncto dividitur in nomina: quare in uno duntaxat dividatur necesse est. *Q. E. D.*

* LEMMA VI.

Recta quævis linea A B, in punctis C, D utcunque secetur; ita tamen ut in neutro media dividatur. Segmentorum inæqualium A C, C B sit A C majus. Inæ-



qualium item A D, D B sit A D majus. Denique duorum A C, A D sit A C majus. Dico quadrata ex A C, C B simul sumpta quadratis ex A D, D B simul sumptis esse majora.

Media enim dividatur recta A B puncto E. Jam cum
[r] ex hyp. recta A C major est quam A D [r], ablatâ communi A E, erit E C major quam E D, et quadratum ex E C quadrato ex E D majus. Illud igitur, quo quadratum ex E B superat quadratum ex E C, minus erit illo quo quadratum idem ex E B superat quadratum ex E D. Sed rectangulum sub A C, C B illud est, quo quadratum ex E B superat quadratum ex E C; et rectangulum sub A D, D B illud est, quo quadratum idem ex E B superat quadratum
[s] 5. secundi. ex E D [s]. Rectangulum igitur sub A C, C B rectangulo sub A D, D B minus. Quapropter et duplum rectanguli sub A C, C B duplo rectanguli sub A D, D B minus erit. Illud igitur quo quadratum ex A B superat duplum rectanguli sub A C, C B majus erit illo, quo quadratum idem ex A B superat duplum rectanguli sub A D, D B. Sed quadratum ex A B superat duplum rectanguli sub A C, C B quadratis ex A C, C B simul sumptis; et quadratum

dratum idem ex A B ſuperat duplum rectanguli ſub A D, D B, quadratis ex A D, D B ſimul ſumptis[t]. Quadrata igitur ex A C, C B ſimul ſumpta quadratis ex A D, D B ſimul ſumptis ſunt majora. *Q. E. D.* [t] 4. ſecundi.

Cor. * Iiſdem poſitis, dico quadrata ex A D, D B ſimul ſumpta duplo rectanguli ſub A C, C B majora eſſe.

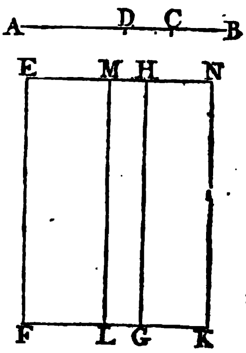
Nam quadrata ex A D, D B ſimul ſumpta duplo quadrati ex E B ſunt majora[u]. Sed rectangulum ſub A C, C B quadrato ex E B minus eſt[x]. Quare et duplum rectanguli ſub A C, C B duplo quadrati ex E B minus. Quadrata igitur ex A D, D B ſimul ſumpta duplo rectanguli ſub A C, C B multo ſunt majora. Pari ratione quadrata ex A C, C B ſimul ſumpta duplo rectanguli ſub A D, D B ſunt majora. [u] 9. ſecundi. [x] 5. ſecundi.

PROP. XLV. THEOR. [XLV.]

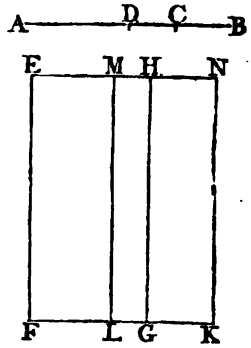
Quæ ex binis mediis ſecunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis mediis ſecunda A B diviſa in nomina in puncto C; ita ut A C, C B mediæ ſint, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. Dico ipſam A B in alio puncto præter C, in nomina non dividi.

Dividatur enim, ſi fieri poteſt, in alio puncto D, ita ut A D, D B mediæ ſint potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. Duarum autem A C, C B, neceſſario utique inæqualium, major ſit A C. Duarum item A D, D B, neceſſario inæqualium, major ſit A D. Duarum A C, A D inæqualium altera major erit. Sit A C major. Conſtat igitur quadrata ex A C, C B ſimul ſumpta quadratis ex A D, D B ſimul ſumptis eſſe majora[y]. Exponatur rationalis E F; et quadrato quidem ex A B æquale parallelogrammum E K ad ipſam E F applicetur; quadratis vero ex A C, C B æquale auferatur E G. Reliquum igitur H K æquale eſt ei, quod bis ſub A C, C B continetur[z]. Rurſus, quadratis ex A D, D B, quæ minora ſunt quadratis ex A C, C B, ut oſtenſum eſt, æquale parallelogrammum auferatur [y] Lemma 6. [z] 4. ſecundi.



EL: ergo reliquum MK est æquale ei, quod bis continetur sub AD, DB. Et quoniam media sunt et commensurabilia quæ ex AC, CB quadrata, erit EG medium; et ad rationalem EF applicatum est: quare EH rationalis est, et ipsi EF longitudine incommensurabilis [t]. Eâdem ratione et HN est rationalis, et ipsi EF incommensurabilis longitudine. Quod cum AC, CB mediæ sint potentiâ solum commensurabiles; erit AC ipsi CB incommensurabilis longitudine. Ut autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id quod sub AC, CB continetur [u]: quadratum igitur ex AC incommensurabile est ei, quod continetur sub AC, CB [x]. Sed quadrato quidem ex AC commensurabilia sunt quadrata ex AC, CB, etenim AC, CB potentiâ sunt commensurabiles [y]; ei vero quod continetur sub AC, CB commensurabile est illud, quod bis sub AC, CB continetur. Ergo et quadrata ex AC, CB incommensurabilia sunt ei, quod bis sub AC, CB continetur. Quadratis autem ex AC, CB æquale est parallelogrammum EG, et ei quod bis continetur sub AC, CB æquale est HK: ergo EG ipsi HK est incommensurabile; et ob id recta linea EH ipsi HN incommensurabilis longitudine, suntque rationales: ergo EH, HN rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Si autem duæ rationales potentiâ solum commensurabiles componantur; tota irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur [z]: quare EN ex binis nominibus est divisa in puncto H. Eâdem ratione et EM, MN ostendentur rationales potentiâ solum commensurabiles. Diversa autem erunt puncta M et H. Rectangulum enim EG, quod quadratis ex AC, CB factum est æquale, majus erit rectangulo EL, quadratis ex AD, DB æquali; ac propterea rectæ EM, EH inæquales. Recta igitur EN ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum divisa erit in nomina, videlicet ad H et ad M. Quod fieri nequit [a]; nisi forte EN ita sit divisa in punctis illis, ut segmenta alternè sint æqualia: nempe ut EM æquale sit ipsi HN, et NM ipsi EH. Hoc autem fieri



[t] 23. hujus.
[u] 1. sexti.
[x] 10. hujus.
[y] 16. hujus.
[z] 37. hujus.
[a] 43. hujus.

fieri nequit. Nam ſi fiat, rectangulum E L æquale erit rectangulo H K. Sed rectangulum E L æquale eſt quadratis ex A D, D B ſimul ſumptis, et rectangulum H K duplum eſt rectanguli ſub A C, C B [b]. Quare quadrata ex A D, D B ſimul ſumpta duplo rectanguli ſub A C, C B erunt æqualia. Quod eſt abſurdum. Cum quadrata duplo rectanguli ſunt majora [c]. Recta igitur ex binis mediis ſecunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina. *Q. E. D.*

[b] ex conſtruct.
[c] Cor. Lem. 6.

PROP. XLVI. THEOR. [XLVI.]

Major ad idem duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit major A B diviſa in C; ita ut A C, C B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A C, C B quadratis rationale, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur medium: dico A B in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in D, ita ut A D, D B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem



ſub ipſis continetur medium. Et quoniam quo differunt quadrata ex A C, C B a quadratis ex A D, D B; hoc differt et id, quod bis continetur ſub A D, D B, ab eo, quod bis ſub A C, C B continetur [b]; ſed quadrata ex A C, C B ſuperant quadrata ex A D, D B rationali, etenim utraque rationalia ſunt: ergo quod bis continetur ſub A D, D B rationali ſuperat id, quod bis ſub A C, C B continetur; quod eſt impoſſibile, cum media ſint [c]. Non igitur major ad aliud atque aliud punctum dividitur in nomina. Ergo ad idem duntaxat dividatur neceſſe eſt. *Q. E. D.*

[b] 4. ſecundi.
[c] 27. hujus.

PROP. XLVII. THEOR. [XLVII.]

Rationale ac medium potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit rationale ac medium potens A B diviſa in C; ita ut A C, C B potentiâ incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum A C, C B quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: dico A B in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur in D; ita ut etiam A D, D B potentiâ incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub



ipsis continetur rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum sub A D, D B ab eo, quod bis sub A C, C B continetur, hoc differunt et quadrata
[d] 4. secundi. ex A C, C B a quadratis ex A D, D B[d]; rectangulum autem bis contentum sub A D, D B rationali superat id, quod bis sub A C, C B continetur: ergo et quadrata ex A C, C B superant quadrata ex A D, D B rationali; quod est
[e] 27. hujus. impossibile; cum media sint[e]. Non igitur rationale ac medium potens dividitur ad aliud atque aliud punctum. Quare ad unum duntaxat punctum dividetur. *Q. E. D.*

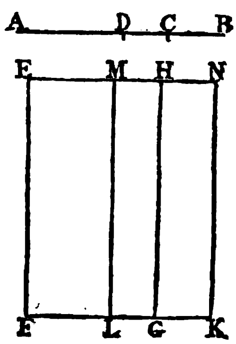
[XLVIII.]

PROP. XLVIII. THEOR.

Bina media potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit bina media potens A B divisa in C; ita ut A C, C B potentiâ incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum A C, C B quadratis medium; et quod sub ipsis continetur medium; et adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile rectangulo sub ipsis: dico A B ad aliud punctum non dividi, ita ut faciat quæ proposita sunt.

Si enim fieri potest, dividatur in D; ita ut A D, D B potentiâ sint incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et composito ex quadratis incommensurabile. Duarum autem A C, C B, necessario inæqualium, major sit A C. Duarum item A D, D B major A D. Duarum denique A C, A D sit major A C. Exponaturque rationalis E F, et ad ipsam E F quadratis quidem ex A C, C B æquale parallelogrammum E G applicetur; rectangulo autem bis con-



tento

tento ſub A C, C B æquale applicetur H K. Totum igitur E K eſt æquale ei quod ſit ex A B quadrato[f]. Rurſus ad E F applicetur parallelogrammum E L æquale quadratis ex A D, D B: ergo reliquum quod bis ſub A D, D B continetur reliquo M K eſt æquale[f]. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A C, C B medium ponitur; erit et parallelogrammum E G medium; et ad rationalem E F applicatum eſt. Rationalis igitur eſt H E, et ipſi E F longitudine incommenſurabilis[g]. Eâdem ratione et H N eſt rationalis, ipſique E F incommenſurabilis longitudine. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A C, C B incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A C, C B continetur[h], erit et parallelogrammum E G ipſi H K incommenſurabile: ergo et recta linea E H incommenſurabilis eſt rectæ H N[i]. Et ſunt rationales: quare E H, H N rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id E N ex binis nominibus eſt, diviſa in puncto H. Similiter oſtendemus ipſam in puncto quoque M dividi. Diverſa autem eſſe puncta M, H eodem modo quo in Prop. xlv. oſtendamus: ergo quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur; quod eſt abſurdum[k]. Non igitur bina media potens dividitur ad aliud atque aliud punctum. Quare ad unum duntaxat punctum dividetur. *Q. E. D.*

[f] 4. ſecundi.
[g] 23. hujus.
[h] ex hyp.
[i] 10. hujus.
[k] 43. hujus.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

Definitio I.

Expoſitâ rationali, et ex binis nominibus quâdam, cujus majus nomen plus poſſit quam minus quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, in nomina diviſâ: ſi quidem majus nomen expoſitæ rationali commenſurabile ſit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

II.

Si vero minus nomen expoſitæ rationali longitudine ſit commenſurabile, dicatur ex binis nominibus ſecunda.

 III.

III.

Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

IV.

Rursus si majus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; si quidem majus nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

V.

Si vero minus, dicatur quinta.

VI.

Quod si neutrum, dicatur sexta.

SCHOLION.*

Literis $a, b, c,$ &c. significentur rectæ lineæ rationales, expositæ cuidam ῥητῇ, literâ ρ significandæ, longitudine commensurabiles. Literis autem $m, n, p,$ &c. significentur numeri, qui neque quadrati sint, neque quadratorum numerorum inter se rationes habeant.

His positis, quæcunque linea recta hisce notis $\sqrt{\frac{m}{n}}\, b$, vel aliis harum similibus, Algebraice designatur, rationalis est; ipsi ρ, et aliis $a, c,$ &c. potentiâ tantum commensurabilis. Et si duæ sint rectæ, formulis ejusmodi significatæ, $\sqrt{\frac{m}{n}}\, b$, $\sqrt{\frac{p}{q}}\, a$, inter se etiam potentiâ, sed potentiâ solum, commensurabiles erunt; nisi forte coefficientes, qui sunt sub signo radicali, numerorum inter se rationem gerant. Quod si evenerit, rectæ longitudine inter se commensurabiles erunt, quamquam utraque ipsi ρ potentiâ tantum. Ut si m sit 8; n, 3; p, 27; q, 2. Ita enim $\sqrt{\frac{m}{n}} : \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{8 \times 2} : \sqrt{27 \times 3} = 4 : 9$. Quare $\sqrt{\frac{m}{n}}\, b : \sqrt{\frac{p}{q}}\, a = 4\, b : 9\, a$. Et cum b, a rationales sint longitudine commensurabiles, et $4\, b$ longitudine

gitudine commensurabilis sit ipsi b, necnon $9a$ ipsi a; omnino erunt $4b$, $9a$ longitudine commensurabiles.

2. Quæcunque linea recta hisce notis $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\; b$, vel aliis harum similibus, Algebraice designatur, irrationalis est, sed media. Recta enim $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\,.\,b$ potest spatium $\sqrt{\frac{m}{n}}\,.\,b^2$ sive rectangulum sub rectis $\sqrt{\frac{m}{n}}\,b$, et b : quæ rectæ rationales sunt, potentiâ tantum commensurabiles. Quod si duæ sint rectæ, formulis ejusmodi significatæ, $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\; b$, $\sqrt[4]{\frac{p}{q}}\; a$, etiam inter se potentiâ erunt incommensurabiles. Nisi forte coefficientes, qui sunt sub signo radicali, in se quisque multiplicati, faciant qui numerorum inter se rationem habeant. Hoc est, nisi $\sqrt{\frac{m}{n}}$ sit ad $\sqrt{\frac{p}{q}}$, ut numerus ad numerum. Quod si evenerit, rectæ illæ inter se potentiâ commensurabiles erunt, quamquam ipsi ρ utraque incommensurabilis. Quod si ipsi duarum coefficientes sub signo radicali numerorum inter se rationem habeant; rectæ vel longitudine inter se commensurabiles, quamquam τῇ ρ nedum potentiâ.

Porro ut binominales Euclidæas Algebraice sistamus, literis a, b, c, &c. m, n, p, q quæ prius designantibus, per literas Græcas μ, ν, π, σ, &c. significentur numeri quilibet quadrati.

Et primum, rectæ $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}} a$, $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{3}{4}} a$ mediæ sunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ rationale continent. Prop. xxviii.

2. Rectæ $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}} a$, $\overline{\frac{p}{q}}\big|^{\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{n}{m}}\big|^{\frac{1}{4}} a$ mediæ sunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium continent. Prop. xxix.

3. Numerorum ν, μ sit major ν. Numerus autem $\nu - \mu$ non sit quadratus, cum ipsi ν, μ sint quadrati.

Rectæ a, $\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\Big|^{\frac{1}{2}} a$, rationales erunt, potentiâ solum commensurabiles; major autem a plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ ipsi a longitudine commensurabilis erit. Prop. xxx.

4. Numerus $\nu+\mu$, ex quadratis ν, μ compositus, non sit quadratus. Rectæ a, $\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\Big|^{\frac{1}{2}} a$, rationales erunt, potentiâ tantum commensurabiles; quarum major a plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ ipsi a longitudine incommensurabilis erit. Prop. xxxi.

5. Posito rursus numero $\nu-\mu$ non quadrato, existentibus ipsis ν, μ quadratis; rectæ $\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\Big|^{\frac{1}{4}} a$, $\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\Big|^{\frac{3}{4}} a$ mediæ erunt, potentiâ solum commensurabiles, et rationale continentes; quarum major $\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\Big|^{\frac{1}{4}} a$ plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ majori longitudine commensurabilis erit. Prop. xxxii.

6. Posito numero $\nu+\mu$ non quadrato, rectæ $\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\Big|^{\frac{1}{4}} a$, $\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\Big|^{\frac{3}{4}} a$ mediæ erunt, potentiâ tantum commensurabiles, et rationale continentes; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ majori longitudine incommensurabilis erit. Prop. xxxii.

7. Posito rursus numero $\nu-\mu$ non quadrato, rectæ $\overline{\frac{m}{n}}\Big|^{\frac{1}{4}} a$, $\overline{\frac{m}{n}}\Big|^{\frac{1}{4}} \times \overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\Big|^{\frac{1}{2}} a$, mediæ erunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium continebunt; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ, majori longitudine commensurabilis. Prop. xxxiii.

8. Posito autem numero $\nu+\mu$ non quadrato, rectæ $\overline{\frac{m}{n}}\Big|^{\frac{1}{4}} a$, $\overline{\frac{m}{n}}\Big|^{\frac{1}{4}} \times \overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\Big|^{\frac{1}{2}} a$, mediæ erunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium continebunt; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ majori longitudine incommensurabilis. Prop. xxxiii.

9. Posito

9. Posito $\nu + \mu$ non quadrato, existentibus ν, μ quadratis; rectæ $\left.\overline{\frac{1}{2}}\right|^{\frac{1}{2}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}$ rectæ erunt potentiâ incommensurabiles, quæ compositum ex ipsarum quadratis rationale efficient, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium. Prop. xxxiv.

10. Rectæ $\left.\overline{\frac{1}{2}}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left.\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\right|^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}$ potentiâ sunt incommensurabiles, conficientes id, quod ex ipsarum quadratis componitur, medium; rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, rationale. Prop. xxxv.

11. Rectæ $\left.\overline{\frac{1}{2}}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left.\overline{\frac{m}{n}}\right|^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}$ rectæ sunt potentiâ incommensurabiles, conficientes id, quod ex ipsarum quadratis componitur, medium; rectangulum etiam, quod sub ipsis continetur, medium, et composito ex ipsarum quadratis incommensurabile. Prop. xxxvi.

Ex hisce autem rectis, binas utique conjungendo, exoriuntur binomiorum series geminæ, quas ἑξάδας Euclides nominavit, pro variis scilicet rationum, si ita loqui liceat, speciebus, quas in binomiis suis sex diversas utraque complexa est.

Recensio Algebraica utriusque Ἑξάδος *per compositionem. Per compositionem autem sunt binomia, quorum nomina signo + conjuncta sunt.*

Series Prima.

I. Ex binis nominibus; $a + \sqrt{\frac{m}{n}}\, b$. Vel etiam $\sqrt{\frac{m}{n}}\, a + \sqrt{\frac{p}{q}}\, b$.

II

II. Ex binis mediis prima; $\left.\frac{m}{n}\right|^{\frac{1}{4}} a + \left.\frac{m}{n}\right|^{\frac{3}{4}} a.$

III. Ex binis mediis secunda; $\left.\frac{m}{n}\right|^{\frac{1}{4}} a + \left.\frac{p}{q}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left.\frac{n}{m}\right|^{\frac{1}{4}} a.$

IV. Major; $\left.\frac{1}{2}\right|^{\frac{1}{2}} a \times \sqrt{1+\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}.$

V. Rationale ac medium potens; $\left.\frac{1}{2}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left.\frac{\nu}{\nu+\mu}\right|^{\frac{1}{4}} a \times$

$$\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}$$

VI. Bina media potens; $\left.\frac{1}{2}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left.\frac{m}{n}\right|^{\frac{1}{4}} a \times$

$$\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}.$$

Series Secunda.

(Numerorum μ, ν sit ν major.)

I. Ex binis nominibus prima; $a + \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a.$

II. Ex binis nominibus secunda; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu-\mu}}\, a + a.$

III. Ex binis nominibus tertia; $\sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a + \sqrt{\frac{\pi-\sigma}{\pi}}\, a.$

IV. Ex binis nominibus quarta; $a + \left.\frac{\nu}{\nu+\mu}\right|^{\frac{1}{2}} a.$

V. Ex binis nominibus quinta; $\left.\frac{\nu+\mu}{\nu}\right|^{\frac{1}{2}} a + a.$

VI. Ex binis nominibus sexta; $\left.\frac{\nu}{\nu+\mu}\right|^{\frac{1}{2}} a + \left.\frac{\pi}{\pi+\sigma}\right|^{\frac{1}{2}} a;$

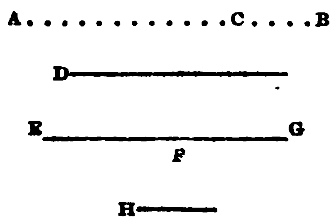
modo $\frac{\sigma\nu-\mu\pi}{\overline{\nu+\mu}\times\overline{\pi+\sigma}}$ non sit numerus quadratus, neque $\sigma\nu-\mu\pi$ ad $\overline{\nu+\mu}\times\overline{\pi+\sigma}$ numeri quadrati ad quadratum numerum rationem habeat.

Hæc

Hæc quidem accuratius edifferenda fufcepimus, non quod lucis aliquid Euclidæis accefflurum putaverimus, fi Algebraice expofita effent; quippe quæ, per fe quam maximè perfpicua, caligine potius premuntur fymbolorum involucris conveftita: fed e contrario, in mediis Algebræ tenebris Geometriæ facem accenfuri. Tum ut Algebræ cultores, fi quando Euclidem forte evolvere velint, melius et facilius intelligant, fubtiliffima illa rationalium, irrationalium, mediarumque doctrina quorfum tendat; tum ut mirari inftituantur eximiam illam five perfpicuitatem, five elegantiam, quâcum ille in hoc libro pertractavit, quæ illis, propriâ arte ufis, neglecto tanto præceptore et magiftro, haud fine fudore et moleftiâ calculis eruenda effent.

PROP. XLIX. PROBL. [XLIX.]

Invenire ex binis nominibus primam.



Exponantur duo numeri quadrati A B, B C qui ipfo C A non quadrato differunt [m]. Et exponatur quædam rationalis D, et ipfi D longitudine commenfurabilis fit E F: ergo E F eft rationalis [n]. Fiat autem ut B A numerus ad numerum A C, ita ipfius E F quadratum ad quadratum F G [o]. Ergo quadratum ipfius E F ad quadratum ipfius F G rationem habebit, quam numerus ad numerum: commenfurabile igitur eft quadratum ex E F quadrato ex F G [p] Atque eft E F rationalis: ergo et rationalis F G. Et quoniam B A ad A C rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E F ad quadratum ex F G rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo E F ipfi F G incommenfurabilis eft longitudine [q]: et ob id E F, F G rationales funt potentiâ folum commenfurabiles: igitur ex binis nominibus eft E G [r]. Dico et primam effe.

[m] Cor. Lem. 4.
[n] Def. 6. hujus.
[o] Cor. 6. hujus.
[p] 6. hujus.
[q] 9. hujus.
[r] 37. hujus.

Quoniam enim eft ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad id, quod ex F G, quadratum; major autem eft B A quam A C: ergo et quadratum ex

E F

E F quadrato ex F G est majus. Sint quadrato ex E F æqualia quadrata ex F G, H. Quoniam igitur est ut B A ad A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G; erit per conversionem rationis ut A B ad B C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex H [s]. Sed A B ad B C rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; et quadratum igitur ex E F ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quare E F ipsi H longitudine est commensurabilis [t]: ideoque E F plus potest quam F G quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sunt autem E F, F G rationales, potentiâ tantum commensurabiles; et majus nomen E F expositæ D longitudine est commensurabile. Ergo E G ex binis nominibus est prima [u]. *Q. E. D.*

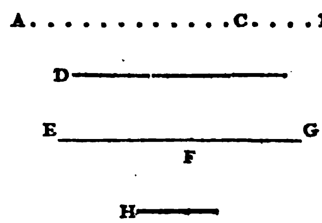
[s] Cor. 19. quinti.
[t] 9. hujus.
[u] Def. Secund. 1. hujus.

[L.]

PROP. L. PROBL.

Invenire ex binis nominibus secundam.

Exponantur duo numeri quadrati A B, B C, qui ipso A C non quadrato differunt [x]. Et exponatur rationalis D, et sit F G ipsi D longitudine commensurabilis: ergo F G rationalis est. Fiatque ut C A numerus ad numerum A B, ita quadratum ex G F ad quadratum ex F E [y]: commensurabile igitur est quadratum ex G F quadrato ex F E [z]: ergo et F E est rationalis [a]. Et quoniam C A numerus ad ipsum A B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex G F ad quadratum ex F E rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est G F ipsi F E longitudine [b]: quare E F, F G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea ex binis nominibus est E G [c]. Ostendendum est et secundam esse.



[x] Cor. Lem. 4.
[y] Cor. 6. hujus.
[z] 6. hujus.
[a] Def. 6. hujus.
[b] 9. hujus.
[c] 37. hujus.

Quoniam enim invertendo est ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G, major autem est B A quam A C: ergo et quadratum ex E F quadrato ex F G est majus. Sint quadrato ex

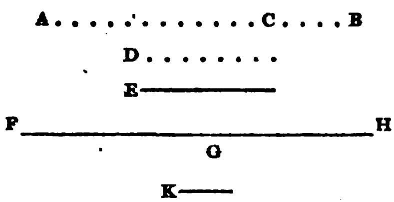
ex E F æqualia quadrata ex F G, H: eſt igitur per converſionem rationis ut A B ad B C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex H[e]. Sed A B ad B C rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo et quadratum ex E F ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ob id E F ipſi H longitudine eſt commenſurabilis[f]. Quare E F plus poteſt quam F G quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Suntque rationales E F, F G potentiâ ſolum commenſurabiles, et F G minus nomen longitudine commenſurabile eſt ipſi D expoſitæ rationali. Ergo E G eſt ex binis nominibus ſecunda[g]. *Q. E. D.*

[e] Cor. 19. quinti.
[f] 9. hujus.
[g] Def. Secund. 2. hujus.

PROP. LI. PROBL. [LI.]

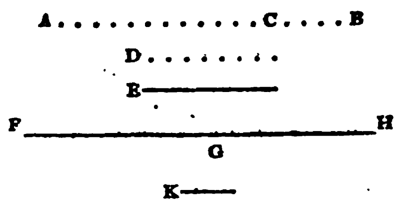
Invenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur ut prius duo numeri quadrati A B, C B, qui ipſo C A non quadrato differunt. Exponatur etiam



alius numerus D non quadratus, qui ad neutrum ipſorum B A, A C rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Denique exponatur rationalis quædam recta linea E; fiatque ut D ad A B, ita quadratum ex E ad quadratum ex F G. Quadratum igitur ex E quadrato ex F G eſt commenſurabile. Rationalis autem eſt E: ergo et F G eſt rationalis[h]. Et quoniam D ad A B rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex F G rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt E ipſi F G longitudine[i]. Rurſus, fiat ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: ergo quadratum ex F G quadrato ex G H eſt commenſurabile. Rationalis autem eſt F G: quare et G H eſt rationalis. Et quoniam A B ad A C rationem

[h] 6. hujus.



rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est
[l] 9. hujus. F G ipsi G H longitudine[l]: quare F G, G H rationales sunt potentiâ solum commensurabiles: ideoque F H ex
[k] 37. hujus. binis nominibus est[k]. Dico et tertiam esse.

Quoniam enim est ut D numerus ad A B, ita quadratum ex E ad quadratum ex F G; ut autem B A ad A C, ita quod fit ex F G quadratum ad quadratum ex G H: erit ex æquo ut D ad A C, ita quadratum ex E ad qua-
[l] 22. quinti. dratum ex G H[l]. Sed D ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo E ipsi G H incommensurabilis est longitudine[l]. Et quoniam ut B A ad A C, ita quadratum ex F G ad id quod ex G H quadratum; erit quadratum ex F G majus quadrato ex G H. Sint quadrato ex F G æqualia quadrata ex G H, K: per conversionem igitur rationis est ut A B
[m] Cor. 19. quinti. ad B C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K[m]. Sed A B ad B C rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo et quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Commensurabilis igitur est F G ipsi K longitudine; et ob id F G plus potest quam G H quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Suntque F G, G H rationales potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum commensu-
[n] Def. Secund. 3. hujus. rabilis est ipsi E longitudine. Ergo F H est ex binis nominibus tertia[n]. *Q. E. D.*

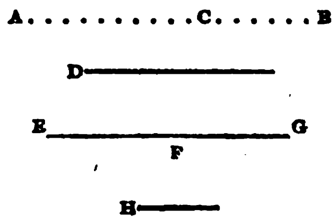
[LII.] PROP. LII. PROBL.

Invenire ex binis nominibus quartam.

Exponantur duo numeri A C, C B, ita ut A B ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque rationalis

nalis D, et ipsi D commensurabilis sit E F longitudine: ergo E F est rationalis.

Fiat autem ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G. Commensurabile igitur est quadratum ex E F quadrato ex F G: ideoque recta linea F G est rationalis. Et quoniam B A



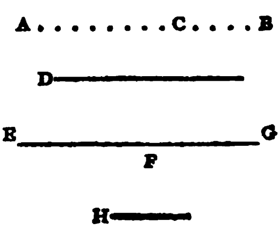
ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; erit E F ipsi F G longitudine incommensurabilis [o]. Ergo E F, F G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; et ob id E G ex binis nominibus est [p]. Dico eam et quartam esse. [o] 9. hujus. [p] 37. hujus.

Quoniam enim est ut B A ad A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G; major autem est B A quam A C: erit quadratum ex E F quadrato ex F G majus. Sint quadrato ex E F æqualia quadrata ex F G, H: per conversionem igitur rationis est ut A B numerus ad numerum B C, ita quadratum ex E F ad id, quod fit ex H, quadratum. Sed A B ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo E F ipsi H longitudine est incommensurabilis: ac propterea E F plus potest quam F G quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque E F, F G rationales potentiâ solum commensurabiles; et E F ipsi D commensurabilis est longitudine. Ergo E G ex binis nominibus est quarta [q]. Q. E. F. [q] Def. Secund. 4. hujus.

PROP. LIII. PROBL. [LIII.]

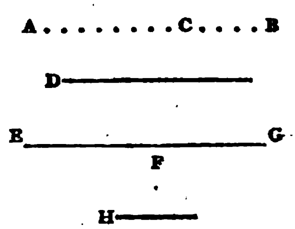
Invenire ex binis nominibus quintam.

Exponantur duo numeri A C, C B, ita ut A B ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque recta linea quædam rationalis D, et ipsi longitudine commensurabilis sit F G: ergo F G est rationalis. Et fiat ut C A ad A B, ita quadratum



ex

ex G F ad id quod fit ex F E quadratum: rationalis igitur est F E. Et quoniam C A numerus ad A B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex G F ad quadratum ex F E rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo E F, F G ra-



[r] 9. hujus. tionales sunt potentiâ solum commensurabiles[r]; et ob
[s] 37. hujus. id E G ex binis nominibus est[s]. Dico eam et quintam esse.

Quoniam enim est ut C A ad A B, ita quadratum ex G F ad quadratum ex F E; erit invertendo ut B A ad A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G: ergo quadratum ex E F quadrato ex F G est majus. Sint quadrato ex E F æqualia quadrata ex F G, H: per conversionem igitur rationis est ut A B numerus ad numerum B C, ita quadratum ex E F ad id quod ex H quadratum. Sed A B ad B C rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex E F ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea E F ipsi H longitudine est incommensurabilis. Quare E F plus potest quam F G quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque E F, F G rationales potentiâ solum commensurabiles, et F G minus nomen expositæ rationali D commensurabilis est longitudine: ergo E G ex binis nominibus est
[t] Def. Secund. 5. hujus. quinta[t]. *Q. E. F.*

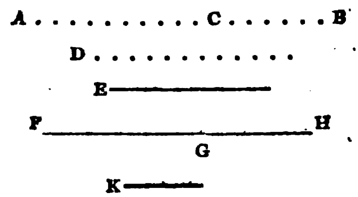
[LIV.]

PROP. LIV. PROBL.

Invenire ex binis nominibus sextam.

Exponantur duo numeri A C, C B, ita ut A B ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Sit etiam alius numerus D, qui ad neutrum ipsorum B A, A C rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis quædam recta linea E, fiatque ut D ad A B, ita quadratum ex E ad quadratum

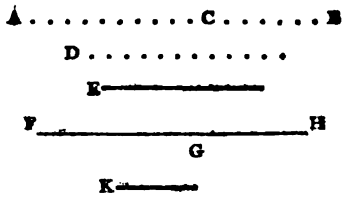
ex



ex F G: commensurabilis igitur est E ipsi F G potentiâ. Atque E est rationalis: quare et rationalis est F G [x]. Et quoniam D ad A B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex F G rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo E ipsi F G longitudine est incommensurabilis [y]. Itaque rursus fiat ut B A ad A C, sic quadratum ex F G ad quadratum ex G H: quadratum igitur ex F G quadrato ex G H est commensurabile. Rationale autem est quadratum ex F G: ergo et quadratum ex G H est rationale; et ob id recta linea G H est rationalis. Et quoniam B A ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est F G ipsi G H longitudine [y]; et ideo F G, G H rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Quare ex binis nominibus est F H [z]. Ostendendum est et sextam esse.

[x] Def. 6. hujus.
[y] 9. hujus.
[z] 37. hujus.

Quoniam enim ut D ad A B, ita est quadratum ex E ad quadratum ex F G; est autem et ut B A ad A C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: ex æquo est ut D, ad A C, ita quadratum ex E ad quadratum ex G H. Sed D ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est E ipsi G H longitudine [y]. Ostensum autem est et ipsi F G incommensurabilem esse: quare utraque ipsarum F G, G H ipsi E longitudine est incommensurabilis. Et quoniam est ut B A ad A C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H, erit quadratum ex F G quadrato ex G H majus. Sint quadrato ex F G æqualia quadrata ex G H, K: ergo per conversionem rationis



tionis ut A B ad B C, ita est quadratum ex F G ad quadratum ex K. Sed A B ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea F G ipsi K longitudine est incommensurabilis. Ergo F G plus potest quam G H quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque F G, G H rationales potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expositæ rationali E. Quare F H est ex binis nominibus sexta [a]. *Q. E. F.*

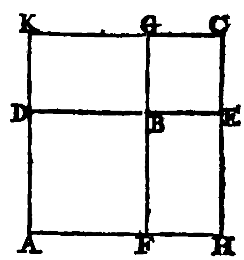
[a] Def. Secund. 6. hujus.

LEMMA VII.

Sint duo quadrata A B, B C, et ponantur ita ut D B sit in directum ipsi B E: ergo et F B ipsi B G in directum erit [b]. Et compleatur A C parallelogrammum. Dico A C quadratum esse; et inter quadrata A B, B C rectangulum D G medium esse proportionale, itemque inter ipsa A C, C B medium proportionale esse D C.

[b] 14. primi.

Quoniam enim D B quidem est æqualis F B, B E vero ipsi B G; erit tota D E toti F G æqualis. Sed D E æqualis est utrivis ipsarum K C, A H; et F G utrivis ipsarum A K, H C est æqualis. Ergo et utravis A H, K C utrivis A K, H C est æqualis; æquilaterum igitur est A C parallelogrammum. Est autem et rectangulum: ergo quadratum est A C. Et quoniam est ut F B ad B G, ita D B ad B E; ut autem F B ad B G, ita A B ad D G, et ut D B ad B E, ita D G ad B C [c]: ut igitur A B ad D G, ita est D G ad B C [d]: ideoque inter A B, B C medium proportionale est D G. Dico præterea inter ipsa A C,



[c] 1. sexti.

[d] 11. quinti.

C B

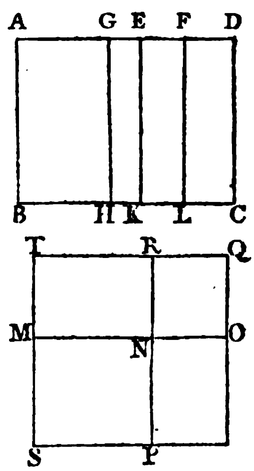
C B medium proportionale eſſe D C. Nam cum ſit ut A D ad D K, ita K G ad G C, eſt enim utraque utrique æqualis; et componendo erit ut A K ad K D, ita K C ad C G. Sed ut A K ad K D, ita A C ad C D; et ut K C ad C G, ita D C ad C B[d]. Et igitur ut A C ad C D, ita eſt D C[d] ad C B. Ac propterea inter ipſa A C, C B medium proportionale eſt C D. *Q. E. D.*

[d] 1. ſexti.

PROP. LV. THEOR. [LV.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus primâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

Spatium enim A B C D contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus primâ A D: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur.



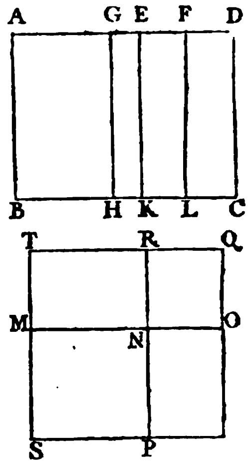
Quoniam enim A D eſt ex binis nominibus prima, dividatur in nomina ad punctum E; et ſit A E majus nomen. Manifeſtum eſt A E, E D rationales eſſe potentiâ ſolum commenſurabiles, et A E plus poſſe quam E D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine[e]; et præterea ipſam A E expoſitæ rationali A B longitudine commenſurabilem eſſe. Secetur E D bifariam in F. Quoniam igitur A E plus poteſt quam E D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; ſi quartæ parti quadrati, quod ſit a minori, hoc eſt, ſi quadrato ex E F, æquale parallelogrammum ad majorem A E applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes commenſurabiles ipſam dividet[f]. Applicetur igitur ad A E quadrato ipſius E F æquale rectangulum ſub A G, G E[g]: ergo A G ipſi G E longitudine eſt commenſurabilis. Deinde per puncta G, E, F alterutri ipſarum A B, D C parallelæ ducantur G H, E K, F L; et parallelogrammo quidem A H æquale quadratum conſtituatur S N; parallelogrammo

[e] Def. Secund. 1. hujus.

[f] 18. hujus.

[g] 28. ſexti.

lelogrammo autem G K æquale quadratum N Q. Ita autem ponantur quadrata S N, N Q, ut M N sit in directum ipsi N O [h]: ergo R N ipsi N P in directum erit [i]. Et parallelogrammum S Q compleatur: quadratum igitur est S Q [k]. Et quoniam rectangulum sub A G, G E est æquale quadrato ex E F, erit ut A G ad E F, ita E F ad E G [l]: quare ut A H ad E L, ita est E L ad K G [m]: ac propterea inter parallelogramma A H, G K medium proportionale est E L. Sed parallelogrammo A H æquale est quadratum S N, et G K æquale quadrato N Q [n]: ergo inter quadrata S N, N Q medium proportionale est E L. Sed inter eadem S N, N Q medium proportionale est M R [o]: æquale igitur est M R ipsi E L. Sed M R est æquale P O [p], et E L ipsi F C [q]: ergo totum E C ipsis M R, P O est æquale. Sunt autem et A H, G K æqualia ipsis S N, N Q: totum igitur A C est æquale toti S Q, hoc est, quadrato ex M O; ideoque ipsa M O potest parallelogrammum A C. Dico M O ex binis nominibus esse. Quoniam enim A G commensurabilis est ipsi G E; erit A E utrique ipsarum A G, G E commensurabilis [r]. Ponitur autem et A E commensurabilis ipsi A B longitudine: ergo et A G, G E ipsi A B commensurabiles sunt [s]. Atque est A B rationalis: rationalis igitur est et utraque ipsarum A G, G E; et ob id rationale utrumque ipsorum A H, G K [t], et A H ipsi G K est commensurabile [u]. Sed A H est æquale ipsi S N, et G K ipsi N Q: ergo et quadrata S N, N Q, videlicet, quæ fiunt ex M N, N O, rationalia sunt et commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est A E ipsi E D longitudine, et A E quidem est commensurabilis ipsi A G, et D E commensurabilis ipsi E F; erit et A G ipsi E F longitudine incommensurabilis: ergo et A H est incommensurabile ipsi E L. Sed A H est æquale S N, et E L ipsi M R: quare S N est incommensurabile ipsi M R. Ut autem S N ad M R, ita P N ad N R: incommensurabilis



[h] 14. secundi.
[i] 14. primi.
[k] Lemma 7. hujus.
[l] 17. sexti.
[m] 1. sexti.
[n] Per construct.
[o] Lemma 7.
[p] 43. primi.
[q] 36. primi.
[r] 16. hujus.
[s] 12. hujus.
[t] 20. hujus.
[u] 10. hujus.

bilis

bilis igitur eſt P N ipſi N R longitudine [u]. Eſt autem P N æqualis M N, et N R ipſi N O: ergo M N ipſi N O longitudine eſt incommenſurabilis. Atque eſt quadratum ex M N commenſurabile quadrato ex N O; et utrumque rationale. Nimirum cum rectangulis A H, G K, rationalibus et inter ſe commenſurabilibus, quadrata illa, ex M N, N O, ſingulatim ſint æqualia. Quare M N, N O rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles. Ideoque M O ex binis nominibus eſt, et poteſt parallelogrammum A C [x]. *Q. E. D.*

[u] 10. hujus.
[x] 37. hujus.

PROP. LVI. THEOR. [LVI.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus ſecundâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ ex binis mediis prima appellatur.

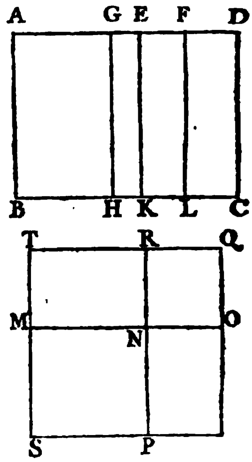
Spatium enim A B C D contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus ſecundâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A C poteſt, ex binis mediis primam eſſe.

Vide fig. Prop. 55.

Quoniam enim A D eſt ex binis nominibus ſecunda, dividatur in nomina ad punctum E, ita ut A E ſit majus nomen. Ergo A E, E D rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles [y], et A E plus poteſt quam E D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, et minus nomen E D commenſurabile eſt ipſi A B longitudine. Secetur E D bifariam in F; et quadrato ipſius E F æquale parallelogrammum ad rectam lineam A E applicetur, deficiens figurâ quadratâ, rectangulum nempe ſub A G, G E. Commenſurabilis igitur eſt A G ipſi G E longitudine [z]. Et per puncta G, E, F ipſis A B, D C parallelæ ducantur G H, E K, F L; parallelogrammo autem A H æquale quadratum S N conſtituatur, et parallelogrammo G K æquale quadratum N Q. Ita autem ponantur quadrata S N, N Q, ut M N ſit in directum ipſi N O: ergo et R N ipſi N P in directum erit. Et compleatur S Q quadratum: manifeſtum igitur eſt ex iis quæ demonſtrata ſunt [a], parallelogrammum M R medium eſſe proportionale inter quadrata S N, N Q, et parallelogrammo E L æquale; et præterea rectam lineam M O poſſe ſpatium A C. Oſtendendum igitur eſt ipſam M O ex binis mediis primam eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt A E ipſi E D longitudine, commenſurabilis autem E D ipſi A B [b]; erit A E ipſi A B longitudine incommenſurabilis [c]. Et quoniam A G commenſurabilis eſt longitudine ipſi

[y] Def. Secund. 2. hujus.
[z] 18. hujus.
[a] In antec.
[b] 37. hujus.
[c] 14. hujus.

GE; erit AE utrique ipsarum AG, GE longitudine com-
[d] 16. hujus. mensurabilis [d]. Atque est AE rationalis: rationalis igitur et utraque AG, GE. Quod cum AE sit incommensurabilis quidem ipsi AB longitudine, commensurabilis autem AE utrique ipsarum AG, GE; erunt AG, GE ipsi AB longitudine incommensurabiles: quare BA, AG, GE rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Medium igitur est utrumque parallelogram-
[e] 22. hujus. morum AH, GK [e]; et ob id utrumque quadratorum SN, NQ est medium: ergo rectæ lineæ MN, NO mediæ sunt. Rursus, quoniam commensurabilis est AG ipsi GE longitudine; erit parallelogrammum AH parallelo-



[f] 1. sexti, & 10. hujus. grammo GK commensurabile [f]; hoc est, quadratum SN ipsi NQ; hoc est, quadratum ex MN quadrato ex NO. Ergo MN, NO potentiâ commensurabiles sunt. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine, et AE quidem est commensurabilis ipsi AG, ED vero ipsi EF: erit AG ipsi EF longitudine incommensurabilis. Quare et parallelogrammum AH incommensurabile parallelogrammo EL, hoc est, SN ipsi MR. Quare
[g] 1. sexti. et recta PN ipsi NR [g], hoc est, MN ipsi NO, incommensurabilis est longitudine. Ostensæ autem sunt MN, NO, et mediæ, et potentiâ commensurabiles: ergo MN, NO mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico et rationale continere. Quoniam enim DE ponitur commensurabilis utrique ipsarum AB, EF; erit EF ipsi EK longitudine commensurabilis. Atque est rationalis utra-
[h] 20. hujus. que ipsarum: rationale igitur est parallelogrammum EL [h], hoc est, MR; estque MR quod sub MN, NO continetur. Si autem duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota
[i] 28. hujus. irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur [i]. Ergo MO ex binis mediis est prima. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. LVII. THEOR. [LVII.]

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta linea spatium potens irrationalis est, quae appellatur ex binis mediis secunda.

Spatium enim A B C D contineatur sub rationali A B, et ex binis nominibus tertiâ A D, divisâ in nomina ad punctum E, quorum majus sit A E: dico rectam lineam, quae potest spatium A C, irrationalem esse; quae ex binis mediis secunda appellatur. Vide fig. Prop. 56.

Construantur enim eadem, quae supra. Et quoniam A D ex binis nominibus tertia est; erunt A E, E D rationales potentiâ solum commensurabiles[k], et A E plus poterit quam E D quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine, neutraque ipsarum A E, E D ipsi A B longitudine erit commensurabilis. Similiter[l] ostendemus M O eam esse, quae spatium A C potest, et esse ex binis mediis M N, N O: itaque ostendendum est et secundam esse. Quoniam enim D E incommensurabilis est longitudine ipsi A B, hoc est, ipsi E K; atque est D E commensurabilis E F: erit E F ipsi E K longitudine incommensurabilis. Et sunt rationales: ergo F E, E K rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; et ob id E L, hoc est, M R, medium est; et continetur sub M N, N O. Medium igitur est quod sub M N, N O continetur. Quare M O ex binis mediis est secunda[m]. *Q. E. D.*

[k] Def. Secund. 3. hujus.
[l] Atque in praec.
[m] 39. hujus.

PROP. LVIII. THEOR. [LVIII.]

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta linea spatium potens irrationalis est, quae vocatur major.

Spatium enim A C contineatur sub rationali A B, et ex binis nominibus quartâ A D, divisâ in nomina ad punctum E, quorum A E sit majus: dico rectam lineam, quae spatium A C potest, irrationalem esse; quae major appellatur.

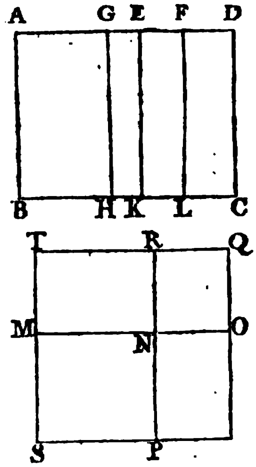
Quoniam enim A D ex binis nominibus est quarta; erunt A E, E D rationales potentiâ solum commensurabiles[n], et A E plus poterit quam E D quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis, et A E ipsi A B commensurabilis erit longitudine. Dividatur D E bifariam in F, et quadrato ipsius E F aequale parallelogrammum ad A E applicetur, deficiens figurâ quadratâ, rectangulum

[n] Def. Secund. 4. hujus.

gulum nempe ſub A G, G E: erit igitur A G ipſi G E longitudine incommenſurabilis [o].

[o] 19. hujus.

Ducantur ipſi A B parallelæ G H, E K, F L, et eadem fiant, quæ ſupra. Conſtat igitur M O poſſe ſpatium A C. Oſtendendum autem eſt M O irrationalem eſſe, quæ vocatur major. Quoniam enim A G ipſi G E incommenſurabilis eſt longitudine, erit et A H ipſi G K incommenſurabile [p], hoc eſt, S N ipſi N Q [q]. Ergo M N, N O potentiâ incommenſurabiles ſunt. Et quoniam A B ipſi A B longitudine eſt commenſurabilis, parallelogrammum A K rationale eſt; atqui eſt æquale quadratis ipſarum M N, N O: ergo compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O eſt rationale.



[p] 1. ſexti. & 10. hujus.
[q] Per conſtruct.

Quod cum D E ſit incommenſurabilis longitudine ipſi A B, hoc eſt, ipſi E K, ſit autem D E commenſurabilis ipſi E F: erit E F ipſi E K incommenſurabilis longitudine. Quare K E, E F rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles [r]; et ob id medium eſt L E, hoc eſt, M R, quod continetur ſub M N, N O. Medium igitur eſt quod ſub M N, N O continetur; eſtque compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O rationale; et M N ipſi N O potentiâ incommenſurabilis. Si autem duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles componantur, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium; tota irrationalis erit: vocatur autem major [s]. Ergo M O irrationalis eſt, quæ major appellatur, et poteſt ſpatium A O. *Q. E. D.*

[r] 22. hujus.
[s] 40. hujus.

[LIX.]

PROP. LIX. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ vocatur rationale et medium potens.

Vide fig. Prop. 58.

Spatium enim A C contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus quintâ A D, diviſâ in nomina ad punctum E, ita ut majus nomen ſit A E: dico rectam lineam, quæ

quæ poteſt ſpatium A C, irrationalem eſſe; quæ vocatur rationale ac medium potens.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra: manifeſtum igitur eſt M O poſſe ſpatium A C. Oſtendere autem oportet M O eſſe, quæ rationale ac medium poteſt. Quoniam enim A G ipſi E G incommenſurabilis eſt longitudine; et parallelogrammum A H eſt incommenſurabile parallelogrammo H E[t], hoc eſt, quadratum ex M N quadrato ex N O: ergo M N, N O potentiâ incommenſurabiles ſunt. Et quoniam A D eſt ex binis nominibus quinta, ſitque minor ipſius portio E D; erit E D ipſi A B commenſurabilis longitudine[u]. Sed A E ipſi E D longitudine eſt incommenſurabilis: ergo et A B incommenſurabilis eſt longitudine ipſi A E[x]: ac propterea B A, A E rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles: medium igitur eſt A K[y], hoc eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O. Et quoniam D E commenſurabilis eſt longitudine ipſi A B, hoc eſt, ipſi E K, eſtque D E commenſurabilis ipſi E F: erit et E F ipſi E K commenſurabilis. Rationalis autem eſt E K: rationale igitur eſt et E L[z], hoc eſt, M R, hoc eſt, parallelogrammum quod ſub M N, N O continetur. Quare M N, N O potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: ergo M O eſt rationale ac medium potens, et poteſt ſpatium A C[a]. *Q. E. D.*

[t] 1. ſexti, & 10. hujus.
[u] Def. Secund. 5. hujus.
[x] 13. hujus.
[y] 22. hujus.
[z] 20. hujus.
[a] 41. hujus.

PROP. LX. THEOR. [LX.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus ſextâ; quæ ſpatium poteſt recta linea, irrationalis eſt, quæ vocatur bina media potens.

Spatium enim A B C D contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus ſextâ A D, quæ dividatur in nomina ad punctum E, ita ut A E ſit majus nomen: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe bina media potentem. Vide fig. Prop. 58.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Manifeſtum igitur eſt M O poſſe ſpatium A C, et M N ipſi N O potentiâ incommenſurabilem eſſe. Et quoniam E A ipſi A B incommenſurabilis eſt longitudine, erunt E A, A B rationales potentiâ ſolum commenſurabiles: medium igitur eſt A K[b], hoc eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O. Rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt E D ipſi A B longitudine, erit et F E ipſi E K longitudine incommenſurabilis:

[b] 22. hujus.

commensurabilis: ergo et F E, E K rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea medium est E L, hoc est, M R, hoc est, quod sub M N, N O continetur. Et quoniam E A est incommensurabilis ipsi E F longitudine; et parallelogrammum A K parallelogrammo E L incommensurabile erit. Sed A K quidem est compositum ex quadratis ipsarum M N, N O; E L vero est quod sub M N, N O continetur. Incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum M N, N O ei, quod sub M N, N O continetur. Atque est utrumque ipsorum medium; et M N, N O potentiâ sunt incommensurabiles: ergo M O est bina media potens, et potest spatium A C [c]. *Q. E. D.*

[c] 42. hujus.

LEMMA VIII.

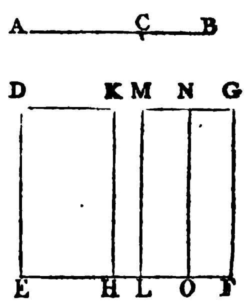
Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata majora sunt rectangulo, quod bis sub dictis partibus continetur.

Demonstratur ex 5ª et 9ª secundi ad modum Corollarii Lemmatis sexti.

[LXI.] PROP. LXI. THEOR.

Quadratum ejus, quæ est ex binis nominibus, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus A B, divisa in nomina ad punctum C, ita ut A C sit majus nomen; exponaturque rationalis D E, et quadrato rectæ lineæ A B æquale ad ipsam D E applicetur rectangulum parallelogrammum D E F G, latitudinem faciens D G: dico D G ex binis nominibus primam esse.



Applicetur enim ad rationalem D E quadrato quidem ipsius A C æquale parallelogrammum D H; quadrato autem ipsius B C æquale K L [f]: reliquum igitur quod bis sub A C, C B continetur est æquale parallelogrammo M F [g]. Secetur M G bifariam in N, et alterutri ipsarum M L, G F parallela ducatur N O: utrumque igitur parallelogrammorum M O, N F est æquale ei, quod semel sub A C, C B continetur. Et quoniam ex binis nominibus

[f] 45. primi.
[g] 4. secundi.

minibus est A B, divisa in nomina ad punctum C; erunt A C, C B rationales potentiâ solum commensurabiles [h]. [h] 37. hujus.
Ergo quadrata ex A C, C B rationalia sunt et commensurabilia inter se; et ob id compositum ex quadratis ipsarum A C, C B commensurabile est ipsarum A C, C B quadratis [i]: rationale igitur est compositum ex quadratis ipsarum A C, C B. Atqui est æquale parallelogrammo D L. Ergo et D L est rationale, et ad rationalem D E applicatum rationalem efficit D M, et ipsi D E commensurabilem longitudine [k]. Rursus, quoniam A C, C B rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; medium est quod bis sub A C, C B continetur, hoc est, rectangulum M F. Et ad rationalem M L applicatum rationalem efficit M G, sed ipsi M L, hoc est, ipsi E D, longitudine incommensurabilem [l]. Est autem et M D rationalis, et ipsi D E commensurabilis longitudine: ergo D M ipsi M G longitudine est incommensurabilis [m]. Suntque rationales: ergo D M, M G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea D G est ex binis nominibus [h]. Ostendendum est et primam esse. Quoniam enim inter quadrata ex A C, C B medium proportionale est, quod sub A C, C B continetur; erit etiam inter parallelogramma D H, K L medium proportionale M O [n]. Est igitur ut D H ad M O, ita M O ad K L; hoc est, ut recta linea D K ad M N, ita M N ad M K [o]: ergo rectangulum sub D K, K M quadrato ex M N est æquale [p]. Et quoniam quadratum ex A C commensurabile est quadrato ex C B, erit et parallelogrammum D H parallelogrammo K L commensurabile [p]: ergo et D K ipsi K M longitudine est commensurabilis. Quod cum quadrata ex A C, C B majora sint eo, quod bis sub A C, C B continetur [q]; erit et parallelogrammum D L majus parallelogrammo M F: ideoque recta linea D M ipsâ M G est major. Atqui est rectangulum sub D K, K M æquale quadrato ex M N, hoc est, quartæ parti quadrati ex M G; et D K ipsi K M longitudine est commensurabilis. Si autem sint duæ rectæ lineæ inæquales, et quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat; major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine [r]. Quare D M plus potest quam M G quadrato rectæ ipsi D M longitudine commensurabilis. Suntque rationales D M, M G;

[i] 16. hujus.
[k] 21. hujus.
[l] 23. hujus.
[m] 13. hujus.
[n] Lemma 7.
[o] 1. sexti.
[p] 17. sexti.
[p] 10. hujus.
[q] Lem. 8. hujus.
[r] 18. hujus.

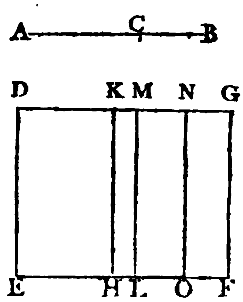
M G; atque D M, quæ eſt majus nomen, expoſitæ rationali D E longitudine eſt commenſurabilis: ergo D G eſt ex binis nominibus prima[s]. *Q. E. D.*

[s] Def. Secund. 1. hujus.

[LXII.] PROP. LXII. THEOR.

Quadratum ejus, quæ eſt ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

Sit ex binis mediis prima A B, diviſa in nomina ad punctum C, ita ut A C ſit majus nomen; exponaturque rationalis D E, et ad ipſam D E applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipſius A B, quod ſit D F, latitudinem faciens D G: dico D G ex binis nominibus ſecundam eſſe.



Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A B ex binis mediis eſt prima, diviſa ad punctum C; erunt A C, C B mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent[t]. Quare et quæ fiunt ex A C, C B quadrata media ſunt; ideoque D L eſt medium, et ad rationalem D E applicatum, rationalem efficit M D, ſed ipſi D E longitudine incommenſurabilem[u]. Rurſus, quoniam rationale eſt, quod bis ſub A C, C B continetur; erit et M F rationale, et ad rationalem M L applicatum efficit M G rationalem, et ipſi M L[x], hoc eſt, ipſi D E, commenſurabilem longitudine. Incommenſurabilis igitur eſt D M ipſi M G[y]. Sed rationales ſunt. Quare D M, M G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea D G eſt ex binis nominibus. Oſtendendum eſt et ſecundam eſſe. Quoniam enim quadrata ex A C, C B majora ſunt eo, quod bis ſub A C, C B continetur[z]; erit et D L parallelogrammum parallelogrammo M F majus: ergo et recta linea D M major eſt ipſâ M G. Quod cum quadratum ex A C quadrato ex C B ſit commenſurabile; et D H parallelogrammum parallelogrammo K L commenſurabile erit: quare et D K commenſurabilis ipſi K M. Sed rectangulum, quod ſub D K, K M continetur, quadrato ipſius M N æquale eſt. (Id enim ut in præcedente oſtendatur.) Ergo D M plus poteſt

[t] 38. hujus.
[u] 23. hujus.
[x] 21. hujus.
[y] 13. hujus.
[z] Lem. 8. hujus.

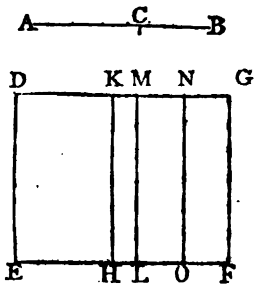
poteſt quam M G quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis [a]. Eſtque M G commenſurabilis longitudine ipſi D E. Quare D G eſt ex binis nominibus ſecunda [b]. *Q. E. D.*

[a] 18. hujus. [b] Def. Secund. 2. hujus.

PROP. LXIII. THEOR. [LXIII.]

Quadratum ejus, quæ eſt ex binis mediis ſecunda, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

Sit ex binis mediis ſecunda A B, diviſa in nomina ad C, ita ut A C ſit majus nomen; rationalis autem ſit D E, et ad ipſam D E quadrato ex A B æquale parallelogrammum D F applicetur, latitudinem faciens D G: dico D G ex binis nominibus tertiam eſſe.



Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A B eſt ex binis mediis ſecunda, diviſa ad punctum C; erunt A C, C B mediæ, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium continent [c]: ergo et compoſitum ex ipſarum A C, C B quadratis medium eſt. Atqui eſt æquale ipſi D L: medium igitur eſt D L. Sed ad rationalem D E applicatur: ergo rationalis eſt M D, ſed ipſi D E longitudine incommenſurabilis [d]. Rectangulum autem quod ſub A C, C B medium eſt [e]. Illius autem duplum M F. Quare et M F medium, et ad rationalem M L applicatum, efficit M G rationalem, ſed ipſi M L, ſeu D E, longitudine incommenſurabilem [d]. Utraque igitur ipſarum D M, M G rationalis eſt, et ipſi D E longitudine incommenſurabilis. Et quoniam incommenſurabilis eſt A C ipſi C B longitudine, ut autem A C ad C B ita quadratum ex A C ad rectangulum ſub A C, C B [f]; erit et quadratum ex A C rectangulo ſub A C, C B incommenſurabile. Ergo compoſitum ex quadratis ipſarum A C, C B incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A C, C B continetur; hoc eſt, D L incommenſurabile ipſi M F; et ob id recta linea D M ipſi M G longitudine eſt incommenſurabilis. Suntque rationales: ergo D G eſt ex binis nominibus. Oſtendendum eſt et tertiam eſſe. Similiter enim ac in præcedente concludemus D M ipſâ

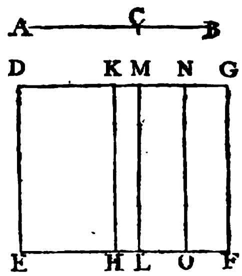
[c] 39. hujus. [d] 23. hujus. [e] ex hyp. [f] 1. ſexti.

ipsâ M G majorem esse, et D K ipsi K M commensurabilem. Atqui est rectangulum sub D K, K M quadrato ipsius M N æquale: ergo D M plus potest quam M G
[h] 18. hujus. quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[h]. Et neutra ipsarum D M, M G est longitudine commen-
[i] Def. Secund. 3. hujus. surabilis ipsi D E. Quare D G est ex binis nominibus tertia[i]. Q. E. D.

[LXIV.] PROP. LXIV. THEOR.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit major A B, divisa in nomina in puncto C, ita ut A C sit majus nomen; rationalis autem quædam sit D E, et quadrato ex A B æquale ad ipsam D E applicetur parallelogrammum D F, latitudinem faciens D G: dico D G esse ex binis nominibus quartam.



Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam A B est major, divisa in nomina in C; erunt A C, C B potentiâ in-
[k] 40. hujus. commensurabiles[k], quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. Itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum A C, C B, erit et parallelogrammum D L rationale. Ergo et rationalis est recta linea D M, ipsique D E longitudine commen-
[l] 21. hujus. surabilis[l]. Rursus, quoniam medium est quod bis sub A C, C B continetur, hoc est, M F, et ad rationalem M L est applicatum; erit et M G rationalis, sed ipsi D E in-
[m] 23. hujus. commensurabilis longitudine[m]. Ergo et D M ipsi M G longitudine incommensurabilis est; ac propterea D M, M G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles:
[n] 37. hujus. quare ex duobus nominibus est D G[n]. Ostendendum est et quartam esse. Similiter enim atque in superioribus concludemus D M majorem esse quam M G, et rectangulum sub D K, K M quadrato ex M N æquale. Quoniam igitur quadratum ex A C incommensurabile est quadrato ex C B; erit et D H parallelogrammum incommensurabile
[o] 10. hujus. parallelogrammo K L[o]; et ob id recta linea K D ipsi K M longitudine incommensurabilis. Si autem sint duæ rectæ

lineæ

lineæ inæquales, et quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividat; major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis [p]. Ergo D M plus potest quam M G quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque D M, M G rationales potentiâ solum commensurabiles, atque est D M commensurabilis expositæ rationali D E. Quare D G est ex binis nominibus quarta [q]. *Q. E. D.*

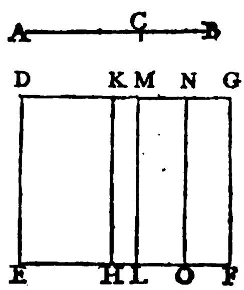
[p] 19. hujus.
[q] Def. Secund. 4. hujus.

PROP. LXV. THEOR. [LXV.]

Quadratum ejus, quæ rationale ac medium potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

Sit rationale ac medium potens A B, divisa in nomina ad punctum C, ita ut A C sit majus nomen; exponaturque rationalis D E, et quadrato ipsius A B æquale parallelogrammum D F ad ipsam D E applicetur, latitudinem faciens D G: dico D G esse ex binis nominibus quintam.

Construantur enim, quæ supra. Et quoniam rationale ac medium potens est A B, divisa ad C punctum; erunt A C, C B potentiâ incommensurabiles [r], quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale. Quoniam igitur medium est compositum ex ipsarum A C, C B quadratis; erit et parallelogrammum D L medium: ideoque recta linea D M rationalis est, sed ipsi D E longitudine incommensurabilis [s]. Rursus, quoniam rationale est quod bis sub A C, C B continetur, hoc est, parallelogrammum M F; erit M G rationalis et ipsi D E longitudine commensurabilis [t]. Incommensurabilis igitur est D M ipsi M G longitudine [u]. Quare D M, M G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea D G est ex binis nominibus [x]. Dico et quintam esse. Similiter enim ac in præcedentibus demonstrabitur rectangulum sub D K, K M quadrato ex M N esse æquale; et D K ipsi K M longitudine esse incommensurabilem. Quare D M plus



[r] 41. hujus.
[s] 23. hujus.
[t] 21. hujus.
[u] 13. hujus.
[x] 37. hujus.

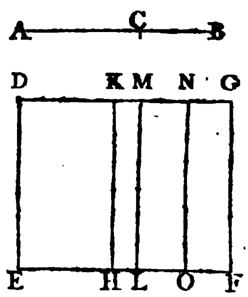
plus poteſt quam M G quadrato rectæ lineæ ſibi incom-
y 19. hujus. menſurabilis longitudine [y]. Suntque D M, M G rationales potentiâ ſolum commenſurabiles, et minor M G
z Def. Secund. 5. hujus. commenſurabilis eſt ipſi D E longitudine. Ergo D G eſt ex binis nominibus quinta [z]. *Q. E. D.*

[LXVI.] PROP. LXVI. THEOR.

Quadratum ejus, quæ bina media poteſt, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

Sit bina media potens A B, diviſa in nomina ad punctum C; rationalis autem ſit D E, et ad ipſam D E quadrato ex A B æquale parallelogrammum D F applicetur, latitudinem faciens D G: dico D G eſſe ex binis nominibus ſextam.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A B eſt bina media potens, diviſa ad C; erunt A C, C B potentiâ in-
a 42. hujus. commenſurabiles [a], facientes et compoſitum ex ipſarum quadratis medium, et quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis. Ergo ex jam demonſtratis medium eſt utrumque parallelogrammorum D L, M F, et ad rationalem D E applicata ſunt: rationalis igitur eſt et utraque D M, M G, et ipſi D E longitudine incommen-



b 23. hujus. ſurabilis [b]. Et quoniam compoſitum ex ipſarum A C, C B quadratis incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A C, C B continetur; erit et D L parallelogrammum parallelogrammo M F incommenſurabile; et idcirco recta
c 10. hujus. D M longitudine incommenſurabilis rectæ M G [c]. Quare D M, M G rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; igitur D G eſt ex binis nominibus. Dico et ſextam eſſe. Similiter enim atque in præcedentibus rurſus oſtendemus rectangulum ſub D K, K M quadrato ex M N æquale, et D K ipſi K M longitudine incommenſurabilem eſſe. Ergo D M plus poteſt quam M G quadrato
d 19. hujus. rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine [d]. Et neutra ipſarum D M, M G longitudine commenſurabilis
e Def. Secund. 6. hujus. eſt expoſitæ rationali D E. Quare D G eſt ex binis nominibus ſexta [e]. *Q. E. D.*

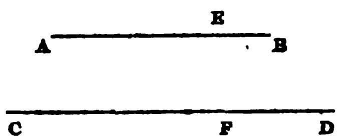
PROP.

PROP. LXVII. THEOR. [LXVII.]

Ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

Sit ex binis nominibus A B, et ipsi A B longitudine commensurabilis sit C D: dico C D ex binis nominibus esse, et ordine eandem ipsi A B.

Quoniàm enim ex binis nominibus est A B, dividatur in nomina ad punctum E, et sit A E majus nomen: ergo A E, E B rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles [f]. Fiat ut A B ad C D, ita A E ad C F [g]; et reliqua igitur E B ad



f 37. hujus.
g 12. sexti.

reliquam F D est ut A B ad C D [h]. Commensurabilis au- h 19. quinti.
tem est A B ipsi C D longitudine: ergo et A E ipsi C F, et E B ipsi F D, longitudine est commensurabilis [i]. Sunt- i 10. hujus.
que rationales A E, E B: rationales igitur sunt et C F, F D. Et quoniam est ut A E ad C F, ita E B ad F D; erit permutando ut A E ad E B, ita C F ad F D. Sunt autem A E, E B potentiâ solum commensurabiles: ergo et C F, F D potentiâ solum commensurabiles erunt [i]. Et sunt rationales: ex binis igitur nominibus est C D [f]. Dico et ipsi A B ordine eandem esse.

Vel enim A E plus potest quam E B quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si quidem igitur A E plus possit quam E B quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine [k]. Quod si A E expositæ ra- k 15. hujus.
tionali longitudine sit commensurabilis, et C F eidem longitudine commensurabilis erit [l]: et ob id utraque l 12. hujus.
ipsarum A B, C D, ex binis nominibus est prima, hoc est, ordine eadem. Si vero E B longitudine sit commensurabilis expositæ rationali, et F D eidem erit longitudine commensurabilis: eamque ob causam C D ipsi A B ordine eadem est, utraque enim est ex binis nominibus secunda. Quod si neutra ipsarum A E, E B sit expositæ rationali longitudine commensurabilis, et neutra ipsarum C F, F D eidem longitudine commensurabilis erit; et utraque A B, C D est tertia. At si A E plus possit quam E B quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis

longitudine; et CF plus poterit quam FD quadrato rectæ [k 15. hujus.] lineæ sibi longitudine incommensurabilis [k]. Et si AE longitudine sit commensurabilis expositæ rationali, et CF eidem longitudine commensurabilis erit; et est AB, CD utraque quarta. Quod si EB sit, et ipsa FD erit; et est utraque AB, CD quinta. Si vero neutra ipsarum AE, EB sit, et neutra CF, FD expositæ rationali erit longitudine commensurabilis; et est utraque AB, CD sexta.

Ergo ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine eadem. *Q. E. D.*

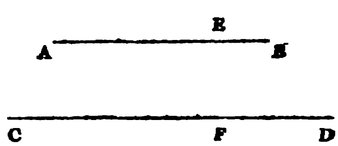
[LXVIII.]

PROP. LXVIII. THEOR.

Ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est, atque ordine eadem.

Sit ex binis mediis AB, et ipsi AB commensurabilis longitudine sit CD: dico CD ex binis mediis esse, et ipsi AB ordine eandem.

Quoniam enim AB ex binis mediis est, dividatur in nomina ad punctum E. Erunt igitur AE, EB mediæ, potentiâ solum commensu- [l 38. & 39. hujus.] rabiles [l]. Itaque fiat ut AB ad CD, ita AE ad CF: ergo et reliqua EB ad reliquam FD est ut AB ad CD. Commensurabilis autem est AB ipsi CD [m ex hyp.] longitudine [m]. Quare et AE ipsi CF longitudine commensurabilis erit, et EB ipsi FD. Suntque mediæ AB, [n 24. hujus.] EB: mediæ igitur et CF, FD [n]. Et quoniam est ut AE ad EB, ita CF ad FD, et sunt AE, EB commensurabiles potentiâ solum; erunt et CF, FD potentiâ solum [o 10. hujus.] commensurabiles [o]. Ostensæ autem sunt et mediæ: ergo CD est ex binis mediis [l]. Dico et ipsi AB ordine eandem esse.



Quoniam enim est ut AE ad EB, ita CF ad FD; erit et quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB, [p 11. quinti. & 1. sexti.] ut quadratum ex CF ad rectangulum sub CF, FD [p]. Quare permutando ut quadratum ex AE ad quadratum ex CF, ita rectangulum sub AE, EB ad rectangulum sub CF, FD. Commensurabile autem est quadratum

ex

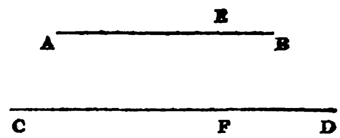
ex A E quadrato ex C F: ergo et rectangulum ſub A E, E B rectangulo ſub C F, F D eſt commenſurabile. Sive igitur rationale eſt rectangulum ſub A E, E B, et rectan-
gulum ſub C F, F D rationale erit[n]; atque ob id eſt utra- [n] Def. 9. hujus.
que A B, C D ex binis mediis prima[o]. Sive vero me- [o] 38. hujus.
dium eſt rectangulum ſub A E, E B, et ipſum ſub C F,
F D erit medium[p]. Atque eſt utraque A B, C D ex binis [p] Cor. Def. 12.* hujus.
mediis ſecunda[q]; et propterea C D ipſi A B ordine eadem [q] 39. hujus.
eſt. *Q. E. D.*

PROP. LXIX. THEOR. [LXIX.]

Majori commenſurabilis et ipſa major eſt.

Sit major A B; et ipſi A B commenſurabilis longitudine ſit C D: dico C D majorem eſſe.

Dividatur A B in nomina in E: ergo A E, E B potentiâ ſunt incommenſurabiles[r], [r] 40. hujus.
quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium. Et fiant eadem, quæ ſupra. Quoniam igitur eſt ut A B ad C D, ita A E ad C F, et E B ad



F D; erit ut A E ad C F, ita E B ad F D[s]. Et permu- [s] 11. quinti.
tando ut A E ad E B, ita C F ad F D. Sed potentiâ incommenſurabiles ſunt A E, E B. Quare et C F, F D potentiâ ſunt incommenſurabiles[t]. Commenſurabilis au- [t] 10. hujus.
tem eſt A B ipſi C D longitudine: ergo et utraque ipſarum A E, E B utrique C F, F D longitudine eſt commenſurabilis[t]. Et quoniam eſt ut A E ad C F, ita E B ad F D; permutandoque ut A E ad E B, ita C F ad F D; erit componendo ut A B ad B E, ita C D ad D F: ut igitur quadratum ex A B ad quadratum ex B E, ita quadratum ex C D ad quadratum ex D F[u]. Similiter demonſtrabimus [u] 22. ſexti.
et ut quadratum ex A B ad quadratum ex A E, ita eſſe quadratum ex C D ad quadratum ex C F. Ergo ut quadratum ex A B ad quadrata ex A E, E B, ita quadratum ex C D ad quadrata ex C F, F D[x]. Permutando igitur [x] 24. quinti.
ut quadratum ex A B ad quadratum ex C D, ita quadrata ex A E, E B ad quadrata ex C F, F D. Commenſurabile autem eſt quadratum ex A B quadrato ex C D: ergo et quadrata ex A E, E B quadratis ex C F, F D ſunt commenſurabilia. Atqui eſt compoſitum ex quadratis ipſa-

[u] 40. hujus. rum A E, E B rationale [u]: ergo et rationale erit compo-
[x] Def. 9. hujus. situm ex quadratis ipsarum C F, F D [x]. Rectangulum autem quod bis continetur sub A E, E B commensurabile est ei, quod bis sub C F, F D continetur. Atqui est medium quod bis continetur sub A E, E B [u]. Medium igi-
[y] Cor. Def. 12.* hujus. tur est et quod bis sub C F, F D continetur [y]. Ergo C F, F D potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. Tota igitur irrationalis est, quae vocatur major [u].

Ergo majori commensurabilis et ipsa major est. *Q. E. D.*

* SCHOLION.

Rectangula quae sub A E, E B; C F, F D continentur inter se commensurabilia esse sic ostendimus.

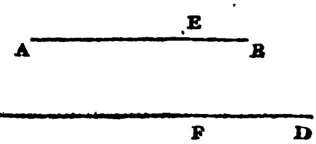
Rectae A B, C D ponuntur longitudine commensurabiles. Erit igitur A B ad C D, ut numerus
[z] 5. hujus. ad numerum [z]; puta ut M ad N. Ut autem M . . .
A B ad C D, sic est A E ad C F, et E B ad F D. N . . . .
Erit igitur tum A E ad C F, tum E B ad F D,
[a] 11. quinti. ut numerus M ad numerum N [a]. Quapropter rectangulum sub A E, E B, ad rectangulum sub C F, F D rationem habebit, quam quadratus numeri M, ad qua-
[b] 23. sexti, & 5. octavi. dratum numeri N [b]: numeri igitur ad numerum rationem. Rectangulum igitur quod sub A E, E B, illi quod
[c] 6. hujus. sub C F, F D commensurabile est [c]. *Q. E. D.*

*Cor.** Rectangula, quorum latera lateribus, singula singulis, longitudine sint commensurabilia, et ipsa inter se commensurabilia erunt.

[LXX.] PROP. LXX. THEOR.

Rationale ac medium potenti commensurabilis et ipsa rationale ac medium potens est.

Sit rationale ac medium potens A B; et ipsi A B commensurabilis sit C D: ostendendum est et C D rationale ac medium potentem esse.



Dividatur A B in rectas suas ad punctum E: ergo A E, E B potentiâ incom-

mensurabiles

menſurabiles ſunt[d], facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium; quod autem ſub ipſis continetur rationale: et eadem, quæ prius, conſtruantur. Similiter ac in præcedente demonſtrabimus C F, F D potentiâ eſſe incommenſurabiles; et compoſitum ex quadratis ipſarum A E, E B commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis ipſarum C F, F D; quod autem continetur ſub A E, E B commenſurabile eſſe ei, quod ſub C F, F D continetur. Ergo et compoſitum ex quadratis ipſarum C F, F D eſt medium[e], quod autem continetur ſub C F, F D rationale[f]; et igitur C D eſt rationale ac medium potens[g]. *Q. E. D.*

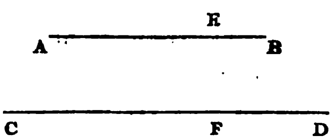
[d] 41. hujus.
[e] Cor. Def. 12.* hujus.
[f] Def. 9. hujus.
[g] 41. hujus.

PROP. LXXI. THEOR. [LXXI.]

Bina media potenti commenſurabilis et ipſa bina media potens eſt.

Sit bina media potens A B, et ipſi A B commenſurabilis ſit C D: oſtendendum eſt C D bina media potentem eſſe.

Quoniam enim bina media potens eſt A B, dividatur in rectas ſuas ad punctum E. Quare A E, E B potentiâ ſunt incommenſurabiles[h], quæ faciunt compoſitum ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur medium, et adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum A E, E B incommenſurabile rectangulo ſub ipſis A E, E B: et conſtruantur eadem, quæ ſupra. Similiter ac in præcedentibus demonſtrabimus C F, F D potentiâ incommenſurabiles eſſe; et compoſitum ex quadratis ipſarum A E, E B commenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum C F, F D; quod autem ſub A E, E B continetur commenſurabile eſſe ei, quod continetur ſub C F, F D. Quare et compoſitum ex quadratis ipſarum C F, F D medium eſt; itemque medium quod ſub C F, F D continetur[i]. Porro compoſitum ex quadratis ipſarum C F, F D rectangulo ſub ipſis C F, F D eſt incommenſurabile. Nam cum A E ſit ad E B, ut C F ad F D; erit quadratum ex A E ad rectangulum ſub A E, E B, ut quadratum ex C F ad rectangulum ſub C F, F D. Simili ratione quadratum ex E B ad rectangulum ſub A E, E B, ut quadratum



[h] 42. hujus.
[i] Cor. Def. 12.* hujus.

dratum ex F D ad rectangulum sub C F, F D. Quare et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B ad rectangulum sub A E, E B, ut compositum ex quadratis ipsarum C F, F D ad rectangulum sub C F, F D[d]. Compositum autem ex quadratis ipsarum A E, E B rectangulo sub A E, E B est incommensurabile. Quare et compositum ex quadratis ipsarum C F, F D est incommensurabile rectangulo sub C F, F D[e]. Ergo C D est bina media potens[f]. *Q. E. D.*

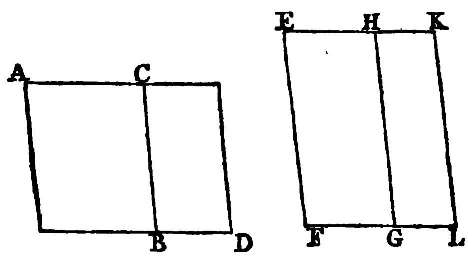
[d] 24. quinti. [e] 10. hujus. [f] 42. hujus.

[LXXII.] PROP. LXXII. THEOR.

Quæ potest spatium ex rationali et medio compositum, ex irrationalibus erit in serie primâ; nimirum vel prima in serie, vel secunda, vel quarta, vel quinta: hoc est, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima; vel major; vel rationale ac medium potens.

Sit rationale quidem spatium A B, medium autem C D: dico eam, quæ potest spatium A D, vel esse ex binis nominibus, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale ac medium potentem.

Etenim rationale A B vel majus est medio C D, vel minus. Sit primum majus; exponaturque rationalis E F, et ad ipsam applicetur parallelogrammum E G ipsi



A B æquale, quod latitudinem faciat E H; ipsi vero C D æquale ad E F, hoc est, ad H G, applicetur H L, latitudinem faciens H K. Et quoniam rationale est A B, et ipsi est æquale E G; erit et E G rationale; et ad rationalem E F applicatum latitudinem efficiet E H rationalem, et ipsi E F longitudine commensurabilem[g]. Rursus quoniam medium est C D, et ipsi est æquale H L; erit et H L medium; et ad rationalem E F, hoc est, H G, applicatum latitudinem efficiet H K rationalem, sed incommensurabilem

[g] 21. hujus.

bilem ipſi E F longitudine [h]. Quod cum medium ſit [h] C D, rationale autem A B; erit A B ipſi C D incommenſurabile: ergo et E G incommenſurabile eſt ipſi H L. Ut autem E G ad H L, ita eſt recta linea E H ad H K [i]: ergo E H ipſi H K longitudine eſt incommenſurabilis. Et ſunt ambæ rationales. Quare E H, H K rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id ex binis nominibus eſt E K, diviſa ad punctum H. Et quoniam majus eſt A B quam C D, æquale autem A B ipſi E G, et C D ipſi H L; erit et E G quam H L majus: ergo et E H major eſt quam H K. Vel igitur E H plus poteſt quam H K quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. Poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Et cum ſit major H E expoſitæ rationali E F commenſurabilis: erit E K ex binis nominibus prima [k]. Atqui eſt E F rationalis. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus primâ; recta linea ſpatium potens ex binis nominibus eſt [l]: ergo quæ poteſt ſpatium E L eſt ex binis nominibus. Quare et ea, quæ poteſt ſpatium A D, eſt ex binis nominibus.

[h] 23. hujus.
[i] 1. ſexti.
[k] Def. Secund. 1. hujus.
[l] 55. hujus.

Sed E H plus poſſit quam H K quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et cum ſit major E H expoſitæ rationali E F commenſurabilis longitudine; erit E K ex binis nominibus quarta [m]. Sed rationalis eſt E F. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus quartâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ major appellatur [n]. Potens igitur ſpatium E L major eſt: ergo et potens ſpatium A D major.

[m] Def. Secund. 4. hujus.
[n] 58. hujus.

Sed ſit ſpatium A B minus quam C D: erit igitur et E G quam H L minus; et ob id recta linea E H minor quam recta H K. Vel igitur K H plus poteſt quam E H quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Et cum ſit minor E H commenſurabilis expoſitæ rationali E F longitudine: erit E K ex binis nominibus ſecunda [o]. Rationalis autem E F. Quod ſi ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus ſecundâ, recta linea ſpatium potens eſt ex binis mediis prima [p]. Potens igitur

[o] Def. Secund. 2. hujus.
[p] 56. hujus.

ſpatium E L eſt ex binis mediis prima: ergo et potens ſpatium A D.

Sed K H plus poſſit quam E H quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et cum minor E H expoſitæ rationali E F commenſurabilis ſit longitudine; erit E K eſt ex binis nominibus quinta [q]. Atqui eſt rationalis E F. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus quintâ; quæ ſpatium poteſt recta linea, rationale ac medium potens eſt [r]. Quæ igitur poteſt ſpatium E L, rationale et medium potens eſt; ideoque rationale et medium potens eſt, quæ poteſt ſpatium A D.

[q] Def. Secund. 5. hujus.
[r] 59. hujus.

Quæ poteſt igitur ſpatium ex rationali et medio compoſitum, ex irrationalibus erit in ſerie primâ; nimirum vel prima in ſerie, vel ſecunda, vel quarta, vel quinta; hoc eſt, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima; vel major; vel rationale ac medium potens. *Q. E. D.*

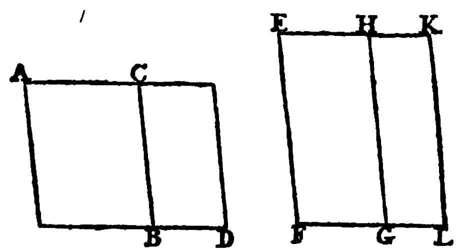
[LXXIII.]

PROP. LXXIII. THEOR.

Quæ poteſt ſpatium ex duobus mediis inter ſe incommenſurabilibus compoſitum, irrationalis erit; reliquarum utique alterutra in ſerie primâ, vel tertia, vel ſexta: hoc eſt, vel ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incommenſurabilia inter ſe A B, C D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A D poteſt, vel ex binis mediis ſecundam eſſe, vel bina media potentem.

Spatium enim A B vel majus eſt quam C D, vel minus. Sit primum majus; exponaturque rationalis E F; et ad E F ſpatio quidem A B æquale applicetur E G,



latitudinem faciens E H; ipſi vero C D æquale applicetur H L, latitudinem faciens H K. Et quoniam medium eſt utrumque ipſorum A B, C D, erit et utrumque E G,

H L

H L medium. Sed ad rationalem E F applicata sunt. Latitudines igitur E H, H K utramque efficiunt rationalem, et ipsi E F longitudine incommensurabilem [r]. [r] 23. hujus.

Quod cum A B incommensurabile sit ipsi C D; sitque A B quidem æquale ipsi E G; C D vero ipsi H L: erit et E G ipsi H L incommensurabile. Sed ut E G ad H L, ita est E H ad H K: incommensurabilis igitur est E H ipsi H K longitudine: ideoque E H, H K rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles. Quare ex binis nominibus est E K. Itaque vel E H plus potest quam H K quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Possit primum quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et neutra ipsarum E H, H K longitudine commensurabilis est expositæ rationali E F: ergo E K est ex binis nominibus tertia. Sed rationalis est E F. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus tertiâ, recta linea spatium potens est ex binis mediis secunda [s]: ergo quæ potest spatium E L, hoc est, A D, est ex binis mediis secunda. [s] 57. hujus.

Sed E H plus possit quam H K quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et utraque ipsarum E H, H K longitudine incommensurabilis est expositæ rationali E F. Quare E K est ex binis nominibus sexta [t]. At si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus sextâ; quæ spatium potest recta linea, est bina media potens [u]: ergo quæ potest spatium A D, bina media potest. Similiter demonstrabimus, si et A B sit minus quam C D, rectam lineam, quæ spatium potest A D, vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem. [t] Def. Secund. 6. hujus. [u] 60. hujus.

Quæ potest igitur spatium ex duobus mediis inter se incommensurabilibus compositum, irrationalis erit; reliquarum utique alterutra in serie primâ, vel tertia, vel sexta: hoc est, vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens. *Q. E. D.*

SCHOLION.

Quæ ex binis nominibus, et quæ post ipsam, sunt irrationales, neque mediæ, neque inter se eædem sunt; quadratum enim quod fit a mediâ, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, et ei, ad quam applicatur, longitudine incommensurabilem [x]: quod autem [x] 23. hujus.

sit

fit ab eâ, quæ eſt ex binis nominibus, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus pri-
[y] 61. hujus. mam [y]: quod ab eâ, quæ eſt ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis no-
[z] 62. hujus. minibus ſecundam [z]: quod ab eâ, quæ eſt ex binis mediis ſecunda, ad rationalem applicatum, latitudinem, effi-
[a] 63. hujus. cit ex binis nominibus tertiam [a]: quod a majori, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nomi-
[b] 64. hujus. nibus quartam [b]: quod ab eâ, quæ rationale ac medium poteſt, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex
[c] 65. hujus. binis nominibus quintam [c]: quod ab eâ, quæ bina media poteſt, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit
[d] 66. hujus. ex binis nominibus ſextam [d]. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et a primâ et inter ſeſe, a primâ quidem quod rationalis ſit, inter ſeſe vero quod ordine non ſint eædem, conſtat et ipſas irrationales eſſe, aliam ab aliâ differentes.

Principium Senariorum per Detractionem †.

[LXXIV.] PROP. LXXIV. THEOR.

Si a rationali rationalis auferatur, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti; reliqua irrationalis eſt: vocetur autem Apotome ‡.

A rationali enim A B rationalis auferatur B C, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Quoniam enim incommenſurabilis eſt A B ipſi B C



longitudine, atque eſt ut A B ad B C, ita quadratum ex
[f] 1. ſexti. A B ad id, quod continetur ſub A B, B C [f]; erit quadratum

† *Per detractionem ſunt binomia, quorum nomina ſigno—conjuncta ſunt.*
‡ *Quam ſane* Reſiduam *Juniores dicerent.*

ex

ex A B incommenſurabile ei, quod ſub A B, B C, continetur: ſed quadrato ex A B commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis ex A B, B C[f]; ei vero quod continetur ſub A B, B C commenſurabile eſt quod bis ſub A B, B C continetur. Compoſitum igitur ex ipſarum A B, B C quadratis ei, quod bis continetur ſub A B, B C, eſt incommenſurabile. Ergo reliquo, nempe quadrato ex A C, incommenſurabile eſt compoſitum ex quadratis ex A B, B C; quoniam quadrata ex A B, B C ſimul ſumpta æqualia ſunt ei, quod bis ſub A B, B C continetur unà cum quadrato ex A C[g]. Rationale autem eſt compoſitum ex quadratis ex A B, B C[h]: (nimirum cum ipſa A B rationalis[i] ſit, et quadrata ex A B, B C inter ſe commenſurabilia[i]:) ergo recta linea A C eſt irrationalis: vocetur autem apotome[k]. *Q. E. D.*

[f] 16. hujus.
[g] 7. ſecundi.
[h] 16. & Def. 9. hujus.
[i] ex hyp.
[k] Def. 11. hujus.

PROP. LXXV. THEOR. [LXXV.]

Si a mediâ media auferatur, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis eſt: vocetur autem mediæ apotome prima.

A mediâ enim A B auferatur media B C, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens ipſi A B, et cum eâ rationale faciens, videlicet quod ſub A B, B C continetur: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Quoniam enim A B, B C mediæ ſunt, erunt et quadratorum quæ ex A B, B C utrumque medium. Incommenſurabile igitur utrumque ei quod bis continetur



ſub A B, B C, rationali. Compoſitum igitur ex quadratis A B, B C incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur[l]: ergo et reliquo, ſc. quadrato ex A C, incommenſurabile eſt id, quod bis ſub A B, B C continetur[m]: quoniam ſi tota magnitudo uni componentium ſit incommenſurabilis, et quæ a principio magnitudines incommenſurabiles erunt[n]. Rationale autem eſt, quod bis continetur ſub A B, B C. Irrationale igitur eſt quadratum ex A C: ideoque irrationalis eſt A C[o]: vocetur autem mediæ apotome prima. *Q. E. D.*

[l] 16. & 14. hujus.
[m] 7. ſecundi.
[n] 17. hujus.
[o] Def. 11. hujus.

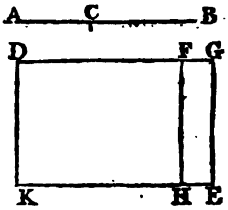
PROP.

[LXXVI.] PROP. LXXVI. THEOR.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solum commensurabilis existens toti, quæ cum totâ medium continet; et reliqua irrationalis est: vocetur autem mediæ apotome secunda.

A mediâ enim A B auferatur media B C, potentiâ solum commensurabilis existens toti A B, et cum eâ medium continens, videlicet quod continetur sub A B, B C: dico reliquam A C irrationalem esse.

Exponatur enim rationalis D K, et quadratis quidem ex A B, B C simul sumptis æquale parallelogrammum D E ad ipsam D K applicetur, latitudinem faciens D G; ei vero quod bis sub A B, B C continetur æquale parallelogrammum D H ad eandem D K applicetur, latitudinem faciens D F: reliquum igitur F E est æquale quadrato ex A C[m]. Et quoniam medium est compositum ex quadratis ex A B, B C[n]; (nempe cum quadrata illa media sint inter se commensurabilia) erit et parallelogrammum D E medium. Et ad rationalem D K applicatum est, latitudinem faciens D G: ergo D G est rationalis, sed ipsi D K longitudine incommensurabilis[o]. Rursus, quoniam medium est quod sub A B, B C continetur; erit et quod bis continetur sub A B, B C medium. Atqui est æquale parallelogrammo D H: ergo et D H est medium, et ad rationalem D K applicatum est, latitudinem faciens D F: rationalis igitur est D F, sed ipsi D K longitudine incommensurabilis. Et quoniam A B, B C potentiâ solum commensurabiles sunt; erit A B ipsi B C incommensurabilis longitudine: ergo quadratum ex A B incommensurabile est ei, quod sub A B, B C continetur[p]. Sed quadrato quidem ex A B commensurabile est compositum ex iis, quæ ex A B, B C fiunt, quadratis[q]; ei vero quod sub A B, B C continetur commensurabile est id quod bis continetur sub A B, B C[r]. Compositum igitur ex quadratis A B, B C incommensurabile est ei, quod bis sub A B, B C continetur. D E autem est æquale quadratis ex A B, B C simul sumptis; et parallelogrammum D H æquale est ei, quod bis continetur sub A B, B C[s]: ergo D E ipsi D H est



[m] 7. secundi
[n] 16. & Cor. Def. 12.[*] hujus.
[o] 23. hujus.
[p] 1. sexti, & 10. hujus.
[q] 16. hujus.
[r] 6. hujus.
[s] Per construct.

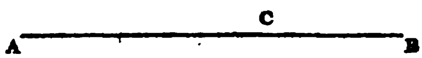
est incommensurabile. Sed ut D E ad D H, ita recta linea G D ad D F[t]: incommensurabilis igitur est G D [t] 1. sexti.
ipsi D F longitudine. Sed sunt ambæ rationales: quare G D, D F rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles. Ergo F G apotome est[u]. Et D K est rationalis. [u] 74. hujus.
Quod autem sub rationali et irrationali continetur rectangulum, irrationale est[x]; ideo et ipsum potens est [x] Cor.* 39. hujus.
irrationalis. Sed recta linea A C potest F E parallelogrammum: ergo A C est irrationalis: vocetur autem mediæ apotome secunda. *Q. E. D.*

PROP. LXXVII. THEOR. [LXXVII.]

Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, quæ cum totâ faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium; reliqua irrationalis est: vocetur autem minor.

A rectâ lineâ A B auferatur recta B C, potentiâ incommensurabilis existens toti, faciensque cum totâ A B compositum quidem ex ipsarum A B, B C quadratis rationale, quod autem bis sub A B, B C continetur medium: dico reliquam A C irrationalem esse.

Quoniam enim compositum quidem ex ipsarum A B, B C quadratis rationale est: quod autem bis sub A B,



B C continetur medium; erit compositum ex quadratis ipsarum A B, B C incommensurabile ei, quod bis continetur sub A B, B C. Ergo per conversionem, compositum ex quadratis ex A B, B C quadrato ex A C est incommensurabile[y]. Sed compositum ex quadratis ex A B, [y] 17. hujus.
B C rationale est[z]: irrationale igitur est quadratum ex [z] ex hyp.
A C; ideoque recta linea A C est irrationalis: vocetur autem minor. *Q. E. D.*

PROP.

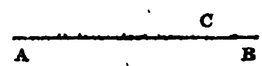
LXXVIII.]

PROP. LXXVIII. THEOR.

Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale; reliqua irrationalis eſt: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

A rectâ enim lineâ A B recta linea B C auferatur, incommenſurabilis exiſtens toti A B, facienſque compoſitum quidem ex ipſarum A B, B C quadratis medium; quod autem ſub A B, B C continetur, rationale: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Quoniam enim compoſitum ex ipſarum A B, B C quadratis medium eſt, quod autem bis continetur ſub A B, B C rationale; erit compoſitum ex ipſarum A B, B C quadratis incommenſurabile ei, quod bis ſub A B, B C continetur.



Et reliquum igitur quadratum ex A C incommenſurabile
a 17. hujus. eſt ei, quod bis continetur ſub A B, B C [a]. Atqui eſt quod bis continetur ſub A B, B C rationale: ergo quadratum ex A C irrationale eſt; et ob id recta linea A C irrationalis: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. *Q. E. D.*

[LXXIX.]

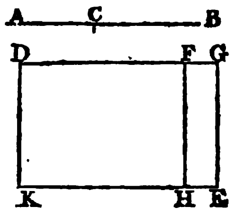
PROP. LXXIX. THEOR.

Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur medium, et adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile ei, quod continetur ſub ipſis; reliqua irrationalis eſt: vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

A rectâ enim lineâ A B recta linea B C auferatur, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti A B, facienſque compoſitum quidem ex ipſarum A B, B C quadratis medium, quod autem ſub A B, B C continetur medium; et adhuc quadrata ipſarum A B, B C incommenſurabilia rectangulo, quod continetur ſub A B, B C: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Exponatur enim rationalis D K, et compoſito quidem ex quadratis ex A B, B C æquale parallelogrammum D E ad ipſam

ipsam D K applicetur, latitudinem faciens D G; ei vero quod bis continetur sub A B, B C æquale auferatur D H, latitudinem faciens D F: ergo reliquum F E est æquale quadrato ex A C [b]; et ob id recta linea A C ipsum F E potest. Itaque quoniam compositum ex ipsarum A B, B C quadratis medium est, et parallelogrammo D E æquale; erit ipsum D E medium. Sed ad rationalem D K applicatum est, latitudinem faciens D G. Quare D G est rationalis, sed ipsi D K longitudine incommensurabilis [c]. Rursus, quoniam id quod bis sub A B, B C, continetur medium est, et æquale parallelogrammo D H, erit D H medium; et ad rationalem D K applicatum est, latitudinem faciens D F. Ergo D F est rationalis, ipsique D K incommensurabilis longitudine. Et quoniam compositum ex quadratis ex A B, B C incommensurabile est ei, quod bis sub A B, B C continetur; et parallelogrammum D E ipsi D H est incommensurabile. Ut autem D E ad D H, ita est recta linea D G ad ipsam D F [d]: incommensurabilis igitur est D G ipsi D F longitudine [e]. Et sunt ambæ rationales. Ergo D G, D F rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: apotome igitur est F G [f]. Sed F H est rationalis. Quod autem sub rationali et irrationali continetur rectangulum, irrationale est [g]; ipsumque potens est irrationalis. Irrationale igitur est rectangulum F E, et quæ potest ipsum A C est irrationalis. Vocetur autem cum medio medium totum efficiens. *Q. E. D.*



[b] 7. secundi.
[c] 23. hujus.
[d] 1. sexti.
[e] 10. hujus.
[f] 74. hujus.
[g] Cor. 39. hujus.

PROP. LXXX. THEOR. [LXXX.]

Apotomæ una tantum congruit† recta linea, potentiâ solum commensurabilis existens toti.

Sit apotome A B, congruens autem ipsi fit B C: ergo A C, C B rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles [h]. Dico ipsi A B alteram non congruere rationalem, quæ potentiâ solum sit commensurabilis toti ‡.

[h] 74. hujus.

† *Congruere* (προσαρμόζειν) *apotomæ Euclidi dicitur recta, quæ, in binomio per detractionem, nomen negativum constituit. Contra Totam appellat; quæ nomen positivum. Ut si ponatur* x — y = z. *Tota est* x, *Apotome* z, *Congruens* y.

‡ *Sensus est nullam aliam dari rationalem, quæ ipsi* A B *addita Totam efficiat ipsi rationali potentiâ solum commensurabilem, præter illam* B C.

Si

Si enim fieri poteſt, congruat B D: ergo A D, D B
h 74. hujus. rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles[h]. Et
quoniam quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt id



quod bis continetur ſub A D, D B, eo et quadrata ex A C, C B excedunt id quod bis ſub A C, C B continetur; (utraque enim excedunt eodem quadrato, nempe quod fit ex A B) et permutando, quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem et id, quod bis continetur ſub A D, D B, excedet id, quod bis ſub A C, C B continetur. Sed quadrata ex A D, D B
i ex hyp. excedunt quadrata ex A C, C B rationali[i]: utraque enim rectarum linearum D B, C B rationalis eſt; necnon utraque ipſarum A D, A C. Quod igitur bis continetur ſub A D, D B excedit id quod bis ſub A C, C B continetur rationali; quod fieri non poteſt; ambo enim media ſunt,
k 27. hujus. medium autem medium non ſuperat rationali[k]. Ergo rectæ lineæ A B altera non congruit rationalis, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

Igitur apotomæ una tantum congruit rationalis, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti. *Q. E. D.*

[LXXXI.]

PROP. LXXXI. THEOR.

Mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ rationale continens.

Sit enim mediæ apotome prima A B, et ipſi A B congruat B C: ergo A C, C B mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent, nempe quod
l 76. hujus. fit ſub A C, C B[l]. Dico ipſi A B alteram non congruere mediam, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti, et cum totâ rationale contineat.

Si enim fieri poteſt, congruat D B: ergo A D, D B mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles[l], quæ rationale continent, nempe quod fit ſub A D, D B. Et



quoniam quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt id, quod bis continetur ſub A D, D B, eodem et quadrata ex A C, C B excedunt quod bis ſub A C, C B continetur;
m 7. ſecundi. (excedunt enim eodem quadrato ex A B[m];) et permutando,

tando, quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem et quod bis continetur ſub A D, D B excedit id, quod bis ſub A C, C B continetur. Sed quod bis continetur ſub A D, D B excedit id, quod bis ſub A C, C B continetur rationali; ambo enim rationalia ſunt. Ergo et quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B rationali, quod fieri non poteſt; ambo enim ſunt media [n], medium autem medium non ſuperat rationali [o]. [n] ex hyp. [o] 27. hujus.

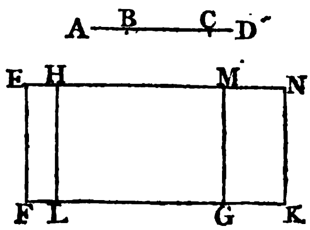
Quare mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentiâ ſolum toti ſit commenſurabilis, et cum totâ rationale contineat. *Q. E. D.*

PROP. LXXXII. THEOR. [LXXXII.]

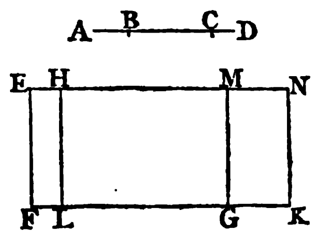
Mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ medium continens.

Sit mediæ apotome ſecunda A B, et ipſi A B congruat B C: ergo A C, C B mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, mediumque continentes ſub A C, C B [p]. Dico ipſi A B alteram non congruere mediam, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti, et cum totâ medium contineat. [p] 76. hujus.

Si enim fieri poteſt, congruat B D. Quare A D, D B mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium ſub A D, D B continent [p]. Exponatur rationalis E F, quadratiſque ex A C, C B æquale parallelogrammum E G ad ipſam E F applicetur, latitudinem faciens E M; et ei quod bis continetur ſub A C, C B æquale auferatur parallelogrammum H G, latitudinem faciens H M: reliquum igitur E L eſt æquale ei quod fit ex A B quadrato [r]. Ergo A B ipſum E L poteſt. Rurſus, quadratis ex A D, D B æquale parallelogrammum E K ad ipſam E F applicetur, latitudinem faciens E N; eſt autem et E L æquale quadrato ex A B: reliquum igitur H K eſt æquale ei quod bis ſub A D, D B continetur [r]. Et quoniam mediæ ſunt A C, C B, potentiâ commenſurabiles; erunt et quadrata ex A C, C B media [s], inter ſe commenſurabilia. Quare et compoſitum ex [r] 7. ſecundi. [s] Def. 12. hujus.



quadratis A C, C B (utrique scilicet eorum commensu-
[q] 16. hujus. rabile[q]) medium erit[r]. Com-
[r] Cor. Def. 12.[s] hujus. posito autem ex quadratis A C, C B æquale est parallelogrammum E G. Quare E G est medium, et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens E M: ergo E M est rationalis, sed ipsi
[s] 23. hujus. E F longitudine incommensurabilis[s]. Rursus, quoniam medium est quod continetur sub A C, C B; et quod bis sub A C, C B continetur medium erit[r]. Atque est æquale parallelogrammo H G: ergo et H G est medium, et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens H M: rationalis igitur H M, sed ipsi E F incommensurabilis lon-
[t] ex hyp. gitudine[s]. Et quoniam A C, C B potentiâ solum sunt commensurabiles[t]; erit A C incommensurabilis ipsi C B
[u] 1. sexti. longitudine. Ut autem A C ad C B, ita quadratum ex A C ad id quod continetur sub A C, C B[u]: incommensurabile igitur est et quadratum ex A C ei, quod sub A C, C B continetur. Sed quadrato quidem ex A C commensurabilia sunt quadrata ex A C, C B simul sumpta; ei vero,
[x] 16. hujus. quod continetur sub A C, C B, commensurabile est quod bis sub A C, C B continetur[x]: ergo quadrata ex A C, C B simul sumpta incommensurabilia sunt ei, quod bis sub A C, C B continetur. Atqui quadratis ex A C, C B simul
[y] Per construct. sumptis æquale est parallelogrammum E G; ei vero, quod bis sub A C, C B continetur, æquale ipsum H G[y]: ergo E G ipsi H G est incommensurabile. Sed ut E G ad H G, ita est recta linea E M ad ipsam H M[u]. Quare E M ipsi H M est incommensurabilis longitudine. Et sunt ambæ rationales. Ergo E M, H M rationales sunt,
[z] 74. hujus. potentiâ solum commensurabiles; ac propterea apotome est E H, et ipsi congruens H M[z]. Similiter demonstrabimus et H N ipsi congruere: apotomæ igitur
[a] 80. hujus. alia atque alia congruit recta linea, potentiâ solum commensurabilis existens toti; quod fieri non potest[a].



Ergo mediæ apotomæ secundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentiâ solum sit commensurabilis toti, et cum totâ medium contineat. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. LXXXIII. THEOR. [LXXXIII.]

Minori una tantum congruit recta linea, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium.

Sit minor A B, et ipſi A B congruat B C: ergo A C, C B potentiâ ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium [c]. Dico ipſi A B [c] 77. hujus.
alteram non congruere rectam lineam, quæ eadem faciat.

Si enim fieri poteſt, congruat B D: ergo A D, D B potentiâ ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem



ſub ipſis continetur medium [c]. Et quoniam quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem et quod bis continetur ſub A D, D B excedit id, quod bis ſub A C, C B continetur [d]: quadrata autem ex [d] 7. ſecundi.
A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B rationali; ambo enim rationalia ſunt [e]: igitur et quod bis continetur [e] ex hyp.
ſub A D, D B id quod bis ſub A C, C B continetur rationali excedet; quod fieri non poteſt [f]; etenim ambo [f] 27. hujus.
ſunt media [g], nimirum cum mediorum ex hypotheſi ſint [g] Cor. Def.
dupla. 12.* hujus.

Ergo minori una tantum congruit recta linea, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod vero ſub ipſis continetur medium. *Q. E. D.*

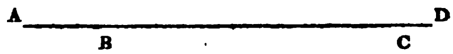
PROP. LXXXIV. THEOR. [LXXXIV.]

Ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti et cum totâ faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale.

Sit cum rationali medium totum faciens A B, congruens autem ipſi B C: ergo A C, C B potentiâ ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A C, C B quadratis medium, quod autem ſub

[h] 78. hujus. ipsis continetur rationale [h]. Dico ipsi A B alteram non congruere, eadem facientem.

Si enim fieri potest, congruat B D: ergo A D, D B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum A D, D B quadratis medium, quod



autem sub ipsis continetur rationale [h]. Quoniam igitur quo excessu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem quod bis continetur sub A D,
[i] 7. secundi. D B excedit id, quod bis sub A C, C B continetur [i]; quod autem bis continetur sub A D, D B excedit id quod bis sub A C, C B continetur rationali, etenim ambo rationalia sunt, utpote ex hypothesi rationalium dupla: igitur et quadrata ex A D, D B rationali excedent qua-
[k] 27. hujus. drata ex A C, C B; quod fieri non potest [k]; cum ambo sint media. Non igitur ipsi A B altera congruit, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale. Quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, una tantum congruet recta linea. *Q. E. D.*

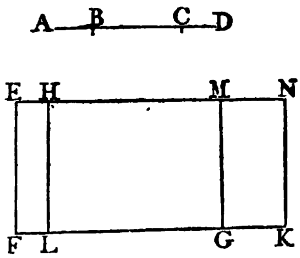
[LXXXV.] PROP. LXXXV. THEOR.

Ei quæ cum medio medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

Sit cum medio medium totum faciens A B, ipsi vero congruens B C; ergo A C, C B potentiâ sunt incom-
[l] 79. hujus. mensurabiles [l], facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis A C, C B, continetur medium; et adhuc compositum ex quadratis ipsarum A C, C B incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis A C, C B. Dico ipsi A B alteram non congruere, potentiâ incommensurabilem toti, et cum totâ facientem ea, quæ proposita sunt.

Si enim fieri potest, congruat B D; ita ut A D, D B potentiâ incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum A D, D B quadratis medium; quod autem sub ipsis A D, D B continetur medium; et adhuc

huc compositum ex quadratis ipsarum A D, D B incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis A D, D B.



Exponatur rationalis E F; et quadratis ipsarum A C, C B æquale parallelogrammum E G ad ipsam E F applicetur, latitudinem faciens E M; ei vero quod bis continetur sub A C, C B æquale parallelogrammum auferatur H G, latitudinem faciens H M: reliquum igitur quadratum ex A B est æquale parallelogrammo E L[m]. Ergo A B ipsum E L potest. Rursus, [m] 7. secundi.
quadratis ex A D, D B æquale parallelogrammum E K ad ipsam E F applicetur, latitudinem faciens E N. Est autem et quadratum ex A B æquale parallelogrammo E L: ergo reliquum quod bis sub A D, D B continetur ipsi H K est æquale[m]. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum A C, C B medium est[n], et æquale [n] ex hyp.
parallelogrammo E G[o]; erit et E G medium. Et ad [o] Per construct.
rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens E M; quare E M est rationalis, sed ipsi E F longitudine incommensurabilis[p]. Rursus, quoniam quod bis sub [p] 23. hujus.
A C, C B continetur est medium, (medii utique duplum) et æquale ipsi H G; erit et H G medium; et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens H M: rationalis igitur est H M, sed ipsi E F incommensurabilis longitudine[p]. Et quoniam compositum ex quadratis ex A C, C B incommensurabile est ei, quod bis sub A C, C B continetur; erit et E G incommensurabile ipsi H G; ideoque recta linea E M rectæ M H longitudine est incommensurabilis[q]. Et sunt ambæ rationales. Cum [q] 1. sexti, &
igitur E M, M H rationales sint, potentiâ solum com- 10. hujus.
mensurabiles; recta linea E H apotome est, et ipsi congruens H M[r]. Similiter demonstrabimus E H rursus [r] 74. hujus.
apotomen esse, ipsique congruentem H N: ergo apotomæ alia atque alia congruit rationalis, potentiâ solum commensurabilis existens toti; quod fieri non posse ostensum est[s]. Non igitur ipsi A B altera congruet recta [s] 80. hujus.
linea. Ipsi igitur A B una tantum congruet, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium,

quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis. *Q. E. D.*

DEFINITIONES TERTIÆ.

Definitio I.

Expositâ rationali et apotomâ, si quidem tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; sitque tota expositæ rationali longitudine commensurabilis: vocetur apotome prima.

II.

Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, et tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; vocetur apotome secunda.

III.

Quod si neutra sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, et tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

IV.

Rursus si tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, si quidem tota sit longitudine commensurabilis expositæ rationali; vocetur apotome quarta.

V.

Si vero congruens, vocetur apotome quinta.

VI.

Quod si neutra, dicatur apotome sexta.

SCHOLION.*

Manifestum est, geminas esse Binomiorum per detractionem series (ἑξάδα utramque) priorum, formâ algebraicâ, signo tantum dissimiles.

Recensio

Recensio Algebraica utriusque Ἑξάδος *per detractionem.*

Series Prima.

I. Apotome; $a - \sqrt{\frac{m}{n}}\, b$. Vel etiam $\sqrt{\frac{m}{n}}\, a - \sqrt{\frac{p}{q}}\, b$.

II. Mediæ apotome prima; $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a - \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{4}} a$.

III. Mediæ apotome secunda; $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a$.

IV. Minor; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a \times \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}\right)$.

V. Cum rationali medium totum efficiens;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{\frac{1}{4}} a \times \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}\right).$$

VI. Cum medio medium totum efficiens;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a \times \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}\right).$$

Series Secunda.

I. Apotome prima; $a - \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a$.

II. Apotome secunda; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu-\mu}}\, a - a$.

III. Apotome tertia; $\sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a - \sqrt{\frac{\pi-\sigma}{\pi}}\, a$.

IV. Apotome quarta; $a - \sqrt{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\, a$.

V. Apotome quinta; $\sqrt{\frac{\nu+\mu}{\nu}}\, a - a$.

VI. Apotome sexta; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\, a - \sqrt{\frac{\pi}{\pi+\sigma}}\, a$.

Series autem secunda oritur ex divisione irrationalis ejus quæ prima est Seriei primæ in species, quas com-

plexa eſt, diverſas. Quod de Serie ſecundâ earum quæ per compoſitionem ſimiliter monendum erat.

Neque illud diſſimulandum: tertiam et ſextam ſecundæ utriuſque ſeriei Algebraice aliâ formâ, et elegantiori, repræſentari poſſe.

Nimirum, Seriei ſecundæ earum quæ per compoſitionem

III[a], quæ tertia eſt ex binis nominibus, hiſce notis ſignificabitur; $\sqrt{\frac{\nu}{m}}\, a + \sqrt{\frac{\nu-\mu}{m}}\, a.$

Hiſce, autem ejuſdem Seriei

VI[a], quæ ſexta eſt ex binis nominibus

$\sqrt{\frac{\nu+\mu}{m}}\, a + \sqrt{\frac{\nu}{m}}\, a.$

Seriei item ſecundæ earum, quæ per detractionem, hiſce notis

III[a], quæ tertia eſt apotome; $\sqrt{\frac{\nu}{m}}\, a - \sqrt{\frac{\nu-\mu}{m}}\, a.$

Hiſce denique

VI[a], quæ ſexta eſt apotome; $\sqrt{\frac{\nu+\mu}{m}}\, a - \sqrt{\frac{\nu}{m}}\, a.$

Literâ ſcilicet m numerum aliquem non quadratum deſignante, qui neque ad quadratum ν, neque ad quadratorum ν, μ differentiam $\nu - \mu$, vel ſummam $\nu + \mu$, numeri quadrati ad quadratum numerum rationem habeat.

[LXXXVI.]

PROP. LXXXVI. PROBL.

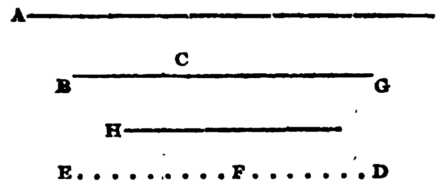
Invenire primam apotomen.

Exponatur rationalis A; et ipſi A longitudine commenſurabilis ſit B G: ergo et B G eſt rationalis. Et exponantur duo quadrati numeri E D, E F, quorum exceſſus D F non ſit quadratus [t]: neque igitur E D ad D F rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Et fiat ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C.

[t] Cor. Lem. 4. hujus.

Commen-

Commenſurabile igitur eſt quadratum ex B G quadrato ex G C [t]. Rationale autem eſt quadratum ex B G; ergo [u] et quadratum ex G C eſt rationale: ideoque recta linea [u] 6. hujus.



G C rationalis eſt. Et quoniam E D ad D F rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex G C rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt B G ipſi G C longitudine [x]. Et ſunt ambæ rationales. Ergo B G, G C rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id B C apotome eſt [y]. Dico et primam eſſe. Sit enim quadratum ex H id, quo quadratum ex B G excedit quadratum ex G C. Et quoniam eſt ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C; erit per converſionem ut D E ad E F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex H [z]. Sed D E ad E F rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; uterque enim quadratus eſt [a]: ergo et quadratum ex B G ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Commenſurabilis igitur eſt B G ipſi H longitudine [x]. Et B G plus poteſt quam G C quadrato ex H. Ergo B G plus poterit quam G C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Atqui eſt tota B G expoſitæ rationali A commenſurabilis longitudine. Ergo B G eſt apotome prima [c].

[x] 9. hujus.
[y] 74. hujus.
[z] Cor. 19. quinti.
[a] Per conſtruct.
[c] Def. Tert. 1. hujus.

Inventa igitur eſt prima apotome. *Q. E. F.*

PROP. LXXXVII. PROBL. [LXXXVII.]

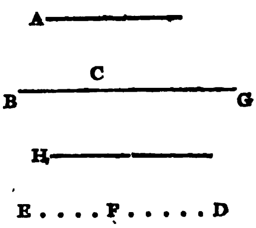
Invenire ſecundam apotomen.

Exponatur rationalis A; et ipſi A longitudine commenſurabilis ſit C G: ergo C G eſt rationalis. Et exponantur duo numeri quadrati D E, E F [d], quorum exceſſus

[d] Cor. Lem. 4. hujus.

ceſſus D F non ſit quadratus. Fiatque ut F D ad D E, ita quadratum ex C G ad quadratum ex G B.

Commenſurabile igitur eſt quadratum ex C G quadrato ex G B [e]. Sed quadratum ex C G eſt rationale: ergo et rationale eſt quadratum ex G B; ac propterea ipſa G B eſt rationalis. Et quoniam quadratum ex C G ad quadratum ex G B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; erit C G ipſi G B incommenſurabilis longitudine [f].



e 6. hujus.
f 9. hujus.

Et ambæ ſunt rationales. Ergo C G, G B rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id B C eſt apotome [g]. Dico et ſecundam eſſe. Sit enim quadratum ex H illud, quo quadratum ex B G excedit quadratum ex G C. Quoniam igitur eſt ut quadratum ex B G ad quadratum ex G C, ita E D numerus ad numerum D F; erit per converſionem rationis ut quadratum ex B G ad quadratum ex H, ita D E ad E F. Atque eſt uterque ipſorum D E, E F quadratus [h]: quadratum igitur ex B G ad quadratum ex H rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque B G ipſi H longitudine eſt commenſurabilis [f]. Et plus poteſt B G quam G C quadrato ex H [h]. Ergo B G plus poteſt quam G C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Atqui eſt congruens C G expoſitæ rationali A commenſurabilis longitudine. Ergo B C eſt apotome ſecunda [i].

g 74. hujus.
h Per conſtruct.
i Def. Tert. 2. hujus.

Inventa igitur eſt ſecunda apotome B C. *Q. E. F.*

[LXXXVIII.]

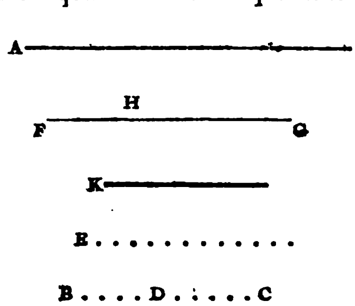
PROP. LXXXVIII. PROBL.

Invenire tertiam apotomen.

Exponantur duo numeri quadrati B C, B D, qui ipſo C D, non quadrato, differant. Exponatur alius non quadratus E, qui neque ad ipſum C D rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Denique exponatur rationalis quædam recta linea A; et fiat ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H.

Commen-

Commensurabile igitur est quadratum ex A quadrato ex F G [l]. Atqui est quadratum ex A rationale: ergo et rationale est quadratum ex F G; ac propterea recta linea F G est rationalis. Et quoniam E ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex F G rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est A ipsi F G longitudine [m]. Rursus, quoniam est ut B C ad C D, ita [m] quadratum ex F G ad quadratum ex G H; erit quadratum ex F G quadrato ex G H commensurabile [l]. Rationale autem est quadratum ex F G; ergo et quadratum ex G H est rationale; et ob id recta linea G H rationalis. Quod cum B C ad C D rationem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est F G ipsi G H longitudine [m]. Et sunt ambæ rationales. Ergo F G, G H rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: ac propterea apotome est F H [n]. Dico et tertiam esse. Quoniam enim est ut E quidem ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: erit ex æquo ut E ad C D, ita quadratum ex A ad quadratum ex G H [o]. Sed E ad C D rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum [p]; neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo A ipsi G H longitudine est incommensurabilis [m]. Neutra igitur ipsarum F G, G H expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. Quo autem recta F G plus potest quam G H, sit illud quod ex K fit quadratum. Quoniam igitur ut B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H [p]; erit per conversionem rationis ut C B ad B D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K [q].



l 6. hujus.

m 9. hujus.

n 74. hujus.

o 22. quinti.

p Per constructionem.

q Cor. 19. quinti.

Sed

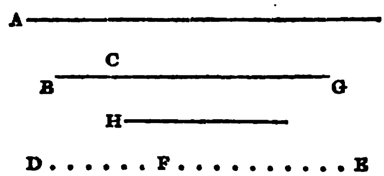
Sed numeri C B, B D sunt quadrati. Ergo quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Com-
[r] 9. hujus. mensurabilis igitur est F G ipsi K longitudine [r]. Et plus potest F G quam G H quadrato ex K. Ergo F G plus potest quam G H quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Et neutra ipsarum F G, G H longitudine commensurabilis est expositæ rationali A.
[s] Def. Quare F H est apotome tertia [s].
Tert. 3. hujus. Inventa igitur est tertia apotome F H. *Q. E. F.*

[LXXXIX.]

PROP. LXXXIX. PROBL.

Invenire quartam apotomen.

Exponatur rationalis A; et ipsi A longitudine commensurabilis sit B G: ergo B G est rationalis. Exponantur præterea duo numeri D F, F E; ita ut totus D E ad



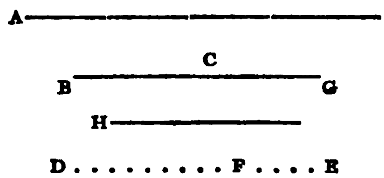
neutrum ipsorum D F, E F rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: et fiat ut D E ad E F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C.
Commensurabile igitur est quadratum ex B G qua-
[t] 6. hujus. drato ex G C [t]. Est autem quadratum ex B G rationale. Quare et rationale est quadratum ex G C; ideoque recta linea G C est rationalis. Et quoniam D E ad E F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex G C rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est B G
[u] 9. hujus. ipsi G C longitudine [u]. Et sunt ambæ rationales. Ergo B G, G C rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles;
[x] 74. hujus. et ob id B C est apotome [x]. Dico et quartam esse. Quo enim plus potest B G quam G C, sit illud quadratum ex H. Et quoniam est ut D E ad E F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C; erit per conversionem rationis ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad quadratum

tum ex H. Sed E D ad D F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex B G ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum[y]. Incommensurabilis igitur est B G ipsi H longitudine[u]. Et plus potest B G quam G C quadrato ex H[y]. [y] ex hyp.
Ergo B G plus potest quam G C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Atqui est tota B G longitudine commensurabilis expositæ rationali A. Ergo B C est apotome quarta[z]. [z] Def.
Inventa igitur est quarta apotome B C. *Q. E. F.* Tert. 4. hujus.

PROP. XC. PROBL. [XC.]

Invenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis A; et ipsi A longitudine commensurabilis sit C G: ergo C G est rationalis. Et exponantur duo numeri D F, F E; ita ut D E ad utrumque



ipsorum D F, F E rationem rursus non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: fiatque ut F E ad E D, ita quadratum ex C G ad quadratum ex G B.

Ergo quadratum ex C G commensurabile est quadrato ex G B[a]. Est autem quadratum ex C G rationale: ergo [a] 6. hujus.
et rationale est quadratum ex G B; et idcirco recta linea G B est rationalis. Et quoniam ut D E ad E F, ita est quadratum ex B G ad quadratum ex G C; et D E ad E F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex G C rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est B G ipsi G C longitudine[b]. Et sunt ambæ [b] 9. hujus.
rationales. Ergo B G, G C rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id B C est apotome[c]. Dico et [c] 74. hujus.
quintam esse. Quo enim majus est quadratum ex B G quam quadratum ex G C, sit illud quadratum ex H.

Quoniam

Quoniam igitur quadratum ex B G ad quadratum ex G C eſt ut D E ad E F; erit per converſionem rationis ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad id quod fit ex H quadratum. Sed E D ad D F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex B G ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ideoque recta linea B G ipſi H longitudine eſt incommenſurabilis [b]. Et plus poteſt B G quam G C quadrato ex H. Ergo B G plus poteſt quam G C quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Atqui eſt congruens C G expoſitæ rationali A longitudine commenſurabilis [c]. Quare B C eſt apotome quinta [d].

[b] 9. hujus. [c] Per conſtruct. [d] Def. Tert. 5. hujus.

Inventa igitur eſt quinta apotome B C. *Q. E. F.*

[XCI.]

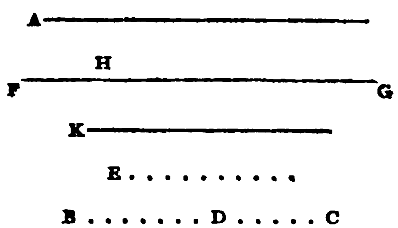
PROP. XCI. PROBL.

Invenire ſextam apotomen.

Exponantur duo numeri B D, D C tales, ut compoſitus ex ipſis, B C, ad neutrum ipſorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Exponatur etiam numerus alius E, qui ad neutrum ipſorum B C, C D rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Denique exponatur recta linea rationalis A; et fiat ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H.

Quoniam igitur eſt ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; erit quadratum ex A quadrato ex F G commenſurabile [e]. Rationale autem eſt quadratum

[e] 6. hujus.



ex A: ergo et quadratum ex F G rationale erit; et ob id recta linea F G rationalis. Et quoniam E ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum [f]; neque quadratum ex A ad quadratum

[f] Per conſtruct.

dratum ex F G rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est A ipsi F G longitudine [g]. Rursus, quoniam est ut [c] B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H; erit quadratum ex F G commensurabile quadrato ex G H [h]. Est autem quadratum ex F G rationale; rationale [b] igitur est et quadratum ex G H; et ipsa G H rationalis. Quod cum B C ad C D rationem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo F G ipsi G H longitudine est incommensurabilis [g]. Et sunt ambæ rationales. Quare F G, G H rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; quapropter apotome est F H [i]. Dico et sextam esse. Quoniam enim est ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: erit ex æquo ut E ad C D, ita quadratum ex A ad quadratum ex G H. Sed E ad C D rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo A ipsi G H longitudine est incommensurabilis [g]. Quare neutra ipsarum F G, G H expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. Quo plus potest recta F G quam G H, sit illud quadratum ex K. Et quoniam est ut B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H; erit per conversionem rationis ut C B ad B D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K [k]. At C B ad B D rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo incommensurabilis est F G ipsi K longitudine [l]. Et F G plus potest quam G H quadrato ex K. Plus igitur potest F G quam G H quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et neutra ipsarum F G, G H est longitudine commensurabilis expositæ rationali A. Ergo F H est apotome sexta [m].

Inventa est igitur sexta apotome F H. *Q. E. F.*

[c] 9. hujus.
[h] 6. hujus.
[i] 74. hujus.
[k] Cor. 19. quinti.
[l] 9. hujus.
[m] Def. Tert. 6. hujus.

SCHOLION.

* SCHOLION.

Submonendum videtur in Tyronum gratiam, quod tamen ex Definitionum collatione, tertiarum cum secundis, facile quivis colliget; binomiorum nomina singula, ex quibus constant, eodem modo inter se habere, sive per compositionem sive per detractionem sint binomia, modo ejusdem sint ordinis in propriâ cujusque Serie. Nimirum, Majoris quæ vocatur nomina eodem modo inter se habent, ac nomina Minoris. Cum Major quarta sit in Serie primâ irrationalium binominum per compositionem, Minor itidem Seriei secundæ earum quæ per detractionem quarta. Similiter secundæ earum quæ ex binis nominibus eodem modo inter se habent nomina, quo nomina secundæ apotomes. Cum secunda ex binis nominibus secundæ Seriei earum quæ per compositionem sit secunda; secunda autem apotome, Seriei secundæ earum quæ per detractionem secunda.

Hinc autem efficitur eam esse rectarum quæ ex binis nominibus, et earum quæ apotomæ dicuntur, inter se cognationem; ut si duarum irrationalium altera sit ex binis nominibus, altera ejusdem ordinis apotome, si majus nomen ejus quæ ex binis nominibus Tota sit apotomes; minus nomen prioris apotomes Congruens erit. E contrario, si minus nomen sit Congruens, majus Tota erit.

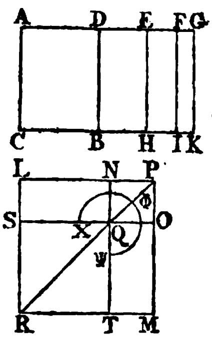
Neque tamen idcirco verum est, quod in Scholio imperiti nescio cujus hominis in libris antehac editis ferebatur, expeditius inveniendas esse sex apotomas, inveniendo eas quæ ex binis sunt nominibus, quam quâ ratione Euclides docuit; cum neque expeditior, neque facilior, neque alia est omnino, sed eadem plane illas quæ ex binis nominibus, quæ apotomas ipsas inveniendi ratio. Quod cuivis planum et apertum erit, qui problemata sex, quæ Definitiones Secundas subsecuta sunt, cum sex quæ tertias, ordine contulerit. Barrovius sane, nimio brevitatis studio, apotomῶν constructiones omisit, utpote ex binominum prius traditis facillime colligendas. Sed de viâ ad apotomas per binomines expeditiori sapientissimo Geometræ tacere placuit.

PROP.

PROP. XCII. THEOR. [XCII.]

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ primâ, recta linea spatium potens apotome est.

Contineatur enim spatium A B sub rationali A C, et apotomâ primâ A D: dico rectam lineam, quæ potest spatium A B, apotomen esse.

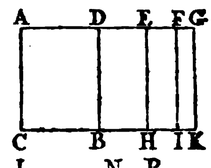


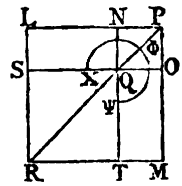
Quoniam enim A D prima apotome est, fit ipsi congruens D G: ergo A G, G D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles[r]. Et tota A G longitudine commensurabilis est expositæ rationali A C; et præterea A G plus potest quam G D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Si igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex D G, æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet[s]. Secetur D G bifariam in E; et quadrato ex E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub A F, F G. Commensurabilis igitur est A F ipsi F G longitudine. Et per E, F, G puncta ipsi A C parallelæ ducantur E H, F I, G K. Et quoniam A F ipsi F G longitudine est commensurabilis; erit et A G utrique ipsarum A F, F G commensurabilis longitudine[t]. Sed A G commensurabilis est ipsi A C: utraque igitur A F, F G ipsi A C longitudine est commensurabilis[u]. Atqui est A C rationalis: ergo et rationalis utraque A F, F G; ac propterea utrumque parallelogrammorum A I, F K est rationale[x]. Cæterum D G utrique D E, E G commensurabilis est longitudine nimirum cum utriusque sit dupla. Estque rationalis D G, sed ipsi A C longitudine incommensurabilis: ergo et utraque D E, E G rationalis est, et incommensurabilis ipsi A C longitudine; et ob id utrumque parallelogrammorum D H, E K medium est[y]. Ponatur ipsi quidem A I parallelogrammo æquale quadratum L M[z]: parallelogrammo autem F K æquale quadratum auferatur, communem[*] cum ipso angulum L P M habens, scilicet N O: ergo quadrata L M, N O circa eandem sunt diametrum[a]. Sit ipsorum diameter P R; et figura describatur. Itaque

r Def. Tert. 1. hujus.
s 18. hujus.
t 16. hujus.
u 12. hujus.
x 20. hujus.
y 22. & Cor.
z Def. 2. hujus.
* 14. secundi.
a 26. sexti.

B b quoniam

quoniam rectangulum sub A F, F G est æquale quadrato ex E G, erit ut A F ad E G, ita E G ad F G [b]. Sed ut A F ad E G, ita est parallelogrammum A I ad ipsum E K; et ut E G ad F G, ita parallelogrammum E K ad ipsum F K [c]. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale est E K. Est autem et inter quadrata L M, N O medium proportionale M N, ut superius ostensum est [d]; parallelogrammumque A I est æquale quadrato L M, et parallelogrammum F K quadrato N O æquale [e]. Ergo et parallelogrammum M N est æquale ipsi E K. Sed parallelogrammum quidem E K est æquale parallelogrammo D H [f]; parallelogrammum vero M N ipsi L O [g]. Parallelogrammum igitur D K est æquale gnomoni Ψ Φ X, et quadrato N O. Est autem et parallelogrammum A K quadratis L M, N O æquale [e]: ergo et reliquum A B est æquale quadrato S T. At quadratum S T est id, quod fit ex L N: quadratum igitur ex L N est æquale parallelogrammo A B; ideoque recta linea L N ipsum A B potest. Dico L N apotomen esse. Quoniam enim rationale est utrumque parallelogrammorum A I, F K, et sunt æqualia quadratis L M, N O; erit et utrumque L M, N O rationale, hoc est, utrumque ipsorum, quæ fiunt ex L P, P N; et utraque igitur L P, P N rationalis est. Rursus, quoniam parallelogrammum D H est medium, atque est æquale ipsi L O; erit et L O medium. Cum igitur L O quidem medium sit, N O vero rationale; incommensurabile est L O ipsi N O; utque L O ad N O, ita est recta linea L P ad P N [h]. Ergo L P ipsi P N longitudine est incommensurabilis [i]. Et sunt ambæ rationales. Quare L P, P N rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: idcirco L N est apotome [k]. Et potest spatium A B. Quæ igitur potest spatium A B, est apotome.





Ergo si spatium contineatur sub rationali et apotomâ primâ, recta linea spatium potens apotome est. *Q. E. D.*

[b] 17. sexti.
[c] 1. sexti.
[d] Lemma 7. hujus.
[e] Per construct.
[f] 36. primi.
[g] 43. primi.
[h] 1. sexti.
[i] 10. hujus.
[k] 74. hujus.

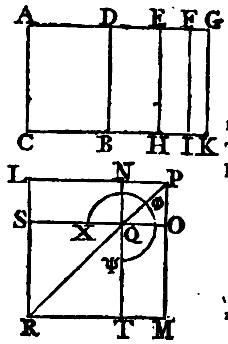
PROP.

PROP. XCIII. THEOR. [XCIII.]

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ secundâ, recta linea spatium potens mediæ est apotome prima.

Spatium enim A B contineatur sub rationali A C, et apotomâ secundâ A D: dico rectam lineam, quæ spatium A B potest, esse mediæ apotomen primam.

Sit enim ipsi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et congruens D G commensurabilis est expositæ rationali A C; totaque A G plus potest quam G D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[l]. Quoniam igitur A G plus potest quam G D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; si quartæ parti quadrati ipsius G D æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet[m]. Itaque secetur D G bifariam in E; et quadrato ipsius E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub A F, F G. Ergo commensurabilis est A F ipsi F G longitudine. Et per puncta E, F, G ipsi A C parallelæ ducantur E H, F I, G K. Quoniam igitur A F ipsi F G longitudine est commensurabilis; erit A G utrique ipsarum A F, F G commensurabilis longitudine[n]. Rationalis autem est A G, sed ipsi A C longitudine incommensurabilis: ergo et utraque A F, F G est rationalis, ipsique A C incommensurabilis longitudine; et ob id utrumque parallelogrammorum A I, F K medium est[o]. Rursus, quoniam D E commensurabilis est ipsi E G; erit et D G utrique D E, E G commensurabilis. Sed D G commensurabilis est ipsi A C longitudine. Ergo et utraque D E, E G rationalis est, et ipsi A C longitudine commensurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum D H, E K est rationale[p]. Constituatur igitur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum L M[q]; parallelogrammo autem F K æquale quadratum auferatur N O, communem cum ipso L M angulum L P M habens:



[l] Def. Tert. 2. hujus.

[m] 18. hujus.

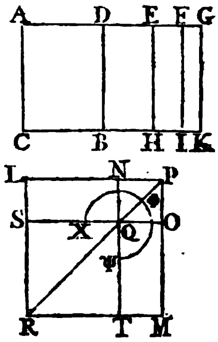
[n] 16. hujus.

[o] 22. hujus.

[p] 20. hujus.

[q] 14. secundi.

q 26. sexti. ergo circa eandem diametrum sunt quadrata L M, N O[q]. Sit ipsorum diameter P R; et figura describatur. Cum igitur parallelogramma A I, F K media sint, et sibi ipsis commensurabilia, et æqualia quadratis ex L P, P N; erunt et quadrata ex L P, P N media: ergo rectæ lineæ L P, P N mediæ sunt, potentiâ commensurabiles. Et quoniam rectangulum sub A F, F G est æquale quadrato ex E G; erit ut A F ad E G, ita E G



r 17. sexti. ad G F[r]. Sed ut A F ad E G, ita est parallelogrammum A I ad ipsum

s 1. sexti. E K[s]; ut autem E G ad G F, ita parallelogrammum E K ad F K. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale est E K. Est autem et inter qua-

t Lemma 7. hujus. drata L M, N O medium proportionale M N[t]; et paral-

u Per construct. lelogrammum A I quidem est æquale quadrato L M[u]; parallelogrammum vero F K æquale quadrato N O. Ergo

x 36. primi. M N ipsi E K est æquale. Sed D H est æquale ipsi E K[x],

y 43. primi. et L O ipsi M N[y]. Totum igitur D K gnomoni Ψ Φ X, et quadrato N O æquale erit. Itaque quoniam totum A K æquale est quadratis L M, N O, et D K æquale gnomoni Ψ Φ X et quadrato N O; erit reliquum A B æquale S T, hoc est, ei, quod fit ex L N. Quadratum igitur ex L N est æquale spatio A B; ideoque recta linea L N spatium A B potest. Dico L N mediæ apotomen esse primam. Quoniam enim rationale est E K, et æquale ipsi M N, hoc est, ipsi L O; erit et L O rationale, illud sc. quod sub L P, P N continetur. Medium autem ostensum est N O. Quare L O est incommensurabile ipsi N O;

z 1. sexti. et ut L O ad N O, ita L P ad P N[z]: ergo L P, P N longitudine sunt incommensurabiles. Ac propterea L P, P N mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ ratio-

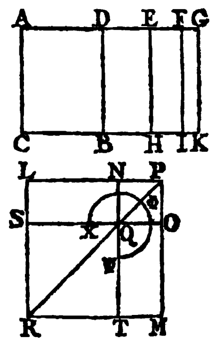
a 75. hujus. nale continent. Quare L N est mediæ apotome prima[a]; et potest spatium A B. Recta igitur linea, spatium A B potens, est mediæ apotome prima. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XCIV. THEOR. [XCIV.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ tertiâ, recta linea ſpatium potens mediæ eſt apotome ſecunda.

Spatium enim A B contineatur ſub rationali A C, et apotomâ tertiâ A D: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A B, mediæ eſſe apotomen ſecundam.



Sit enim ipſi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et neutra ipſarum A G, G D longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A C; tota autem A G plus poteſt quam congruens D G quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine [b]. Quoniam ideo recta A G plus poteſt quam D G quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: ſi quartæ parti quadrati ipſius D G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes commenſurabiles ipſam dividet [c]. Itaque ſecetur D G bifariam in E; et quadrato ipſius E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, ſitque quod continetur ſub A F, F G; et per puncta E, F, G ipſi A C parallelæ ducantur E H, F I, G K. Ergo A F, F G commenſurabiles ſunt; atque ob id parallelogrammum A I parallelogrammo F K eſt commenſurabile. Et quoniam A F, F G commenſurabiles ſunt longitudine; erit et A G utrique ipſarum A F, F G longitudine commenſurabilis [d]. Eſt autem rationalis A G, ſed ipſi A C incommenſurabilis longitudine; et utraque igitur A F, F G rationalis eſt, et ipſi A C longitudine incommenſurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum A I, F K eſt medium [e]. Rurſus quoniam D E commenſurabilis eſt ipſi E G longitudine; erit et D G utrique D E, E G commenſurabilis. Sed D G rationalis eſt, et ipſi A C incommenſurabilis longitudine: rationalis igitur eſt et utraque D E, E G, et ipſi A C longitudine incommenſurabilis. Ergo utrumque parallelogrammorum D H, E K medium eſt [e]. Quod cum A G, G D potentiâ ſolum commenſurabiles ſint; A G ipſi G D longitudine erit incommenſurabilis. Sed A G commenſurabilis

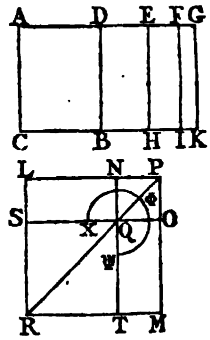
[b] Def. Tert. 3. hujus.

[c] 18. hujus.

[d] 16. hujus.

[e] 22. hujus.

mensurabilis est ipsi A F longitudine, et D G ipsi G E: est igitur A F ipsi E G longitudine in-
f 13. hujus. commensurabilis [f]. Ut autem A F ad E G, ita parallelogrammum A I ad E K
g 1. sexti. parallelogrammum [g]: ergo incommensurabile est A I ipsi E K. Constituatur ipsi quidem A I æquale qua-
h 14. secundi. dratum L M [h]; ipsi vero F K æquale auferatur quadratum N O, angulum habens eundem, quem L M: ergo quadrata L M, N O circa eandem sunt
i 26. sexti. diametrum [i]. Sit ipsorum diameter P R; et figura describatur. Quoniam igitur rectangulum sub A F, F G est æquale quadrato ex E G; erit
k 17. sexti. ut A F ad E G, ita E G ad F G [k]. Ut autem A F ad E G, ita parallelogrammum A I ad E K parallelogrammum [g]; et ut E G ad G F, ita E K ad F K. Ergo et ut A I ad E K, ita E K ad F K. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale est E K. Est autem et inter quadrata L M, N O medium proportionale M N; et parallelogrammum A I quidem æquale est quadrato L M,
l Per constructionem. F K vero ipsi N O [l]: ergo et E K est æquale M N. Sed M N æquale est L O [m], et E K ipsi D H [n]. Totum igitur D K
m 43. primi. gnomoni Ψ Φ X et quadrato N O est æquale. Est autem
n 36. primi. et parallelogrammum A K æquale quadratis L M, N O. Ergo reliquum A B est æquale ipsi S T, hoc est, quadrato ex L N; et ob id recta linea L N ipsum A B spatium potest. Dico L N mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim parallelogramma A I, F K ostensa sunt media, et sunt æqualia quadratis ex L P, P N; erit et utrumque quadratorum ex L P, P N medium; igitur utraque recta linea L P, P N media est. Et quoniam commensurabile est A I ipsi F K; erit et quadratum ex L P quadrato ex P N commensurabile. Rursus, quoniam ostensum est A I incommensurabile ipsi E K; et L M ipsi M N incommensurabile erit, hoc est, quadratum ex L P rectangulo sub L P, P N. Quare et recta linea L P longitudine incommensurabilis est ipsi P N. Sunt igitur L P, P N mediæ, potentiâ solum commensurabiles. Dico eas etiam medium continere. Quoniam enim E K demonstratum est medium, atque est æquale rectangulo sub L P, P N; erit et rectangulum sub L P, P N medium.



Ergo

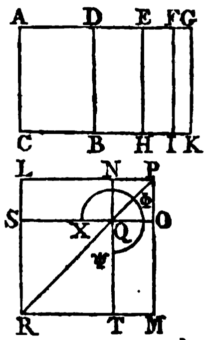
Ergo L P, P N mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium continent; ac propterea L N eſt mediæ apotome ſecunda[o]; et poteſt ſpatium A B. Recta igitur linea, ſpatium A B potens, eſt mediæ apotome ſecunda. *Q. E. D.* [o] 76. hujus.

PROP. XCV. THEOR. [XCV.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ quartâ, recta linea ſpatium potens minor eſt.

Spatium enim A B contineatur ſub rationali A C, et apotomâ quartâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A B poteſt, minorem eſſe.

Sit enim ipſi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et A G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A C; totaque A G plus poteſt quam G D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis[p]. Quoniam igitur A G plus poteſt quam G D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſi quartæ parti quadrati ex D G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommenſurabiles ipſam dividet[q]. Itaque ſecetur D G bifariam in E; et quadrato ex E G æquale ad ipſam A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod ſc. continetur ſub A F, F G. Ergo A F ipſi F G longitudine eſt incommenſurabilis. Ducantur per puncta E, F, G ipſis A C, B D parallelæ E H, F I, G K. Quoniam igitur A G rationalis eſt, et ipſi A C longitudine commenſurabilis; erit totum parallelogrammum A K rationale[r]. Rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt D G ipſi A C longitudine, et ſunt ambæ rationales; erit parallelogrammum D K medium[s]. Quod cum A F ipſi F G longitudine ſit incommenſurabilis; erit et parallelogrammum A I incommenſurabile F K[t]. Conſtituatur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum L M; parallelogrammo autem F K æquale quadratum N O auferatur, angulum habens eundem L P M, quem L M. Quadrata igitur L M, N O circa eandem ſunt diametrum[u]. Sit ipſorum diameter P R; et figura deſcribatur.



[p] Def. Tert. 4. hujus.

[q] 19. hujus.

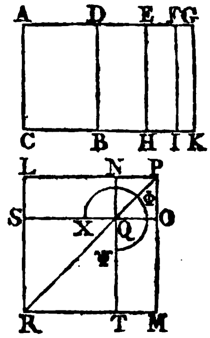
[r] 20. hujus.

[s] 22. hujus.

[t] 1. ſexti.

[u] 26. ſexti.

fcribatur. Itaque quoniam rectangulum fub A F, F G eft æquale quadrato ex E G; ut A F ad E G, ita erit E G ad G F [u]. Sed ut A F quidem ad E G, ita eft parallelogrammum A I ad ipfum E K [x]: ut autem E G ad F G, ita E K ad F K. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale eft E K. Eft autem et inter quadrata L M, N O medium proportionale M N; atque eft parallelogrammum A I æquale quadrato L M, et parallelogrammum F K æquale eft ipfi N O [y]: eft igitur E K æquale ipfi M N. Sed E K quidem eft æquale parallelogrammo D H [z]; M N vero ipfi L O [a]. Totum igitur parallelogrammum gnomoni Υ Φ X, et quadrato N O eft æquale. Et quoniam totum A K æquale eft quadratis L M, N O, et D K æquale gnomoni Υ Φ X, et N O quadrato; erit reliquum A B æquale quadrato S T, hoc eft, quadrato ex L N: ergo L N fpatium A B poteft. Dico L N irrationalem effe, quæ minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum A K rationale eft, et æquale quadratis ipfarum L P, P N; erit et compofitum ex quadratis ipfarum L P, P N rationale. Rurfus, quoniam parallelogrammum D K medium eft, atque eft æquale ei, quod bis continetur fub L P, P N; erit et quod bis fub L P, P N continetur medium. Et quoniam oftenfum eft A I incommenfurabile ipfi F K; erit et quadratum ex L P incommenfurabile quadrato ex P N; ac propterea L P, P N potentiâ funt incommenfurabiles, quæ faciunt compofitum ex ipfarum quadratis rationale, quod autem bis fub ipfis continetur medium. Quare L N irrationalis eft, quæ minor appellatur [b]. Et poteft fpatium A B. Recta igitur linea, fpatium A B potens, minor eft. *Q. E. D.*



u 17. fexti.
x 1. fexti.
y Per conftruct.
z 36. primi.
a 43. primi.
b 77. hujus.

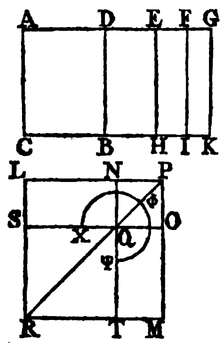
PROP.

PROP. XCVI. THEOR. [XCVI.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ quintâ, recta linea ſpatium potens eſt quæ cum rationali medium totum efficit.

Spatium enim A B contineatur ſub rationali A C, et apotomâ quintâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A B poteſt, eſſe eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipſi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et congruens D G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A C; totaque A G plus poteſt quam D G quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine [c]. Si igitur quartæ parti quadrati ex D G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommenſurabiles ipſam dividet [d]. Itaque ſecetur D G bifariam in puncto E; et quadrato ex E G æquale ad ipſam A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod ſc. continetur ſub A F, F G. Ergo A F incommenſurabilis eſt ipſi F G longitudine. Ducantur per puncta E, F, G ipſi A C parallelæ E H, F I, G K. Et quoniam A G incommenſurabilis eſt ipſi A C longitudine, et ſunt ambæ rationales; erit parallelogrammum A K medium [e]. Rurſus, quoniam rationalis eſt D G, et ipſi A C longitudine commenſurabilis; parallelogrammum D K rationale erit [f]. Conſtituatur igitur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum L M; ipſi vero F K æquale quadratum auferatur N O, angulum habens eundem, quem L M, videlicet L P M: ergo quadrata L M, N O circa eandem ſunt diametrum [g]. Sit diameter ipſorum P R; et figura deſcribatur. Similiter oſtendemus rectam lineam L N ſpatium A B poſſe. Dico L N eſſe eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Quoniam enim oſtendimus parallelogrammum A K medium eſſe; atque eſt æquale quadratis ipſarum L P, P N; erit et compoſitum ex quadratis ipſarum L P, P N medium. Rurſus, quoniam D K rationale eſt, et æquale ei, quod bis



[c] Def. Tert. 5. hujus.

[d] 19. hujus.

[e] 22. hujus.

[f] 20. hujus.

[g] 26. ſexti.

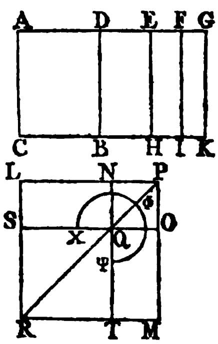
bis continetur ſub L P, P N; erit et quod bis ſub L P, P N continetur rationale. Et quoniam A I eſt incommenſurabile ipſi F K, incommenſurabile igitur eſt quadratum ex L P quadrato ex P N; ideoque L P, P N potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem ſub ipſis bis continetur rationale. Ergo reliqua L N irrationalis eſt, quæ vocatur cum rationali medium totum
[h] 78. hujus. efficiens[h]; et poteſt ſpatium A B. Recta igitur lineâ, ſpatium A B potens, eſt quæ cum rationali medium totum efficit. *Q. E. D.*

[XCVII.] PROP. XCVII. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ ſextâ, recta linea ſpatium potens eſt quæ cum medio medium totum efficit.

Spatium enim A B contineatur ſub rationali A C, et apotomâ ſextâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A B poteſt, eſſe eam quæ cum medio medium totum efficit.

Sit enim ipſi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et neutra ipſarum A G, G D commenſurabilis eſt longitudine expoſitæ rationali A C; totaque A G plus poteſt quam congruens D G quadrato lineæ ſibi longitudine incom-
[i] Def. Tert. 6. hujus. menſurabilis[i]. Itaque quoniam A G plus poteſt quam G D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ſi quartæ parti quadrati ex D G æquale ad rectam lineam A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommenſurabiles ipſam
[k] 19. hujus. dividet[k]. Itaque ſecetur D G bifariam in E; et quadrato ex E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, nempe quod continetur ſub A F, F G. Incommenſurabilis igitur eſt A F ipſi F G longitudine. Ut autem A F ad F G, ita eſt
[l] 1. ſexti. A I ad ipſum F K[l]: ergo A I ipſi F K eſt incommenſu-
[m] 10. hujus. rabile[m]. Et quoniam A G, A C rationales ſunt, potentiâ
[n] 22. hujus. ſolum commenſurabiles; erit A K medium[n]. Rurſus,



quoniam

quoniam A C, D G rationales ſunt, et incommenſurabiles longitudine, medium erit et D K. Quod cum A G, G D potentiâ ſolum commenſurabiles ſint; erit A G ipſi G D longitudine incommenſurabilis. Sed ut A G ad G D, ita eſt A K ad K D [o]: incommenſurabile igitur eſt A K ipſi K D [p]. Itaque conſtituatur parallelogrammo A I æquale quadratum L M [q]; parallelogrammo autem F K æquale auferatur quadratum N O, angulum habens eundem, quem L M. Ergo quadrata L M, N O circa eandem ſunt diametrum [r]. Sit eorum diameter P R; et figura deſcribatur. Similiter ut ſupra oſtendemus rectam lineam L N poſſe ſpatium A B. Dico L N eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quoniam enim A K oſtenſum eſt medium, atque eſt æquale quadratis ipſarum L P, P N; erit et compoſitum ex quadratis ipſarum L P, P N medium. Rurſus, quoniam D K oſtenſum eſt medium, et eſt æquale ei, quod bis continetur ſub L P, P N; et quod bis ſub L P, P N continetur medium erit. Et quoniam oſtenſum eſt A K incommenſurabile ipſi K D; ergo et quadrata ex L P, P N incommenſurabilia ſunt ei, quod bis ſub L P, P N continetur. Et quoniam incommenſurabile eſt A I ipſi F K; erit et quadratum ex L P quadrato ex P N incommenſurabile. Ergo L P, P N potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur medium, et adhuc quadrata ipſarum incommenſurabilia ei, quod bis ſub ipſis continetur. Ergo L N irrationalis eſt, quæ vocatur cum medio medium totum efficiens [s]. Et poteſt A B ſpatium. Recta igitur linea, ſpatium A B potens, eſt quæ cum medio medium totum efficit. *Q. E. D.*

[o] 1. ſexti.
[p] 10. hujus.
[q] 14. ſecundi.
[r] 26. ſexti.
[s] 79. hujus.

PROP. XCVIII. THEOR. [XCVIII.]

Quadratum apotomæ, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam.

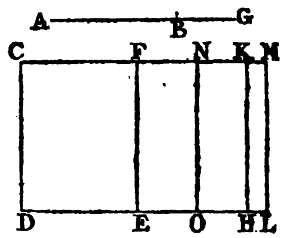
Sit apotome A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F eſſe apotomen primam.

Sit enim ipſi A B congruens B G: ergo A G, G B rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles [t]. Et ad ipſam C D applicetur quadrato quidem ex A G æquale

[t] 74. hujus.

C H;

[u] 45. primi. C H; quadrato autem ex B G æquale K L [u]. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B; ex quibus parallelogrammum C E æquale est quadrato ex A B. Ergo reliquum F L ei, quod bis sub A G, G B continetur, est æquale [x]. Secetur F M bifariam in N; et per N ipsi C D parallela ducatur N O. Utrumque igitur ipsorum F O, L N est æquale ei, quod sub A G, G B continetur. Et quoniam quadrata ex A G, G B rationalia sunt, atque est quadratis ex A G, G B æquale parallelogrammum D M; erit ipsum D M rationale. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M: ergo C M est rationalis, et ipsi C D commensurabilis longitudine [y]. Rursus, quoniam medium est quod bis continetur sub A G, G B, estque ei, quod bis sub A G, G B continetur, æquale parallelogrammum L F; erit ipsum L F medium. Et applicatum est ad rationalem C D, latitudinem faciens F M. Quare F M est rationalis, ipsique C D longitudine incommensurabilis [z]. Et quoniam quadrata quidem ex A G, G B rationalia sunt; quod autem bis continetur sub A G, G B medium: quadrata ex A G, G B incommensurabilia sunt ei, quod bis sub A G, G B continetur. Sed quadratis ex A G, G B æquale est parallelogrammum C L, ei vero quod bis continetur sub A G, G B æquale est F L: ergo C L ipsi F L est incommensurabile. Ut autem C L ad F L, ita est recta linea C M ad M F [a]: incommensurabilis igitur est C M ipsi M F longitudine. Et sunt ambæ rationales. Ergo C M, M F rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; ac propterea C F est apotome [b]. Dico et primam esse. Quoniam enim inter quadrata ex A G, G B medium proportionale est, quod sub A G, G B continetur [c]; atque est quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H [d]; ei vero quod sub A G, G B continetur æquale N L; et quadrato ex B G æquale K L: erit inter ipsa C H, K L medium proportionale N L. Ut igitur C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita est recta linea C K ad ipsam N M. Ut autem N L ad K L, ita recta linea N M ad M K: ergo ut C K ad N M, ita est



[x] 7. secundi.
[y] 21. hujus.
[z] 23. hujus.
[a] 1. sexti.
[b] 74. hujus.
[c] Lemma 7. hujus.
[d] Per construct.

N M

N M ad K M; et ob id rectangulum sub C K, K M est
æquale quadrato ex M N [d], hoc est, quartæ parti quadrati [d] 17. sexti.
ex F M. Et quoniam quadratum ex A G commensurabile est quadrato ex G B [e]; erit et parallelogrammum [e] ex hyp.
C H parallelogrammo K L commensurabile. Sed ut C H
ad K L, ita est recta linea C K ad ipsam K M; commensurabilis igitur est C K ipsi K M [f]. Itaque cum duæ [f] 10. hujus.
rectæ lineæ inæquales sint C M, M F, et quartæ parti
quadrati ex F M æquale parallelogrammum ad ipsam
C M applicatum sit, deficiens figurâ quadratâ, quod scilicet sub C K, K M continetur; sitque C K commensurabilis ipsi K M: recta linea C M plus poterit quam M F
quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [g]. [g] 18. hujus.
Atqui est C M commensurabilis longitudine expositæ
rationali C D. Ergo C F est prima apotome [h]. [h] Def. Tert. 1. hujus.

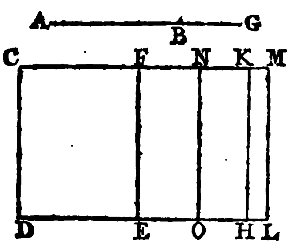
Quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. *Q. E. D.*

PROP. XCIX. THEOR. [XCIX.]

Quadratum mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Sit mediæ apotome prima A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C F; dico C F esse apotomen secundam.

Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale continent [i]. Et quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H ad C D applicetur, latitudinem faciens C K [k]; quadrato autem ex G B æquale K L ad eandem applicetur, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L



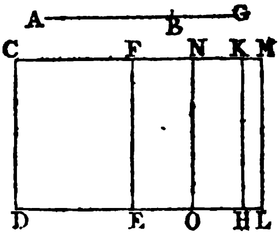
[i] 75. hujus.

[k] 45. primi.

est æquale quadratis ex A G, G B, quæ media sunt. Quare et C L est medium. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M: rationalis igitur est C M, et ipsi C D longitudine incommensurabilis [l]. [l] 23. hujus.
Itaque quoniam C L est æquale quadratis ex A G, G B, ex quibus quadratum ex A B æquale est parallelogrammo

C E;

C E; erit reliquum, sc. quod bis continetur sub A G, G B, æquale ipsi F L [m]. Est autem quod bis sub A G, G B continetur rationale. Rationale igitur est et F L; et ad rationalem F E applicatum est, latitudinem faciens F M. Quare F M est rationalis, et ipsi C D commensurabilis longitudine [n]. Et quoniam quadrata quidem ex A G, G B, hoc est, parallelogrammum C L, medium est; quod autem bis continetur sub A G, G B, videlicet F L, est rationale: erit C L incommensurabile ipsi F L. Ut autem C L ad F L, ita recta linea C M ad M F [o]: ergo C M ipsi M F longitudine est incommensurabilis. Et sunt ambæ rationales. Sunt igitur C M, M F rationales, potentiâ solum commensurabiles: ideoque C F est apotome [p]. Dico et secundam esse. Secetur enim F M bifariam in puncto N; et per N ipsi C D parallela ducatur N O. Alterutrum igitur parallelogrammorum F O, N L est æquale ei, quod continetur sub A G, G B. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale est, quod sub A G, G B continetur; estque quadratum ex A G æquale parallelogrammo C H, quod autem continetur sub A G, G B æquale parallelogrammo N L, et quadratum ex G B æquale ipsi K L; erit inter parallelogramma C H, K L medium proportionale N L. Est igitur ut C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita est recta linea C K ad ipsam N M, et ut N L ad K L, ita N M ad K M [o]. Ergo ut C K ad N M, ita est N M ad K M: ac propterea rectangulum sub C K, K M est æquale quadrato ex N M [q]; hoc est, quartæ parti quadrati ex F M. Et quoniam quadratum ex A G commensurabile est quadrato ex G B; erit et C H parallelogrammum parallelogrammo K L commensurabile, hoc est, recta linea C K commensurabilis ipsi K M. Quoniam itaque duæ rectæ lineæ inæquales sunt C M, M F, quartæ autem parti quadrati ex M F æquale ad majorem C M applicatum sit, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub C K, K M, et in partes commensurabiles ipsam dividat; recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine [r]. Atque est congruens F M expositæ



m 7. secundi.
n 21. hujus.
o 1. sexti.
p 74. hujus.
q 17. sexti.
r 18. hujus.

expoſitæ rationali C D commenſurabilis[s]. Quare C F eſt apotome ſecunda[t].
[s] ex hyp. [t] Def. Tert. 2. hujus.

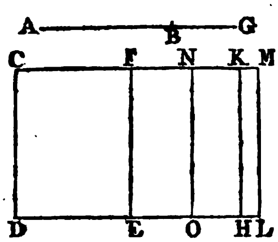
Quadratum igitur mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſecundam. *Q. E. D.*

PROP. C. THEOR. [C.]

Quadratum mediæ ſecundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

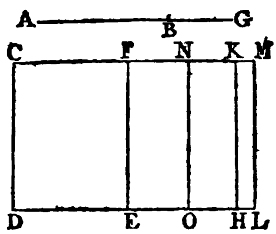
Sit mediæ apotome ſecunda A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F eſſe apotomen tertiam.

Sit enim ipſi A B congruens B G: ergo A G, G B mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium continent[u]. Et quadrato quidem ex A G æquale ad C D applicetur C H, latitudinem faciens C K[x]; quadrato autem ex G B æquale ad K H applicetur K L, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L eſt æquale quadratis ex A G, G B. Et ſunt quadrata ex A G, G B media. Ergo et C L eſt medium; et ad rationalem C D applicatum eſt, latitudinem faciens C M: ergo C M eſt rationalis, ſed ipſi C D incommenſurabilis longitudine[y]. Et quoniam totum C L eſt æquale quadratis ex A G, G B, ex quibus C E æquale eſt quadrato ex A B; erit reliquum F L æquale ei, quod bis continetur ſub A G, G B[z]. Secetur F M bifariam in N; et ipſi C D parallela ducatur N O. Alterutrum igitur parallelogrammorum F O, N L eſt æquale ei, quod ſub A G, G B continetur. Eſt autem quod continetur ſub A G, G B medium: ergo et medium eſt F L; et ad rationalem E F applicatum eſt, latitudinem faciens F M. Quare et F M eſt rationalis, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis[y]. Et quoniam A G, G B potentiâ ſolum commenſurabiles ſunt; erit A G ipſi G B incommenſurabilis longitudine: ideoque quadratum ex A G rectangulo ſub A G, G B eſt incommenſurabile[a]. Sed quadrato quidem ex A G commenſurabilia ſunt ex A G, G B quadrata; rectangulo autem ſub A G, G B commenſurabile eſt



[u] 76. hujus.
[x] 45. primi.
[y] 23. hujus.
[z] 7. ſecundi.
[a] 1. ſexti. & 10. hujus.

est quod bis sub A G, G B continetur: ergo quadrata ex A G, G B sunt incommensurabilia ei, quod bis sub A G, G B continetur. At quadratis ex A G, G B æquale est parallelogrammum C L [b]; ei vero, quod bis continetur sub A G, G B, æquale est F L: incommensurabile igitur est C L ipsi F L. Ut autem C L ad F L, ita est recta linea C M ad F M: ergo C M ipsi F M incommensurabilis est longitudine [c]. Et sunt ambæ rationales. Quare C M, F M rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id C F est apotome [d]. Dico et tertiam esse. Quoniam enim quadratum ex A G commensurabile est quadrato ex G B; erit parallelogrammum C H parallelogrammo K L commensurabile: ergo et recta linea C K est commensurabilis ipsi K M. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale est rectangulum sub A G, G B [e]; atque est quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H; quadrato autem ex G B æquale K L, et rectangulo sub A G, G B æquale N L; erit inter parallelogramma C H, K L medium proportionale N L. Est igitur ut C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita est recta linea C K ad N M [f]; ut autem N L ad K L, ita N M ad K M; ergo et ut C K ad N M, ita N M ad K M. Ac propterea rectangulum sub C K, K M est æquale quadrato ex N M [g], hoc est, quartæ parti quadrati ex F M. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales sunt C M, M F; et quartæ parti quadrati ex F M æquale ad C M applicatum est, deficiens figurâ quadratâ, quod in partes commensurabiles ipsam dividit; recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [h]. Et neutra ipsarum C M, M F longitudine commensurabilis est expositæ rationali C D. Ergo C F est apotome tertia [i].



Quadratum igitur mediæ apotomæ secundæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. *Q. E. D.*

[b] Per construct.
[c] 10. hujus.
[d] 74. hujus.
[e] Lemma 7. hujus.
[f] 1. sexti.
[g] 17. sexti.
[h] 18. hujus.
[i] Def. Tert. 3. hujus.

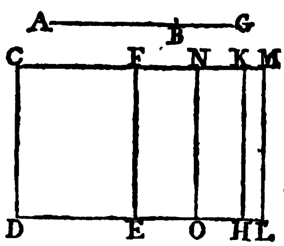
PROP.

PROP. CI. THEOR. [CI.]

Quadratum minoris, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quartam.

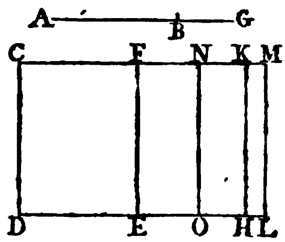
Sit minor A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F eſſe apotomen quartam.

Sit enim ipſi A B congruens B G: ergo A G, G B potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A G, G B quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium [k]. Quadrato igitur ex A G æquale ad C D applicetur C H, latitudinem faciens C K [l]: quadrato autem ex B G æquale ad K H applicetur K L, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L quadratis ex A G, G B eſt æquale. Atqui eſt compoſitum ex quadratis A G, G B rationale: ergo et rationale eſt C L; et ad rationalem C D applicatum eſt, latitudinem faciens C M. Quare C M eſt rationalis, et ipſi C D longitudine commenſurabilis [m]. Et quoniam totum C L eſt æquale quadratis ex A G, G B, C E autem quadrato ex A B æquale; erit reliquum F L æquale ei, quod bis ſub A G, G B continetur [n]. Itaque ſecetur F M bifariam in puncto N; et per N alterutri ipſarum C D, M L parallela ducatur N O. Utrumque igitur parallelogrammorum F O, N L eſt æquale ei, quod continetur ſub A G, G B. Et quoniam quod bis continetur ſub A G, G B medium eſt, et æquale parallelogrammo L F: erit et L F medium; et ad rationalem F E applicatum eſt, latitudinem faciens F M. Ergo F M eſt rationalis, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis [o]. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A G, G B eſt rationale, quod autem bis ſub A G, G B continetur medium; erunt quadrata ex A G, G B ei, quod bis continetur ſub A G, G B, incommenſurabilia. Quadratis autem ex A G, G B æquale eſt parallelogrammum C L, et ei, quod bis ſub A G, G B continetur, eſt æquale F L: incommenſurabile igitur eſt C L ipſi L F. Sed ut C L



[k] 77. hujus.
[l] 45. primi.
[m] 21. hujus.
[n] 7. ſecundi.
[o] 23. hujus.

p 1. fexti. ad F L, ita eſt C M ad F M p. Quare C M ipſi F M lon-
q 10. hujus. gitudine eſt incommenſurabilis q. Et ſunt ambæ rationales. Ergo C M, M F rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et igitur C F eſt
r 74. hujus. apotome r. Dico et quartam eſſe. Quoniam enim A G, G B potentiâ ſunt incommenſurabiles; erit quadratum ex A G incommenſurabile quadrato ex G B. Et quadrato quidem ex A G æquale eſt parallelogram-



s Per conſtruct. mum C H s; quadrato autem ex G B eſt æquale K L: incommenſurabile igitur eſt C H ipſi K L. Sed ut C H ad K L, ita eſt C K ad K M. Ergo C K ipſi K M eſt incommenſurabilis longitudine. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale eſt rectangulum ſub
t Lemma 7. hujus. A G, G B t; atque eſt quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H, quadrato autem ex G B æquale K L, et rectangulo ſub A G, G B æquale N L; erit N L medium proportionale inter parallelogramma C H, K L. Eſt igitur ut C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita C K ad M N. Et ut N L ad K L, ita M N ad K M. Ergo ut C K ad M N, ita M N ad K M; ac propterea rectangulum ſub C K, K M eſt æquale quadrato
u 17. fexti. ex M N u, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex M F. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ inæquales ſunt C M, M F; et quartæ parti quadrati ex M F æquale, ad C M applicatum eſt, deficiens figurâ quadratâ, ſc. contentum ſub C K, K M; et in partes incommenſurabiles ipſam dividit: recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ
x 19. hujus. lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine x. Et eſt tota C M longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali C D.
y Def. Tert. 4. hujus. Ergo C F eſt apotome quarta y.

Quadratum igitur minoris, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quartam. *Q. E. D.*

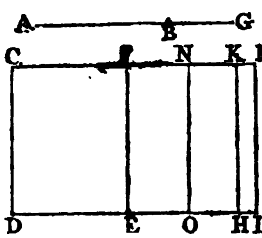
PROP.

PROP. CII. THEOR. [CII.]

Quadratum ejus, quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quintam.

Sit quæ cum rationali medium totum efficit A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale ad C D applicetur parallelogrammum C E, latitudinem faciens C F: dico C F apotomen esse quintam.

Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B rectæ lineæ potentiâ sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale[a]. Et quadrato ex A G æquale parallelogrammum C H ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C K[a]; quadrato autem ex G B æquale applicetur K L, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B. Sed compositum ex quadratis ipsarum A G, G B est medium: ergo et medium est parallelogrammum C L. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M. Quare C M est rationalis, sed ipsi C D longitudine incommensurabilis[b]. Et quoniam totum C L est æquale quadratis ex A G, G B; C E autem quadrato ex A B æquale; erit reliquum F L æquale ei, quod bis sub A G, G B continetur[c]. Itaque secetur F M bifariam in puncto N, et ab ipso N alterutri ipsarum C D, M L parallela ducatur N O. Utrumque igitur F O, N L est æquale ei, quod sub A G, G B continetur. Et quoniam quod bis continetur sub A G, G B rationale est, et æquale parallelogrammo F L; erit et F L rationale. Et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens F M. Ergo F M est rationalis, et ipsi C D commensurabilis longitudine[d]. Et quoniam parallelogrammum C L est medium, et F L rationale: incommensurabile est C L ipsi F L. Et ut C L ad F L, ita C M ad M F[e]. Ergo C M ipsi M F longitudine est incommensurabilis[f]. Et sunt ambæ rationales; quare C M, M F rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; ideoque C F est apotome[g]. Dico et quintam esse.



[a] 78. hujus.
[a] 45. primi.
[b] 23. hujus.
[c] 7. secundi.
[d] 21. hujus.
[e] 1. sexti.
[f] 10. hujus.
[g] 74. hujus.

Similiter enim demonſtrabimus rectangulum ſub C K, K M eſſe æquale quadrato ex N M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex F M [h]. Quod cum quadratum ex A G incommenſurabile ſit quadrato ex G B; ſitque quadratum ex A G parallelogrammo C H æquale, quadratum autem ex G B parallelogrammo K L: erit C H ipſi K L incommenſurabile. Sed ut C H ad K L, ita C K ad K M. Ergo C K ipſi K M longitudine eſt incommenſurabilis. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ C M, M F inæquales ſunt; et quartæ parti quadrati ex F M æquale, ad ipſam C M applicatum eſt, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommenſurabiles ipſam dividit; recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis [i]. Atqui eſt congruens F M commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali C D. Ergo C F eſt apotome quinta [k].

[h] Ut in præc.
[i] 19. hujus.
[k] Def. Tert. 5. hujus.

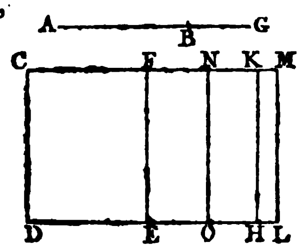
Quadratum igitur ejus, quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quintam. *Q. E. D.*

[CIII.] PROP. CIII. THEOR.

Quadratum ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen ſextam.

Sit quæ cum medio medium totum efficit A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F eſſe apotomen ſextam.

Sit enim ipſi A B congruens B G: ergo A G, G B potentiâ ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem ſub ipſis A G, G B continetur medium, et adhuc quadrata ipſarum A G, G B incommenſurabilia rectangulo, quod continetur ſub ipſis A G, G B [l]. Itaque ad C D applicetur quadrato ex A G æquale parallelogrammum C H, latitudinem faciens C K; quadrato autem ex B G æquale applicetur K L. Totum igitur C L eſt æquale quadratis ex A G, G B: ac propterea C L eſt medium. Et ad rationalem C D applicatum eſt, latitudinem



[l] 79. hujus.

latitudinem faciens C M: ergo C M rationalis eſt, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis [m]. Quoniam igitur C L eſt æquale quadratis ex A G, G B; C E autem quadrato ex A B æquale; erit reliquum F L æquale ei, quod bis ſub A G, G B continetur [n]. Atqui eſt quod bis continetur ſub A G, G B medium: ergo et F L eſt medium. Et ad rationalem F E applicatum eſt, latitudinem faciens F M; eſt igitur F M rationalis, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis. Et quoniam quadrata ex A G, G B incommenſurabilia ſunt ei, quod bis ſub A G, G B continetur; atque eſt quadratis quidem ex A G, G B æquale parallelogrammum C L, ei vero quod bis continetur ſub A G, G B æquale F L; erit C L ipſi F L incommenſurabile. Sed ut C L ad F L, ita eſt C M ad M F [o]. Quare C M ipſi M F incommenſurabilis eſt longitudine [p]. Et ſunt ambæ rationales. Ergo C M, M F rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id C F eſt apotome [q]. Dico et ſextam eſſe. Quoniam enim F L eſt æquale ei, quod bis continetur ſub A G, G B, ſecetur F M bifariam in puncto N; et per N ipſi C D parallela ducatur N O. Utrumque igitur parallelogrammorum F O, N L eſt æquale rectangulo ſub A G, G B. Et quoniam A G, G B potentiâ ſunt incommenſurabiles; erit quadratum ex A G incommenſurabile quadrato ex G B. Sed quadrato quidem ex A G eſt æquale parallelogrammum C H, quadrato autem ex G B æquale K L [r]. Ergo C H ipſi K L eſt incommenſurabile. Ut autem C H ad K L, ita eſt C K ad K M: incommenſurabilis igitur eſt C K ipſi K M [o]. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale eſt rectangulum ſub A G, G B [s]; eſtque quadrato ex A G æquale C H, et quadrato ex G B æquale K L, rectanguloque ſub A G, G B æquale N L; erit et inter parallelogramma C H, K L medium proportionale N L. Et eâdem ratione ac in ſuperiori C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et neutra ipſarum eſt commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali C D. Ergo C F eſt ſexta apotome [t].

[m] 23. hujus.
[n] 7. ſecundi.
[o] 1. ſexti.
[p] 10. hujus.
[q] 74. hujus.
[r] Per conſtruct.
[s] Lemma 7. hujus.
[t] Def. Tert. 6. hujus.

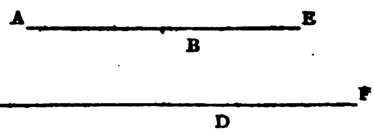
Quadratum igitur ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen ſextam. *Q. E. D.*

[CIV.] PROP. CIV. THEOR.

Recta linea apotomæ longitudine commensurabilis, et ipsa apotome est, atque ordine eadem.

Sit apotome A B, et ipsi A B longitudine commensurabilis sit C D: dico C D apotomen esse, atque ordine eandem, quæ A B.

Quonian enim A B est apotome, sit ipsi congruens B E: ergo A E, E B rationales sunt, potentiâ solum com-
x 74. hujus. mensurabiles [x]. Et fiat ratio B E ad D F eadem, quæ



est A B ad C D. Quare ut una ad unam, ita erunt
y 12. quinti. omnes ad omnes [y]: est igitur ut tota A E ad totam C F, ita A B ad C D. Commensurabilis autem est A B ipsi C D longitudine. Ergo et A E ipsi C F longitudine com-
z 10. hujus. mensurabilis erit, et B E ipsi D F [z]. Sunt autem A E, E B rationales, potentiâ solum commensurabiles. Ergo et C F, F D rationales erunt, potentiâ solum commensu-
a 74. hujus. rabiles [a]; ac propterea C D est apotome [a]. Dico et ordine eandem esse, quæ A B. Quoniam enim est ut A E ad C F, ita B E ad F D; erit permutando ut A E ad E B,
b 16. quinti. ita C F ad F D [b]. Vel igitur A E plus potest quam E B quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si quidem A E plus potest quam E B quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Et si quidem A E commensurabilis est longitudine expositæ rationali, et C F etiam erit. Si vero E B est commensurabilis, et D F commensurabilis erit. Et si neutra ipsarum A E, E B commensurabilis est longitudine expositæ rationali, et neutra ipsarum C F, F D eidem longitudine erit commensurabilis. Quod si A E plus possit quam E B quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem A E sit commensurabilis expositæ rationali longitudine, et C F eidem

eidem longitudine commensurabilis erit. Si vero B E, et F D. Et si neutra ipsarum A E, E B, et neutra ipsarum C F, F D erit expositæ rationali longitudine commensurabilis. Ergo C D apotome est, et ordine eadem, quæ A B[c]. *Q. E. D.*

[c] Def. Tert.

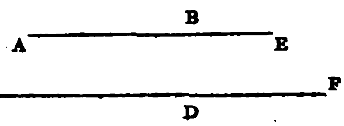
PROP. CV. THEOR. [CV.]

Recta linea mediæ apotomæ commensurabilis, et ipsa mediæ apotome est, atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome A B, et ipsi A B longitudine commensurabilis sit C D: dico C D mediæ apotomen esse, et ordine eandem, quæ A B.

Quoniam enim mediæ apotome est A B, sit B E ipsi A B congruens. Ergo A E, E B mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles[d]. Et fiat ut A B ad C D, ita B E

[d] 75. & 76. hujus.



ad D F. Sunt autem A E, E B mediæ, potentiâ solum commensurabiles. Ergo et C F, F D mediæ potentiâ solum commensurabiles erunt; ac propterea mediæ apotome est C D. Ostendendum est et ordine eandem esse, quæ A B. Quoniam enim ut A E ad E B, ita C F ad F D; ut autem A E ad E B, ita quadratum ex A E ad rectangulum sub A E, E B[e]; et ut C F ad F D, ita quadratum ex C F ad rectangulum sub C F, F D: erit et ut quadratum ex A E ad rectangulum sub A E, E B, ita quadratum ex C F ad rectangulum sub C F, F D. Permutando igitur est ut quadratum ex A E ad quadratum ex C F, ita rectangulum sub A E, E B ad rectangulum sub C F, F D. Sed quadratum ex A E commensurabile est quadrato ex C F: rectangulum igitur sub A E, E B rectangulo sub C F, F D est commensurabile. Et si quidem rationale est rectangulum sub A E, E B, et rectangulum sub C F, F D rationale erit: si vero rectangulum sub A E, E B medium est, et medium erit rectangulum sub C F, F D. Mediæ igitur apotome est C D, atque ordine eadem, quæ A B. *Q. E. D.*

[e] 1. sexti.

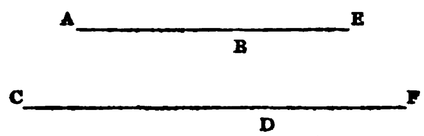
[CVI.]

PROP. CVI. THEOR.

Recta linea minori commensurabilis, et ipsa minor est.

Sit minor A B, et ipsi A B commensurabilis sit C D: dico et C D minorem esse.

Fiant enim eadem, quæ prius. Et quoniam A E, E B potentiâ sunt incommensurabiles, et C F, F D potentiâ incommensurabiles erunt. Quoniam autem est ut A E

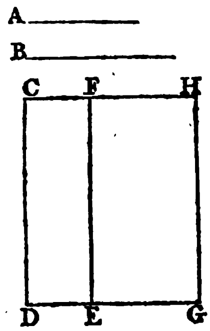


ad E B, ita C F ad F D: erit et ut quadratum ex A E ad quadratum ex E B, ita quadratum ex C F ad quadratum
[f] 22. sexti. ex F D [f]; et componendo ut quadrata ex A E, E B ad quadratum ex E B, ita quadrata ex C F, F D ad quadra-
[g] 18. quinti. tum ex F D, et permutando [g]. Commensurabile autem est quadratum ex B E quadrato ex D F. Ergo et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B composito ex
[h] 10. hujus. quadratis ipsarum C F, F D commensurabile erit [h]. Sed compositum ex quadratis ipsarum A E, E B est rationale: ergo et rationale erit compositum ex quadratis ipsarum C F, F D. Rursus, quoniam est ut quadratum ex A E ad rectangulum sub A E, E B, ita quadratum ex C F ad rectangulum sub C F, F D, et permutando; commensurabile autem est quadratum ex A E quadrato ex C F: erit igitur et rectangulum sub A E, E B rectangulo sub C F, F D commensurabile. Sed rectangulum sub A E, E B medium est: medium igitur est et rectangulum sub
[i] 24. hujus. C F, F D [i]. Quare C F, F D potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium.
[k] 77. hujus. Ergo C D est minor [k]. *Q. E. D.*

Aliter. Sit minor A, et ipsi A commensurabilis sit B: dico B minorem esse.

Exponatur enim C D rationalis, et quadrato ex A æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur,
[l] 101. hujus. latitudinem faciens C F. Apotome igitur quarta est C F [l]. Quadrato autem ex B æquale ad F E applicetur F G, latitudinem

latitudinem faciens F H. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B; erit et quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. Sed quadrato quidem ex A æquale est parallelogrammum C E, quadrato autem ex B æquale F G. Ergo C E commensurabile est ipsi F G. Ut autem C E ad F G, ita C F ad F H[m]: commensurabilis igitur est C F ipsi F H longitudine[n]. Sed C F est apotome quarta. Ergo et F H apotome quarta est[o]. Ergo et spatium F G sub rationali et apotomâ quartâ continetur: recta igitur linea spatium potens minor est[p]. Potest autem spatium F G ipsa B. Ergo B est minor. *Q. E. D.*



m 1. sexti.
n 10. hujus.
o 104. hujus.
p 95. hujus.

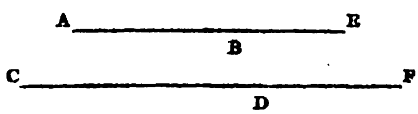
PROP. CVII. THEOR. [CVII.]

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium totum efficit, et ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Sit cum rationali medium totum efficiens A B. Et ipsi A B commensurabilis sit C D: dico C D esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipsi A B congruens B E. Ergo A E, E B potentiâ incommensurabiles sunt[q], facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub

q 78. hujus.

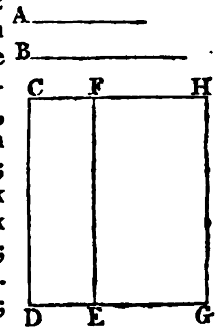


ipsis continetur rationale. Et eadem construantur. Similiter demonstrabitur, atque prius, C F, F D in eâdem esse ratione, in quâ A E, E B; et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum C F, F D; rectangulum autem sub A E, E B rectangulo sub C F, F D commensurabile. Quare et C F, F D potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum C F, F D medium, quod autem sub ipsis continentur rationale. Ergo C D est, quæ cum rationali medium totum efficit[q]. *Q. E. D.*

Aliter.

Aliter. Sit cum rationali medium totum efficiens A, et ipſi A ſit commenſurabilis B: dico B eſſe eam, quæ cum rationali medium totum efficit.

Exponatur enim rationalis C D, et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F. Ergo C F eſt apotome
r 102. hujus. quinta [r]. Quadrato autem ex B æquale F G ad ipſam F E applicetur, latitudinem faciens F H. Quoniam igitur A commenſurabilis eſt ipſi B; erit et quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile. Sed quadrato ex A æquale eſt parallelogrammum C E; quadrato autem ex B æquale F G. Ergo C E eſt commenſurabile ipſi F G; et ob id recta linea C F ipſi F H longitudine eſt commenſurabilis. Apotome autem quinta
s 104. hujus. eſt C F. Ergo et F H eſt apotome quinta [s]; eſtque F E rationalis. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ quintâ, recta linea ſpatium potens eſt quæ
t 96. hujus. cum rationali medium totum efficit [t]. Sed ipſa B poteſt
u Per conſtruct. ſpatium F G [u]. Ergo ipſa B cum rationali medium totum efficiens eſt. Q. E. D.

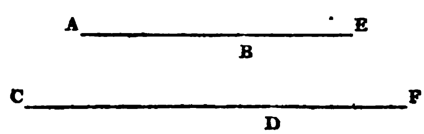


[CVIII.] PROP. CVIII. THEOR.

Recta linea commenſurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, et ipſa cum medio medium totum efficiens eſt.

Sit cum medio medium totum efficiens A B, et ipſi A B commenſurabilis ſit C D: dico C D eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit.

Sit ipſi A B congruens B E; et eadem conſtruantur. Ergo A E, E B potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes



x 79. hujus. compoſitum ex quadratis ipſarum medium [x], quod autem ſub ipſis continetur medium, et adhuc compoſitum ex ipſarum

ipsarum quadratis incommensurabile ei, quod sub ipsis continetur. Et sunt A E, E B commensurabiles ipsis C F, F D ut in superioribus ostensum est; et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile composito ex quadratis ipsarum C F, F D; rectangulumque sub A E, E B rectangulo sub C F, F D. Ergo C F, F D potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile ei, quod sub ipsis continetur. Ergo C D est quæ cum medio medium totum efficit [y]. [y] 79. hujus.
Q. E. D.

* SCHOLION.

De mutuo Irrationalium uniuscujusque Ἐξάδος inter se commensu, in decem hujus Libri propositionibus Euclides pertractavit: quarum quinque, nimirum quæ septima sexagesima numeratur, quæque ab eâ quatuor sunt proximæ, irrationales per compositionem respiciunt; quinque aliæ, a quartâ post centesimam incipientes, eas quæ per detractionem sunt irrationales. Ad pleniorem subtilissimæ doctrinæ intelligentiam, illud, ut opinor, haud inutile erit, e Clavio monuisse: ex decem propositionibus, quas memoravimus, duas, lxvii[m] dico et civ[m], latius non sumendas quam ab Euclide pronuntiatæ sunt; de rectis scilicet ipsâ longitudine commensurabilibus. Quamquam enim ei quæ ex binis est nominibus, vel ei quæ apotome, vel potentiâ tantum commensurabilis et ipsa ex binis nominibus aut apotome erit; haud tamen necessario ejusdem ordinis, cujus illa cui eo modo est commensurabilis. Propositiones autem octo reliquæ (68, 69, 70, 71; 105, 106, 107, 108.) apud commensurabiles potentiâ tantum æque ac longitudine vigent. Ut demonstrationes, quibus singulæ confirmatæ sunt, accurate perpendenti manifestum erit.

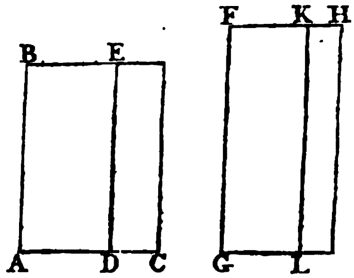
PROP. CIX. THEOR. [CIX.]

Medio de rationali detracto, recta linea quæ reliquum spatium potest una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

De rationali enim B C medium B D detrahatur: dico eam quæ reliquum spatium E C potest unam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomen, vel minorem.

Exponatur

Exponatur enim rationalis F G; et parallelogrammo quidem B C æquale G H ad F G applicetur; parallelogrammo autem B D æquale auferatur G K: reliquum igitur C E est æquale L H. Itaque quoniam rationale est B C, medium autem B D; atque est B C æquale G H, et B D ipsi G K; erit G H rationale, medium autem



G K; et ad rationalem F G utrumque applicatum est. Rationalis igitur est F H, et ipsi F G longitudine commensurabilis[z], F K vero rationalis et incommensurabilis ipsi F G longitudine[a]. Ergo F H ipsi F K longitudine incommensurabilis est[b]: quare F H, F K rationales sunt, potentiâ solùm commensurabiles: ac propterea K H est apotome, ipsi vero congruens K F[c]. H F igitur plus potest quam F K quadrato rectæ lineæ sibi vel commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Possit primum quadrato rectæ lineæ commensurabilis. Atqui est tota H F commensurabilis longitudine expositæ rationali F G. Ergo K H est apotome prima[d]. Recta autem linea, quæ potest spatium sub rationali et apotomâ primâ contentum, est apotome[e]. Ergo quæ potest L H, hoc est, ipsum C E, apotome est. Quod si H F plus possit quam F K quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, estque tota H F expositæ rationali F G longitudine commensurabilis; erit K H apotome quarta[f]. Et quæ potest spatium sub rationali et apotomâ quartâ contentum minor est[g]. Quæ igitur potest spatium L H, hoc est, ipsum E C, est minor. *Q. E. D.*

[z] 21. hujus.
[a] 23. hujus.
[b] 13. hujus.
[c] 74. hujus.
[d] Def. Tert. 1. hujus.
[e] 92. hujus.
[f] Def. Tert. 4. hujus.
[g] 95. hujus.

[CX.]

PROP. CX. THEOR.

Rationali de medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

Vide fig. Prop. 109.

De medio enim B C rationale B D detrahatur: dico rectam lineam, quæ reliquum spatium E C potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Exponatur

Exponatur enim rationalis F G, et ad ipſam ſimiliter ſpatia applicentur [h]; erit rationalis quidem F H, et ipſi F G longitudine incommenſurabilis [i]. Rationalis autem F K, et commenſurabilis ipſi F G longitudine [k]: ergo F H, F K rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea H K eſt apotome, et ipſi congruens F K [l]. F H igitur plus poteſt quam F K quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine vel commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Et ſi quidem H F plus poteſt quam F K quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; quoniam congruens F K commenſurabilis eſt expoſitæ rationali F G longitudine: erit H K apotome ſecunda [m]. Eſt autem F G rationalis. Ergo quæ poteſt ſpatium L H, hoc eſt, ipſum C E, eſt mediæ apotome prima [n]. Quod ſi H F plus poteſt quam F K quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quoniam congruens F K commenſurabilis eſt expoſitæ rationali F G longitudine: erit H K apotome quinta [o]. Recta igitur linea potens ſpatium E C eſt quæ cum rationali medium totum efficit [p]. *Q. E. D.*

[h] Ut in præc.
[i] 23. hujus.
[k] 21. hujus.
[l] 74. hujus.
[m] Def. Tert. 2. hujus.
[n] 93. hujus.
[o] Def. Tert. 5. hujus.
[p] 96. hujus.

PROP. CXI. THEOR. [CXI.]

Medio de medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti, reliquæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome ſecunda, vel cum medio medium totum efficiens.

Detrahatur ut in propoſitis figuris de medio B C medium B D, quod ſit incommenſurabile toti: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium C E, unam eſſe ex duabus irrationalibus, vel mediæ apotomen ſecundam, vel eam quæ cum medio medium totum efficit.

Vide fig. Prop. 109.

Quoniam enim medium eſt utrumque ipſorum B C, B D, et B C incommenſurabile eſt ipſi B D, hoc eſt, G H ipſi G K; erit H F ipſi F K incommenſurabilis longitudine [q]. Ergo H F, F K rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles [r]; et ob id H K eſt apotome, et ipſi congruens K F [s]. Itaque H F plus poteſt quam F K quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi vel commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Et ſi quidem H F plus poteſt quam F K quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum neutra ipſarum H F, F K commenſurabilis ſit expoſitæ rationali F G longitudine; erit H K apotome tertia [t]. Rationalis autem eſt K L. Quæ vero poteſt rectangulum, ſub rationali et apotomâ tertiâ contentum,

[q] 1. ſexti, & 10. hujus.
[r] 23. hujus.
[s] 74. hujus.
[t] Def. Tert. 3. hujus.

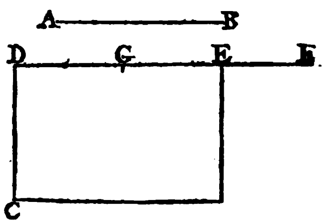
[u] 94. hujus. tentum, mediæ eſt apotome ſecunda [u]. Ergo quæ poteſt ſpatium L H, hoc eſt ipſum C E, mediæ eſt apotome ſecunda. Si vero H F plus poteſt quam F K quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; cum neutra ipſarum H F, F K longitudine commenſurabilis
[x] Def. Tert. 6. hujus. ſit expoſitæ rationali F G; erit H K apotome ſexta [x]. At recta linea, potens quod ſub rationali et apotomâ ſextâ continetur, eſt quæ cum medio medium totum
[y] 97. hujus. efficit [y]. Ergo quæ poteſt ſpatium L H, hoc eſt, ipſum E C, eſt cum medio medium totum efficiens. *Q. E. D.*

[CXII.] PROP. CXII. THEOR.

Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit apotome A B: dico A B non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus.

Sit enim, ſi fieri poteſt; exponaturque rationalis D C, et quadrato ex A B æquale rectangulum C E ad ipſam D C applicetur, latitudinem
[z] 45. primi. faciens D E [z]. Quoniam igitur A B eſt apotome, erit
[a] 98. hujus. D E apotome prima [a]. Sit ipſi congruens E F. Ergo D F, F E rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſu-



[b] Def. Tert. 1. hujus. rabiles [b], et D F plus poteſt quam F E quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eſt D F commenſurabilis expoſitæ rationali C D longitudine.
[c] ex hyp. Rurſus, quoniam A B eſt ex binis nominibus [c], erit D E
[d] 61. hujus. ex binis nominibus prima [d]. Dividatur in nomina ad punctum G, ſitque D G majus nomen. Ergo D G, G E
[e] Def. Secund. 1. hujus. rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles [e]. Et D G plus poteſt quam G E quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, et major D G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali D C. Quare D F
[f] 12. hujus. ipſi D G longitudine eſt commenſurabilis [f]; et reliquæ igitur F G commenſurabilis erit. Itaque quoniam D F commenſurabilis eſt ipſi F G, atque eſt rationalis D F; erit et F G rationalis. Rurſus, quoniam D F commenſurabilis eſt ipſi F G longitudine, atque eſt D F ipſi F E incommenſurabilis longitudine; erit et F G ipſi F E longitudine incommenſurabilis. Et ſunt rationales. Ergo G F, F E rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles;

ſurabiles; ac propterea E G eſt apotome [g]. Sed et rationalis, quod fieri non poteſt. [g] 74. hujus.

Ergo apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus. *Q. E. D.*

* SCHOLION.

Ex demonſtratis quoque facile colligere licebit, apotomen, et cæteras ipſam conſequentes irrationales lineas, neque medias eſſe, neque inter ſe eaſdem.

Quadratum enim mediæ ad rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit rationalem, ipſi rationali longitudine incommenſurabilem [h]. [h] 23. hujus.

At quadratum apotomæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen primam [i]. Et quadratum [i] 98. hujus. mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen ſecundam [k]. Quadratum vero [k] 99. hujus. mediæ apotomæ ſecundæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen tertiam [l]. Quadratum [l] 100. hujus. deinde Minoris ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen quartam [m]. At vero quadratum ejus, [m] 101. hujus. quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen quintam [n]. [n] 102. hujus. Quadratum denique ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen ſextam [o]. Itaque cum hæ latitudines [o] 103. hujus. differant et a latitudine mediæ, et inter ſe; a latitudine quidem mediæ, quod hæc rationalis ſit, illæ vero irrationales; inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem apotomæ: manifeſtum eſt, apotomen, et reliquas irrationales ipſam conſequentes, et a mediâ, et inter ſe differre. Quoniam vero in hoc theoremate demonſtravimus, apotomen eandem non eſſe, quæ ex binis nominibus: et quadrata apotomæ, et cæterarum quinque irrationalium eam conſequentium, ad rationalem applicata, latitudines efficiunt apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, et ſextam: at vero quadrata ejus, quæ ex binis nominibus, et reliquarum quinque irrationalium, quæ ipſam ſequuntur, ad rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, ac ſextam: liquido conſtat, latitudines apotomæ, et aliarum irrationalium, quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus ejus, quæ ex binis nominibus, et reliquarum poſt ipſam irratio-

irrationalium: quandoquidem nulla apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur et apotome, et quæ ipſam ſequuntur, differunt ab eâ, quæ ex binis nominibus, et quæ poſt ipſam. Quamobrem cum tam illæ, quam hæ a mediâ ſint diverſæ; efficitur, rationali quâpiam expoſitâ, viginti tres numero eſſe lineas irrationales, inter ſe diverſas, de quibus haſtenus Euclides in hoc libro diſſeruit. Sunt autem hæ,

1. Media.
2. Ex binis mediis prima.
3. Ex binis mediis ſecunda.
4. Major.
5. Rationale ac medium potens.
6. Bina media potens.
7. Ex binis nominibus prima.
8. ——————— ſecunda.
9. ——————— tertia.
10. ——————— quarta.
11. ——————— quinta.
12. ——————— ſexta.
13. Mediæ apotome prima.
14. Mediæ apotome ſecunda.
15. Minor.
16. Cum rationali medium totum efficiens.
17. Cum medio medium totum efficiens.
18. Apotome prima.
19. ———— ſecunda.
20. ———— tertia.
21. ———— quarta.
22. ———— quinta.
23. ———— ſexta.

In hâc recenſione, neque ejus quæ ex binis nominibus ſimpliciter vocata eſt, neque ejus quæ ſimpliciter apotome, quarum altera primæ ἑξάδος earum quæ per compoſitionem, altera primæ earum quæ per detractionem prima eſt, ullam ſeorſum mentionem fecimus. Quoniam utramque in ſpecies diviſam, ut ſupra monuimus, ἑξάδες poſteriores ſiſtunt. Ne cui igitur mirari ſubeat numerum linearum, quæ quatuor ἑξάδας conficiunt, accedente mediâ ipſâ extra omnem ἑξάδα, ad viginti quinque non aſſurgere.

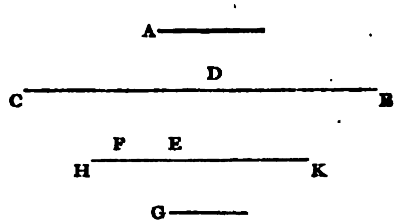
PROP.

PROP. CXIII. THEOR. [CXIII.]

Quadratum rationalis, ad eam quæ ex binis nominibus applicatum, latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus ejus, quæ est ex binis nominibus, et in eâdem ratione; et adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea quæ est ex binis nominibus.

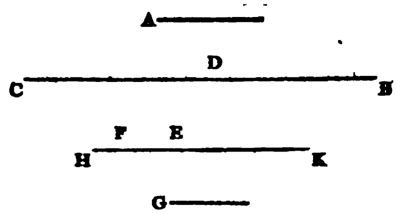
Sit rationalis A; ea quæ est ex binis nominibus B C, cujus majus nomen C D; et quadrato ex A æquale rectangulum fit, quod sub B C, E F continetur: dico E F apotomen esse, cujus nomina commensurabilia sunt ipsis C D, D B, et in eâdem ratione; et adhuc E F eundem ordinem habere, quem habet B C.

Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum, quod sub B D et G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum sub B C, E F est æquale ei, quod



sub B D, G continetur; erit ut C B ad B D, ita G ad E F [p]. [p] 16. sexti.
Major autem est C B quam B D. Ergo et G quam E F major erit. Sit ipsi G æqualis E H. Est igitur ut C B ad B D, ita H E ad E F; et dividendo, ut C D ad D B, ita H F ad F E [q]. Fiat ut H F ad F E, ita F K ad K E. Ergo [q] 17. quinti.
et tota H K ad totam K F est ut F K ad K E; ut enim unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia [r]. Sed ut F K [r] 12. quinti.
ad K E, ita C D ad D B; et igitur ut H K ad K F, ita C D ad D B. Commensurabile autem est quadratum ex C D quadrato ex D B [s]. Ergo et quadratum ex H K quadrato [s] 37. hujus.
ex K F est commensurabile [t]. Atqui est ut quadratum [t] 10. hujus.
ex H K ad quadratum ex K F, ita recta linea H K ad K E, quoniam tres rectæ lineæ H K, K F, K E deinceps proportionales sunt [u]: commensurabilis igitur est H K ipsi [u] Cor. 2. 20.
K E longitudine. Ergo et H E ipsi E K longitudine est sexti.

D d commen-



[x] 16. hujus. commensurabilis [x]. Et quoniam quadratum ex A est æquale ei, quod sub H E, B D continetur, rationale autem est quadratum ex A: erit et quod sub H E, B D continetur rationale. Et ad rationalem B D applicatum est; rationalis igitur est H E, et ipsi B D longitudine commen-
[y] 21. hujus. surabilis [y]; ideoque et E K, quæ est commensurabilis ipsi H E, rationalis erit, et ipsi B D commensurabilis longitudine. Quoniam igitur est ut C D ad D B, ita F K ad K E; sunt autem C D, D B potentiâ solum commensurabiles; et F K, K E potentiâ solum commensurabiles erunt. Rationalis autem est K E, et ipsi B D commensurabilis longitudine. Quare et F K est rationalis, ipsique C D longitudine commensurabilis. Sunt igitur F K, K E rationales, et potentiâ solum commensurabiles; et id-
[z] 74. hujus. circo E F apotome est [z]. Jam vero C D plus potest quam D B quadrato rectæ lineæ sibi vel commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Et si quidem C D plus potest quam D B quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, etiam F K plus poterit quam K E quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Et si C D est commensurabilis expositæ rationali longitudine, et F K eidem commensurabilis erit. Si autem B D, et K E. Et si neutra ipsarum C D, D B, et neutra ipsarum F K, K E. Quod si C D plus potest quam D B quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, et F K plus poterit quam K E quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem C D est longitudine commensurabilis expositæ rationali, erit et F K eidem commensurabilis. Et si B D, et K E. At si neutra ipsarum C D, D B, et neutra ipsarum F K, K E. Ergo F E apotome est, cujus nomina F K, K E commensurabilia sunt nominibus C D, D B ejus quæ est ex binis nominibus, et in eâdem ratione; et eundem habet ordinem, quem C B. *Q. E. D.*

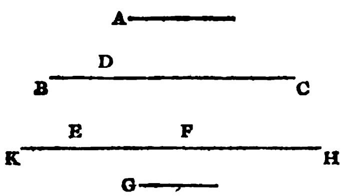
PROP.

PROP. CXIV. THEOR. [CXIV.]

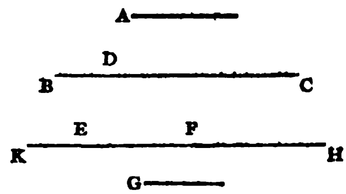
Quadratum rationalis, ad apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; et adbuc quæ ex binis nominibus fit eundem babet ordinem, quem ipſa apotome.

Sit rationalis quidem A, apotome autem B D; et quadrato ex A æquale ſit quod ſub B D, K H continetur, ita ut quadratum rationalis A, ad B D applicatum, latitudinem faciat K H: dico K H eſſe ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus ipſius B D, et in eâdem ratione; et K H eundem habere ordinem, quem habet B D.

Sit enim ipſi B D congruens D C. Ergo B C, C D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles[a]. Et[a] 74. hujus.
quadrato ex A æquale ſit quod ſub B C, G continetur.



Rationale autem eſt quadratum ex A. Ergo quod ſub B C, G continetur eſt rationale. Et ad rationalem B C applicatum eſt: rationalis igitur eſt recta linea G, ipſique B C longitudine commenſurabilis[b]. Sed quoniam[b] 21. hujus.
rectangulum, contentum ſub B C, G, eſt æquale ei, quod ſub B D, K H continetur; erit ut C B ad B D, ita K H ad G[c]. Major autem eſt C B quam B D. Ergo et K H[c] 16. ſexti.
quam G eſt major. Ponatur ipſi G æqualis K E: commenſurabilis igitur eſt K E ipſi B C longitudine. Et quoniam eſt ut C B ad B D, ita H K ad K E; erit, per converſionem rationis, ut B C ad C D, ita K H ad H E. Fiat ut K H ad H E, ita H F ad F E; et reliqua igitur K F ad F H eſt ut K H ad H E, hoc eſt, ut B C ad C D[d]. Sed B C, C D potentiâ ſolum ſunt commenſu-[d] 19. quinti.
rabiles. Ergo et K F, F H potentiâ ſolum commenſurabiles erunt. Et cum ſit ut K H ad H E, ita K F ad F H; ut autem K H ad H E, ita H F ad F E; erit et ut K F ad



F H, ita H F ad F E. Quare ut prima ad tertiam, ita quadratum ex primâ ad quadratum ex secundâ [e]: ut igitur K F ad F E, ita quadratum ex K F ad id quod fit ex F H quadratum. Commensurabile autem est quadratum ex K F quadrato ex F H; sunt enim K F, F H potentiâ commensurabiles. Ergo et K F ipsi F E commensurabilis est longitudine: ac propterea F K ipsi K E longitudine commensurabilis [f]. Sed K E rationalis est, et ipsi B C longitudine commensurabilis. Ergo et K F rationalis erit, et ipsi B C commensurabilis longitudine. Et quoniam est ut B C ad C D, ita K F ad F H; erit permutando ut B C ad K F, ita D C ad F H. Commensurabilis autem est B C ipsi K F. Quare et C D ipsi F H est commensurabilis [g]. Suntque B C, C D rationales potentiâ solum commensurabiles. Ergo et K F, F H rationales erunt, potentiâ solum commensurabiles: ex binis igitur nominibus est K H [h]. Et si quidem B C plus potest quam C D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, et K F plus poterit quam F H quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Et si B C longitudine commensurabilis est expositæ rationali, et K F eidem commensurabilis erit. Si vero C D est commensurabilis longitudine expositæ rationali, erit et ipsa F H eidem commensurabilis. Et si neutra ipsarum B C, C D, et neutra ipsarum K F, F H. At si B C plus poterit quam C D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, et K F plus poterit quam F H quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Et si quidem B C longitudine commensurabilis est expositæ rationali, et K F eidem commensurabilis erit. Si vero C D, et ipsa F H. Quod si neutra ipsarum B C, C D, et neutra ipsarum K F, F H. Ex binis igitur nominibus est K H, cujus nomina K F, F H commensurabilia sunt nominibus apotomæ B C, C D, et in eâdem ratione; et K H eundem tenet ordinem, quem ipsa B C [i]. *Q. E. D.*

[e] Cor. 2. 20. sexti.
[f] 16. hujus.
[g] 10. hujus.
[h] 37. hujus.
[i] Deff. Secund. et Tert. hujus.

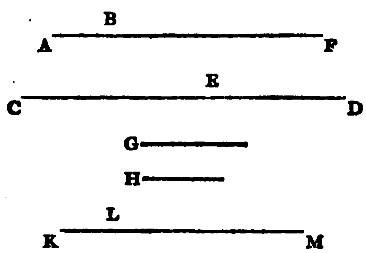
PROP.

PROP. CXV. THEOR. [CXV.]

Si ſpatium contineatur ſub apotomâ et eâ, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ, et in eâdem ratione; recta linea, ſpatium potens, eſt rationalis.

Spatium enim contineatur ſub A B, C D; videlicet ſub apotomâ A B, et quæ ſit ex binis nominibus C D, cujus majus nomen C E; et ſint nomina ejus, quæ ex binis nominibus, C E, E D, commenſurabilia nominibus apotomæ A F, F B, et in eâdem ratione; ſitque recta linea G, potens ſpatium contentum ſub A B, C D: dico ipſam G rationalem eſſe.

Exponatur enim rationalis H, et quadrato ex H æquale ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens K L [k]; [k] 45. primi.



apotome igitur eſt K L, cujus nomina K M, M L commenſurabilia ſunt nominibus ejus, quæ eſt ex binis nominibus, ſc. C E, E D, et in eâdem ratione [l]. Sed C E, [l] 113. hujus.
E D commenſurabiles ſunt ipſis A F, F B, atque in eâdem ratione [m]. Eſt igitur ut A F ad F B, ita K M ad M L [n]; et [m] ex hyp.
permutando ut A F ad K M, ita F B ad M L. Quare et [n] 11. quinti.
reliqua A B ad reliquam K L eſt ut A F ad K M [o]. Com- [o] 19. quinti.
menſurabilis autem eſt A F ipſi K M: ergo et A B ipſi K L eſt commenſurabilis [p]. Eſtque ut A B ad K L, ita [p] 10. hujus.
rectangulum contentum ſub C D, A B ad id, quod continetur ſub C D, K L [q]: commenſurabile igitur eſt re- [q] 1. ſexti.
ctangulum contentum ſub C D, A B rectangulo, quod ſub C D, K L continetur. Sed rectangulum contentum ſub C D, K L eſt æquale quadrato ex H [r]: ergo rectan- [r] Per conſtruct.
gulum, quod continetur ſub C D, A B, quadrato ex H eſt commenſurabile. Rectangulum autem, quod continetur ſub C D, A B, eſt æquale quadrato ex G [m]. Ergo qua-

dratum ex G commenſurabile eſt quadrato ex H. Atqui eſt quadratum ex H rationale: rationale igitur eſt quadratum ex G; et idcirco ipſa G, quæ poteſt quod ſub C D, A B continetur, eſt rationalis.

Si igitur ſpatium contineatur ſub apotomâ et eâ, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ, et in eâdem ratione; recta linea ſpatium potens eſt rationalis. *Q. E. D.*

Cor. Ex iis manifeſto conſtat fieri poſſe, ut ſpatium rationale ſub irrationalibus rectis lineis contineatur.

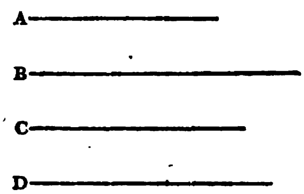
[CXVI.]

PROP. CXVI. THEOR.

A mediâ infinitæ irrationales ſunt, et nulla alicui antecedentium eſt eadem.

Sit media A: dico ex ipſâ A infinitas irrationales fieri, et nullam alicui antecedentium eandem eſſe.

Exponatur rationalis B, et rectangulo, contento ſub A, B, æquale ſit quadratum ex C. Irrationalis igitur eſt ipſa C[a]: nam quod ſub irrationali et rationali continetur irrationale eſt. Et eſt eadem nulli earum, quæ prius[b]; non enim quadratum alicujus antecedentium, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit mediam (per 61, 62, 63, 64, 65, 66, et 98, 99, 100, 101, 102, 103. hujus.) Rurſus, rectangulo, quod ſub B, C continetur, æquale ſit quadratum ex D: irrationale igitur eſt quod ſit ex D; et idcirco ipſa D eſt irrationalis, et nulli antecedentium eadem: neque enim quadratum alicujus earum, quæ prius ſunt, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ipſam C. Similiter et eodem ordine infinite protracto, manifeſtum eſt a mediâ infinitas irrationales fieri, et nullam alicui antecedentium eandem eſſe. *Q. E. D.*



[a] Def. 11. hujus.

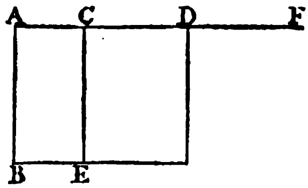
[b] In hoc lib.

† Aliter. Sit media A C: dico ex ipſâ A C infinitas irrationales fieri, et nullam alicui priorum eandem eſſe.

† *Demonſtratio hæc, quæ pro aliâ habetur tam in Codd. MSS. quam in editis, parum differt a præcedente. Illam tamen cum Commandino retinuimus.*

Ducatur

Ducatur ipſi A C ad rectos angulos A B, ſitque A B rationalis, et B C compleatur: irrationale igitur eſt B C, et ipſum potens eſt irrationalis. Poſſit autem ipſum recta linea C D; ergo C D irrationalis eſt, et nulli priorum eadem; non enim quadratum alicujus priorum, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit mediam. Rurſus, compleatur E D, erit E D irrationale; et recta linea ipſum potens irrationalis. Poſſit ipſum recta linea D F: ergo D F irrationalis eſt, et nulli priorum eadem; nullius enim priorum quadratum, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ipſam C D.

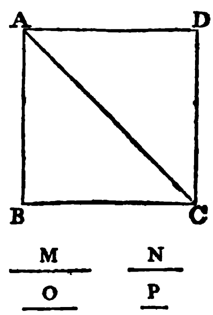


Ergo a mediâ infinitæ irrationales fiunt, et nulla alicui priorum eſt eadem.

* PROP. CXVII. THEOR. [CXVII.]

Quadrati cujuſque diagonalis lateri ejuſdem longitudine eſt incommenſurabilis.

Quadrati A B C D, cujus latus A B, diagonalis ſit A C. Dico A C ipſi A B longitudine incommenſurabilem. Non enim. Commenſurabilis igitur eſt A C ipſi A B longitudine. A C igitur ad A B rationem habet, quam numerus ad numerum [u]. Habeat, quam numerus M ad numerum N. Numerus autem M, ſeipſum multiplicans, faciat quadratum O. Numerus item N, ſeipſum multiplicans, faciat quadratum P. Jam cum recta A C ad rectam A B rationem habet, quam numerus M ad numerum N; quadratum ex A C ad quadratum ex A B rationem habet, quam numerus quadratus O ad numerum quadratum P [x]. Sed propter [x] triangulum iſoſceles A B C, ad B rectangulum, quadratum ex A C ad quadratum ex A B rationem habet, quam binarius ad unitatem [y]. Numerus igitur quadratus O ad [y] numerum quadratum P rationem habet, quam binarius ad unitatem [z]. Numeris autem O, P quadratis unus [a] intercedit proportione medius [a]. Quare binario etiam [b]



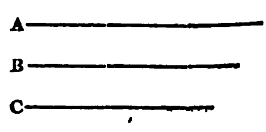
[u] 5. hujus.
[x] 9. hujus.
[y] 47. primi.
[z] 11. quinti.
[a] 11. octavi.

[a] 8. octavi. et unitati unus intercedet proportione medius[a]; binario utique minor, major idem unitate. Quod eſt abſurdum. Cum binarius et unitas ipſâ tantum unitate differant. Non eſt igitur A C ipſi A B longitudine commenſurabilis. Incommenſurabilis igitur longitudine. Quadrati igitur cujuſque &c. *Q. E. D.*

Aliter (e Clavio.) Quoniam quadratum ex diagonali
[b] 47. primi. duplum eſt quadrati ex latere[b], habebit quadratum ex diagonali ad quadratum ex latere rationem binarii ad unitatem, vel quaternarii ad binarium, vel octonarii ad quaternarium, &c. Et quia ſumptis in proportione duplâ quotcunque numeris ab unitate, 1, 2. 4. 8. 16. 32, &c. ſolum tertius ab unitate quadratus eſt, et cæ-
[c] 10. noni. teri omnes unum intermittentes[c], (quia primus ad unitate, nempe 2, quadratus non ſit) erunt ſolum hi numeri, 4. 16. 64, &c. quadrati, reliqui vero, 2. 8. 32, non quadrati. Quare cum quaternarius quadratus ſit et binarius non quadratus, non habebit quaternarius ad binarium proportionem, quam quadratus aliquis nume-
[d] 24. octavi. rus ad quadratum[d]. Ac propterea neque quadratum ex diagonali ad quadratum ex latere proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt diagonalis longitudine ipſi
[e] 9. hujus. lateri[e]. *Q. E. D.*

* SCHOLION (e Clavio.)

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cujus intelligentia ex ſequentibus Stereometriæ libris pendet, ut merito omitti poſſet. Verum quia in eâ continetur doctrina non contemnenda, ad commenſurabilitatem omnium magnitudinum, et incommenſurabilitatem, pertinens; viſum eſt, eam paucis explicare, aſſignando more noſtro ſolito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt.



Eſt igitur appendix hæc. Inventis lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, invenientur et aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A, C, longitudine inter ſe incommenſurabiles, inter

ter quas media proportionalis fit B. Quoniam igitur ut A ad C, ita eft figura rectilinea quævis fuper A conftituta ad figuram rectilineam fibi fimilem, fimiliterque pofitam fuper B [f]; et funt A et C longitudine incommenfurabiles; erunt rectilineæ illæ figuræ fuper A et B incommenfurabiles [g]. Rurfus, quoniam circuli, quorum diametri A, B proportionem habent, quam quadrata ex A, B defcripta: quadrata autem hæc, cum fint figuræ rectilineæ fimiles, fimiliterque pofitæ, proportionem habent, quam rectæ A, C [f]: habebunt quoque circuli diametrorum A, B eandem proportionem, quam rectæ A, C [h]. Sed rectæ A, C incommenfurabiles funt longitudine. Igitur et circuli diametrorum A, B incommenfurabiles funt [g]. Jam vero fi conftituantur folida, nempe pyramides, vel prifmata ejufdem altitudinis, quorum bafes fint figuræ rectilineæ fimiles, fimiliterque defcriptæ fuper A, B, habebunt pyramides atque prifmata eandem proportionem, quam bafes, hoc eft, quam rectilineæ illæ figuræ (5, 6, vel 7. duod.) Quare cum rectilineæ figuræ illæ incommenfurabiles fint, ut modo eft demonftratum; incommenfurabilia etiam erunt ipfa folida, nimirum pyramides, et prifmata [g]. Quod fi coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bafes circuli fint diametrorum A, B; habebunt hujufmodi coni et cylindri eandem proportionalem cum bafibus, hoc eft, cum illis circulis [i]. Cum ergo circuli oftenfi fint incommenfurabiles, erunt quoque incommenfurabiles dicti coni, et cylindri [g]. Inventæ funt igitur non folum lineæ et fuperficies incommenfurabiles, verum etiam et corpora, five folida, incommenfurabilia. Quod eft propofitum.

[f] Cor. 2. 20. fexti.

[g] 10. hujus.

[h] 11. quinti.

[i] 11. duod.

Eâdem autem ratione, fi rectæ A et B longitudine commenfurabiles fint, oftendemus earum figuras rectilineas fimiles, fimiliterque defcriptas, necnon et ipfarum circulos commenfurabiles effe [g]; atque adeo et earundem pyramides et prifmata; ac denique conos, et cylindros, fi modo eandem habeant altitudinem; ut perfpicuum eft (5, 6, 7, & 11. duod.)

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I. [I.]

SOLIDUM eſt, quod longitudinem, latitudinem, et craſſitudinem habet.

II. [II.]

Solidi terminus eſt ſuperficies.

III. [III.]

Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, et in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficit.

IV. [IV.]

Planum ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

V. [V.]

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque a puncto, quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adjuncta;

junĉta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente lineâ et adjunĉtâ comprehenſus.

[VI.] VI.

Plani ad planum inclinatio eſt angulus acutus, reĉtis lineis contentus, quæ, in utroque planorum ad idem communis ſeĉtionis punĉtum ductæ, reĉtos cum ſeĉtione angulos efficiunt.

[VII.] VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum diĉti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

* VIII.

Linea reĉta plano dicitur parallela, quæ infinite produĉta infinite produĉto nuſquam occurrit.

[VIII.] * IX.

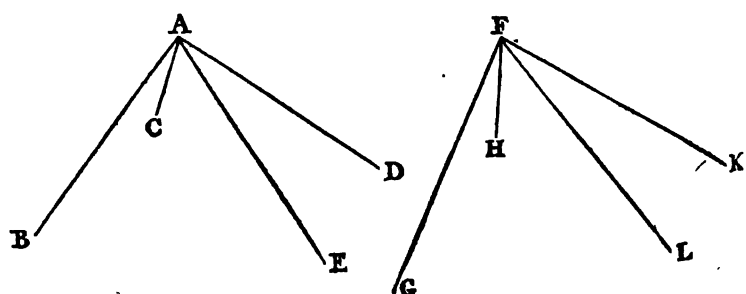
Parallela ſunt plana, quæ infinite produĉta nuſquam conveniunt.

[XI.] * X.

Solidus eſt angulus plurium quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingunt, nec in eâdem ſunt ſuperficie, mutua inclinatio. Vel ſolidus angulus eſt, qui pluribus quam duobus angulis planis, in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punĉtum conſtitutis, continetur.

Cor. * Anguli ſolidi, qui planis angulis æqualibus continentur, quorum æqualium plana, ſingula ſingulis, ſimiliter ſunt inclinata, inter ſe æquales ſunt.

Sint anguli ſolidi ad A et F. Quorum ille ad A angulis planis contineatur BAC, CAD, DAE, EAB. Alter autem ad F angulis planis GFH, HFK, KFL,



L F G; qui prioribus, angulum A constituentibus, B A C, C A D, D A E, E A B singuli singulis sint æquales. Plana etiam B A C, C A D, D A E, E A B similiter inter se, atque inter se altera G F H, H F K, K F L, L F G, sint inclinata. Dico angulum solidum ad A solido ad F æqualem.

Admoveatur enim punctum A puncto F. Rectaque A B rectæ F G applicetur. Planum item A B C plano G F H superimponatur. Ita, propter angulum B A C angulo G F H æqualem, recta A C rectæ F H se applicabit. Jam vero plano B A C alteri G F H applicato, cum planis illis, B A C, G F H, altera illa, D A C, K F H, similiter sunt inclinata; omnino planum C A D plano H F K se applicabit. Rectis A C, F H congruentibus, id enim ostensum; propter angulum C A D angulo H F K æqualem, recta A D rectæ F K se applicabit. Rursum plano C A D alteri H F K applicato, cum planis illis, C A D, H F K, altera, D A E, K F L, similiter sint inclinata, planum D A E plano K F L se applicabit. Rectisque D A, F K congruentibus, id enim ostensum; propter angulum D A E angulo K F L æqualem, recta A E rectæ F L se applicabit. Rectæ igitur A B, A C, A D, A E rectis F G, F H, F K, F L, singulæ singulis, se applicuerint. Quapropter angulus solidus ad A solido ad F congruit, et cui congruit æqualis est. *Q. E. D.*

* Definitio XI. [IX.]

Similes sunt figuræ solidæ, quæ planis similibus continentur, multitudine æqualibus, et similiter inter se inclinatis: eâ nempe lege, ut similes sint, planorum in diversis figuris similium, inclinationes.

Cor. * Similes figuræ solidæ, quarum similia latera plana sunt etiam æqualia, inter se æquales sunt.

Nam si planum unius plano simili et æquali alterius superimponatur, sic ut latera planorum homologa et æqualia congruant, reliqua plana unius similibus et æqualibus alterius, singula singulis, congruent, et anguli solidi unius solidis alterius angulis, singuli quoque singulis, congruent. Quod facile quivis intelliget, qui demonstrationem Corollarii decimæ diligenter meditatus fuerit. Inde autem efficietur, figuras ipsas perfecte congruere.

XII.

[XII.] XII.

Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab uno plano ad unum punctum conſtituuntur.

[XIII.] XIII.

Priſma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt et æqualia, et ſimilia, et parallela; alia vero parallelogramma.

[XIV.] XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſeipſum rurſus revolvitur unde moveri cœperat.

[XV.] XV.

Axis autem ſphæræ eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

[XVI.] XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem, quod et ſemicirculi.

[XVII.] XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, et utrinque a ſphæræ ſuperficie terminata.

[XVIII.] XVIII.

Conus eſt, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat. Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: ſi vero minor, amblygonius: ſi vero major, oxygonius.

[XIX.] XIX.

Axis autem coni eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

[XX.] XX.

Baſis vero coni eſt circulus, qui a circumductâ rectâ lineâ deſcribitur.

[XXI.] XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde cœperat moveri.

XXII.

XXII. [XXII.]

Axis autem cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII. [XXIII.]

Baſes vero cylindri ſunt circuli a duobus adverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

XXIV. [XXIV.]

Similes coni et cylindri ſunt, quorum et axes, et baſium diametri proportionales ſunt.

XXV. [XXV.]

Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI. [XXVI.]

Tetraedrum eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

XXVII. [XXVII.]

Octaedrum eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

XXVIII. [XXVIII.]

Dodecaedrum eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus et æquilateris et æquiangulis contenta.

XXIX. [XXIX.]

Icoſaedrum eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

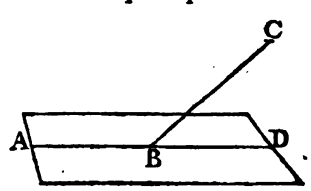
XXX. [XXX.]

Parallelepipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverſo parallelæ ſunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi.

Si enim fieri poteſt, rectæ lineæ A B pars quidem A B ſit in ſubjecto plano, pars vero B C in ſublimi. Erit recta linea quædam ipſi A B in directum continuata in ſubjecto plano. Sit D B. Duabus igitur datis rectis lineis A B C, A B D commune



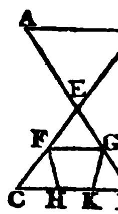
ſegmentum

ſegmentum eſt A B; quod fieri non poteſt †. Non igitur rectæ lineæ pars quædam eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi. *Q. E. D.*

[II.] PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, in uno ſunt plano; et omne triangulum in uno plano conſiſtit.

Duæ enim rectæ lineæ A B, C D ſe invicem in puncto E ſecent. Dico ipſas A B, C D in uno eſſe plano, et omne triangulum in uno plano conſiſtere. Sumantur enim in ipſis E B, E C quævis puncta B, C, et jungatur B C. Dico primum triangulum E B C conſiſtere in uno plano. Sumantur enim in ipſis E B, E C puncta quævis alia G, F; et in rectâ C B puncta quævis H, K; et F G, F H, G K jungantur. Si trianguli E B C pars quædam F H C, vel G B K, in ſubjecto plano eſt, reliqua vero in alio plano; erit et lineæ E B, vel E C, pars in ſubjecto plano, et pars in alio. Quod ſi trianguli E C B pars F C B G, ſit in ſubjecto plano, reliqua vero in alio; utrarumque rectarum linearum E C, E B quædam pars erit in ſubjecto plano, quædam vero in alio. Quod abſurdum eſſe oſtendimus [a]. Triangulum igitur E B C in uno eſt plano. In quo autem plano eſt B C E triangulum, in hoc eſt utraque ipſarum E C, E B: in quo autem utraque ipſarum E C, E B, in hoc et A B, C D. Ergo rectæ lineæ A B, C D in uno ſunt plano; et omne triangulum in uno plano conſiſtit. *Q. E. D.*

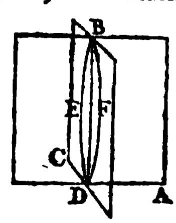


[a] 1. hujus.

[III.] PROP. III. THEOR.

Si duo plana ſe invicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.

Duo plana A B, B C ſe invicem ſecent, communis autem ipſorum ſectio ſit D B linea. Dico lineam D B rectam eſſe. Si enim non ita ſit, ducatur a puncto D ad B, in plano quidem A B recta linea D E B; in plano autem B C, recta linea D F B. Erunt utique duarum rectarum linearum D E B, D F B iidem termini, et ipſæ ſpatium continebunt; quod eſt ab-



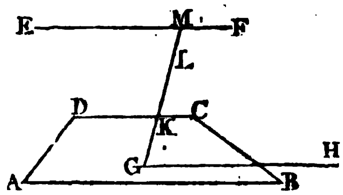
† *Cum naturæ Recti (τῦ εὐθέος) in lineis aperte contrarium eſſet.*

ſurdum.

furdum [b]. Si igitur duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit. *Q. E. D.* [b] Ax. 10.

Cor. 1. * Si linea recta subjecto plano sit parallela, et per punctum quodlibet eorum, quæ in plano, ducatur recta priori parallela, hæc in subjecto plano tota erit.

Puta rectam E F, plano subjecto A B C D parallelam. In plano A B C D sumatur utcunque punctum G; et per G ducatur G H, rectæ E F parallela. Dico rectam G H in plano A B C D totam esse. Non enim. Planum igitur parallelarum, E F, G H, planum



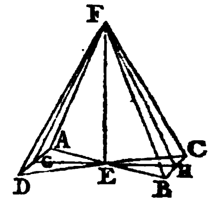
A B C D (cui parallelum esse nequit, cum punctum G utrique sit commune) secabit: et communis intersectio linea recta erit. Sit K L. Tres igitur rectæ E F, G H, K L sunt in uno eodemque plano. Punctum autem G, cum sit planis A B C D, E F G H commune, erit ad communem ipsorum intersectionem. Hoc est, ad rectam K L. Recta igitur K L rectæ G H in ipso puncto G occurrit; et rectæ E F, cui parallela est G H, nequit esse parallela, cum tamen sit in eodem plano. Occurret igitur K L rectæ E F. Occurrat in M. Punctum igitur M, cum sit ad communem planorum E F G H, A B C D intersectionem K L, omnino erit in plano A B C D. Est autem ad rectam E F. Punctum igitur M plano A B C D et rectæ E F est commune. Recta igitur E F plano subjecto A B C D in puncto M occurrit. Plano igitur A B C D recta E F non est parallela [c]. Quod hypothesi contrarium est. Recta igitur G H in plano A B C D. *Q. E. D.* [c] Def. 8. hujus.

Cor. 2. * Si rectæ E F in plano subjecto A B C D duci possit parallela G H; recta E F plano A B C D parallela erit. Non enim. Occurret igitur plano. Occurrat in M. Punctum igitur M, cum sit ad rectam E F, erit in plano parallelarum E F, G H. Est autem in plano A B C D [d]; ad communem igitur planorum A B C D, F E G H intersectionem, quæ est ipsa recta G H. Parallelæ igitur rectæ E F, G H in puncto M conveniunt. Quod est absurdum. Recta igitur E F plano A B C D nullibi occurrit. Recta igitur E F parallela est plano [c]. *Q. E. D.* [d] ex hyp.

[IV.] PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis, se invicem secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam E F duabus rectis lineis A B, C D, se invicem secantibus in E puncto, in ipso E ad rectos angulos insistat. Dico E F etiam plano per A B, C D ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ E A, E B, C E, D E inter se æquales: perque E ducatur recta linea G E H utcunque; et jungantur A D, C B; deinde a quovis puncto F ducantur F A, F G, F D, F C, F H, F B. Et quoniam duæ rectæ lineæ A E, E D duabus rectis lineis B E, E C æquales sunt, et angulos æquales A E D, C E B continent[e]; erit A D basis basi C B æqualis, et triangulum A E D triangulo C E B æquale[f]. Ergo et angulus D A E æqualis est angulo E B C. Est autem et angulus A E G æqualis angulo B E H[e]. Duo igitur triangula sunt A G E, B E H, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, et unum latus A E uni lateri E B æquale, quod est ad æquales angulos. Quare et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt[g]. Ergo G E quidem est æqualis ipsi E H; A G vero ipsi B H. Quod cum A E sit æqualis E B, communis autem et ad rectos angulos F E; erit basis A F basi F B æqualis[f]. Eâdem quoque ratione, et C F æqualis erit F D. Præterea quoniam A D est æqualis C B, et A F ipsi F B, erunt duæ F A, A D duabus F B, B C æquales, altera alteri; et ostensa est basis D F æqualis basi F C. Angulus igitur F A D angulo F B C est æqualis[h]. Rursus ostensa est A G æqualis B H; sed et A F ipsi F B æqualis. Duæ igitur F A, A G duabus F B, B H æquales sunt, et angulus F A G æqualis est angulo F B H, ut demonstratum fuit; basis igitur G F basi F H est æqualis[f]. Rursus quoniam G E ostensa est æqualis E H, communis autem E F; erunt duæ G E, E F æquales duabus H E, E F; et basis H F est æqualis basi F G. Angulus igitur G E F, angulo H E F est æqualis[h]; et idcirco rectus est uterque angulorum G E F, H E F. Ergo F E ad G H, utcunque per E ductam, rectos efficit angulos. Similiter ostendemus F E etiam ad omnes rectas



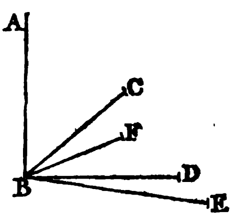
[e] 15. primi.
[f] 4. primi.
[g] 26. primi.
[h] 8. primi.

rectas lineas, quæ ipſam contingunt, et in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficere. Recta autem ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas, ipſam contingentes, et eodem exiſtentes plano, rectos efficit angulos[l]. Quare F E ſubjecto plano ad rectos angulos inſiſtit. [l] Def. 3. hujus. At ſubjectum planum eſt, quod per A B, C D rectas lineas ducitur. Ergo F E ad rectos angulos erit ducto per A B, C D plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis, ſe invicem ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*

PROP. V. THEOR. [V.]

Si recta linea tribus rectis lineis, ſeſe tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

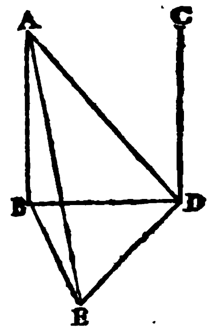
Recta linea quædam A B tribus rectis lineis B C, B D, B E, in contactu B, ad rectos angulos inſiſtat. Dico B C, B D, B E in uno plano eſſe. Non enim. Sed ſi fieri poteſt, ſint B D, B E quidem in ſubjecto plano; B C vero in ſublimi: et planum per A B, B C producatur. Communem utique ſectionem in ſubjecto plano faciet rectam lineam[k]; faciat B F. In uno igitur ſunt plano, per A B, B C ducto, tres rectæ lineæ A B, B C, B F. [k] 3. hujus. Et quoniam A B utrique ipſarum B D, B E ad rectos angulos inſiſtit, et ducto per ipſas D B, B E plano ad rectos angulos erit. Planum autem per D B, B E eſt ſubjectum planum. Ergo A B ad ſubjectum planum recta eſt[l]. Quare et ad omnes rectas lineas ipſam contingentes, quæ in eodem plano ſunt, rectos faciet angulos[m]; ſed ipſam tangit B F in ſubjecto exiſtens plano. Ergo angulus A B F rectus eſt. [l] 4. hujus. [m] Def. 3. hujus. Ponitur autem et A B C angulus rectus. Æqualis igitur eſt angulus A B F angulo A B C. Et in eodem ſunt plano; quod fieri non poteſt. Recta igitur linea B C non eſt in ſublimi. Quare tres rectæ lineæ B C, B D, B E in uno ſunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis, ſeſe tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. *Q. E. D.*



[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ A B, C D subjecto plano sint ad rectos angulos. Dico A B ipsi C D parallelam esse. Occurrant enim subjecto plano in punctis B, D; jungaturque B D recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur D E; et positâ D E ipsi A B æquali, jungantur B E, A E, A D. Quoniam igitur A B recta est ad subjectum planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt et in subjecto sunt plano, rectos angulos efficiet[a]. Contingit autem A B utraque ipsarum B D, B E, existens in subjecto plano. Ergo uterque angulorum A B D, A B E rectus est. Eâdem ratione rectus etiam est uterque ipsorum C D B, C D E. Et quoniam A B æqualis est ipsi D E, communis autem B D; erunt duæ A B, B D duabus E D, D B æquales; et rectos angulos continent; basis igitur A D basi B E est æqualis[o]. Rursus quoniam A B est æqualis D E, et A D ipsi B E; duæ A B, B E duabus E D, D A æquales sunt, et basis ipsarum A E communis; ergo angulus A B E angulo E D A est æqualis[p]. Sed A B E rectus est. Rectus igitur et E D A; et idcirco E D ad D A est perpendicularis. Sed et perpendicularis est ad utramque ipsarum B D, D C. Quare E D tribus rectis lineis B D, D A, D C in contactu ad rectos insistit angulos. Tres igitur rectæ lineæ B D, D A, C D in uno sunt plano[q]. In quo autem sunt B D, D A, in eo est A B, omne enim triangulum in uno est plano[r]. Ergo A B, B D, D C in uno plano sint necesse est: atque est uterque angulorum A B D, B D C rectus. Parallela igitur est A B ipsi C D[s]. Quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. *Q. E. D.*



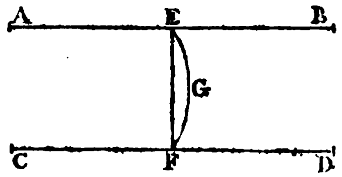
[a] Def. 3. hujus.
[o] 4. primi.
[p] 8. primi.
[q] 5. hujus.
[r] 2. hujus.
[s] 28. primi.

PROP.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, ſumantur autem in utrâque ipſarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta, in eodem erit plano, in quo et parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B, C D; et in utrâque ipſarum ſumantur quælibet puncta E, F. Dico rectam lineam, quæ puncta E, F conjungit, in eodem plano eſſe,



in quo ſunt parallelæ. Non enim; ſed ſi fieri poteſt, ſit in ſublimi, ut E G F; et per E G F planum ducatur, quod in ſubjecto plano ſectionem faciet rectam lineam [t]; fa- [t] 3. hujus.
ciat ut E F. Ergo duæ rectæ lineæ E G F, E F ſpatium continebunt; quod fieri non poteſt [u]. Non igitur quæ [u] Ax. 10.
a puncto E ad F ducitur recta linea, in ſublimi eſt plano; primi.
quare erit in eo, quod per A B, C D parallelas tranſit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, &c. *Q. E. D.*

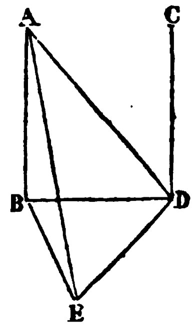
PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, altera autem ipſarum plano alicui ſit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B, C D, et altera ip- Vide fig.
ſarum A B ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. Dico et Prop. 6.
reliquam C D eidem plano ad rectos angulos eſſe. Occurrant enim A B, C D ſubjecto plano in punctis B, D; et B D jungatur. Ergo A B, C D, B D in uno ſunt plano [x]. [x] 7. hujus.
Ducatur ipſi B D ad rectos angulos in ſubjecto plano D E; et ponatur D E ipſi A B æqualis: junganturque B E, A E, A D. Et quoniam A B perpendicularis eſt ad ſubjectum planum; et ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, ſuntque in ſubjecto plano, perpendicularis erit [y]. Rectus igitur eſt uterque angulorum A B D, [y] Def. 3.
A B E. Quod cum in parallelas rectas lineas A B, C D hujus.
recta incidit B D, erunt anguli A B D, C D B duobus rectis æquales [z]. Rectus autem eſt A B D. Ergo et C D B [z] 29. primi.
eſt rectus; ac propterea C D perpendicularis eſt ad B D. Et quoniam A B eſt æqualis D E, communis autem B D;

 duæ

duæ A B, B D duabus E D, D B æquales ſunt; et angulus A B D eſt æqualis angulo E D B, rectus enim uterque eſt; baſis igitur A D baſi B E eſt æqualis [a]. Rurſus quoniam A B æqualis eſt D E, et B E ipſi A D; erunt duæ A B, B E duabus E D, D A æquales, altera alteri; et baſis earum communis A E. Quare angulus A B E eſt æqualis angulo E D A [b]. Rectus autem eſt A B E. Ergo et E D A eſt rectus, et E D ad D A perpendicularis. Sed et perpendicularis eſt ad B D. Ergo E D etiam ad planum per B D, D A perpendicularis erit [c]; et ad omnes rectas lineas, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam contingunt, rectos faciet angulos [d]. At in plano per B D, D A eſt D C, quoniam tam B D, quam B A eſt in plano parallelarum B A, D C. Quare E D ipſi D C eſt ad rectos angulos: ideoque C D ad rectos angulos eſt ipſi D E; ſed et etiam ipſi D B. Ergo C D duabus rectis lineis D E, D B ſe mutuo ſecantibus in communi ſectione D ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea plano per D E, D B eſt ad rectos angulos [c]. Planum autem per D E, D B eſt ſubjectum planum. Ergo C D ſubjecto plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*

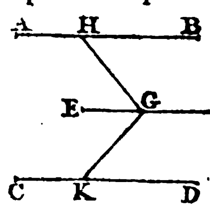


[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 4. hujus.
[d] Def. 3. hujus.

[IX.] PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, non exiſtentes in eodem in quo ipſa plano; etiam inter ſe parallelæ erunt.

Sit utraque ipſarum A B, C D parallela ipſi E F, non exiſtentes in eodem in quo ipſa plano. Dico A B ipſi C D parallelam eſſe. Sumatur in E F quodvis punctum G, a quo ipſi E F, in plano quidem per E F, A B tranſeunte, ad rectos angulos ducatur G H; in plano autem tranſeunte per E F, C D, rurſus ducatur ipſi E F ad rectos angulos G K. Et quoniam E F ad utramque ipſarum G H, G K eſt perpendicularis, erit E F etiam ad rectos angulos plano per G H, G K tranſeunti [e]. Atque eſt E F ipſi A B parallela. Ergo et A B plano per H G K ad rectos angulos eſt [f]. Eâdem ratione et C D plano per H G K eſt ad rectos



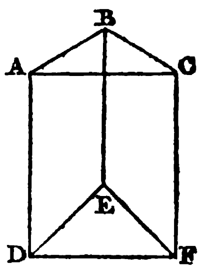
[e] 4. hujus.
[f] 8. hujus.

rectos angulos. Utraque igitur ipsarum A B, C D plano per H G K ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint; parallelæ erunt inter se[g]. Ergo A B ipsi C D est parallela. *Q. E. D.* [g] 6. hujus.

PROP. X. THEOR. [X.]

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes A B, B C, duabus rectis lineis D E, E F sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum A B C, angulo D E F æqualem esse. Assumantur enim B A, B C, E D, E F inter se æquales; et jungantur A D, C F, B E, A C, D F. Quoniam igitur B A ipsi E D æqualis est, et parallela; erit et A D æqualis, et parallela ipsi B E[h]. Eâdem ratione et C F ipsi B E æqualis, et parallela erit. Utraque igitur ipsarum A D, C F ipsi B E æqualis est, et parallela. Quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano, et inter se parallelæ erunt[i]. Ergo A D parallela est ipsi C F, et æqualis. Atque ipsas conjungunt A C, D F; et A C igitur ipsi D F æqualis est, et parallela[h]. Et quoniam duæ rectæ lineæ A B, B C duabus D E, E F æquales sunt, et basis A C est æqualis basi D F; erit angulus A B C angulo D E F æqualis[k]. Si igitur duæ rectæ lineæ sese contingentes duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. *Q. E. D.*



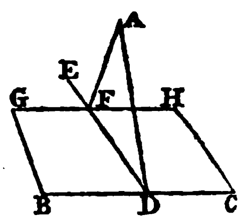
[h] 33. primi.
[i] 9. hujus.
[k] 8. primi.

PROP. XI. PROBL. [XI.]

A dato puncto in sublimi ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum B H. Oportet a puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque B C; et a puncto A ad B C perpendicularis agatur A D[l]. Siquidem igitur A D perpendicularis sit etiam ad subjectum planum, factum jam erit, quod [l] 33. primi.

proponebatur. Sin minus; ducatur a puncto D ipsi B C in subjecto plano ad rectos angulos
[m] 11. primi. D E [m]; et a puncto A ad D E perpendicularis ducatur A F [n]. Dico
[n] 12. primi.
A F subjecto plano B H perpendicularem esse. Ducatur enim per F ipsi B C parallela G H. Quoniam B C utrique ipsarum D A, D E est ad rectos angulos; erit et B C ad rectos angulos plano per E D, D A transeunti [o]. Quin ipsi B C parallela est G H. Si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit [p]. Quare et G H plano per E D, D A transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt, est perpendicularis [q]. Contingit autem ipsam A F existens in plano per E D, D A. Ergo G H perpendicularis est ad A F. Et ob id A F est perpendicularis ad G H. Est autem A F ad D E perpendicularis. Ergo A F perpendicularis est ad utramque ipsarum H G, D E. Si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat; etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit [o]. Quare A F plano per E D, G H ducto est ad rectos angulos. Planum autem per E D, G H est subjectum planum B H. Ergo A F ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A ad subjectum planum perpendicularis recta linea ducta est A F. *Q. E. F.*



[o] 4. hujus.
[p] 8. hujus.
[q] Def. 3. hujus.

Cor. 1.* Si a puncto in sublimi A in planum subjectum B C H G recta A F ad perpendiculum deducta sit; et a puncto F, ubi recta deducta incidit plano, ad rectam quamlibet in plano B C ad perpendiculum ducatur F D, rectæ illi B C in D occurrens; juncta A D eidem rectæ B C ad perpendiculum erit.

Ducatur enim in plano B C H G recta G H ipsi B C parallela. Recta igitur F D, quæ ad perpendiculum est rectæ B C, rectæ etiam G H ad perpendiculum erit [r]. Eadem autem G F ad perpendiculum rectæ A F [s]. Recta igitur G F, quæ duabus rectis D F, F A in puncto F occurrentibus ad perpendiculum est, plano trianguli A F D

[r] 29. primi.

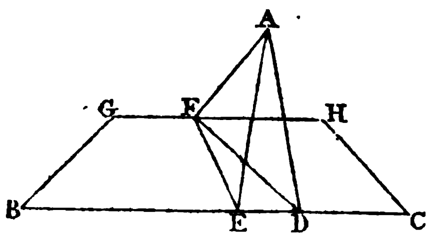
ad

ad perpendiculum erit [s]. Recta autem B D rectæ G F [s] parallela. Quare B D eidem plano A F D ad perpendiculum erit [t]. Angulus igitur B D A rectus [u]. *Q. E. D.*

[s] 4. hujus. [t] 8. hujus. [u] Def. 3. hujus.

Cor. 2. * Si a puncto in sublimi A in planum subjectum B C G H recta A F ad perpendiculum deducatur, et si in rectam quamlibet in eodem plano B C alia ad perpendiculum deducatur A D; juncta D F eidem B C ad perpendiculum erit.

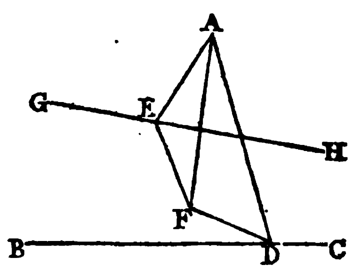
Non enim. A puncto igitur F in rectam B C ad perpendiculum deducatur F E. Juncta A E rectæ B C ad



perpendiculum erit [x]. Trianguli igitur A E D anguli duo A D E, A E D duobus rectis sunt æquales. Quod est absurdum.

[x] Cor. 1.

Cor. 3. * Si a puncto in sublimi A in rectas duas B C, G H in subjecto plano, quæ non sunt inter se parallelæ, rectæ A D, A E ad perpendiculum deducantur; et a punctis D, E eisdem rectis B C, G H ad perpendiculum educantur in subjecto plano D F, E F, quæ sibi mutuo in F occurrant; recta A F, quæ jungit



punctum mutui occursus F, et punctum in sublimi A, ad perpendiculum erit subjecto plano. Nam recta, a puncto A in subjectum planum B C H G ad perpendiculum deducta, occurret plano in puncto aliquo rectæ D F [y]. Et ob eandem rationem in puncto aliquo rectæ E F. In puncto igitur F, duarum D F, E F communi. *Q. E. D.*

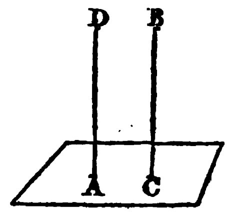
[y] Per constr. Probl.

PROP.

[XII.] PROP. XII. PROBL.

Dato plano, a puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum; punctum autem, quod in ipso sit, A. Oportet a puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctum sublime B, a quo ad subjectum planum agatur perpendicularis B C[x]; et per A ipsi B C parallela ducatur A D[y]. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt A D, C B, una autem ipsarum B C subjecto plano est ad rectos angulos; et reliqua A D subjecto plano ad rectos angulos erit[z]. Dato igitur plano a puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. Q. E. F.

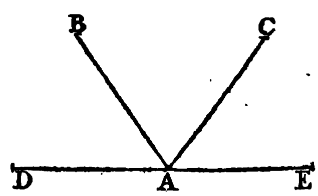


x 11. hujus.
y 31. primi.
z 8. hujus.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, a puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eâdem parte.

Si enim fieri potest, dato plano, a puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ A B, A C ad rectos angulos constituantur ex eâdem parte; et ducatur planum per B A, A C, quod faciet sectionem per A in subjecto plano rectam lineam[a]. Faciat D A E. Ergo rectæ lineæ A B, A C, D A E in uno sunt plano. Et quoniam C A subjecto plano ad rectos angulos est; et ad omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos[b]. Contingit autem ipsam D A E, quæ est in subjecto plano. Angulus igitur C A E rectus est. Eâdem ratione et rectus est B A E. Ergo angulus C A E ipsi B A E est æqualis. Et in uno sunt plano; quod fieri non potest. Non igitur dato plano, a puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eâdem parte. Q. E. D.



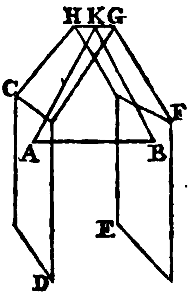
a 3. hujus.
b Def. 3. hujus.

PROP.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Ad quæ plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt.

Recta quædam linea A B ad utrumque ipſorum planorum C D, E F ſit perpendicularis. Dico ea plana parallela eſſe. Si enim non ita ſit, producta convenient inter ſe: conveniant, et communem ſectionem faciant rectam lineam G H; et in ipſa G H ſumpto quovis puncto K, jungatur A K, B K. Quoniam igitur A B perpendicularis eſt ad E F planum; erit et perpendicularis ad ipſam B K rectam lineam in plano E F producto exiſtentem. Quare angulus A B K rectus eſt. Eâdem ratione et B A K



eſt rectus: ideoque trianguli A B K duo anguli A B K, B A K duobus rectis ſunt æquales; quod fieri non poteſt[c]. [c] 17. primi.
Non igitur plana C D, E F producta inter ſe convenient. Quare C D, E F parallela ſint neceſſe eſt. Ad quæ igitur plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. *Q. E. D.*

Cor. * Et e converſo, ſi ſint duo plana parallela, quæ alteri ipſorum ad perpendiculum eſt linea recta, ea alteri etiam ad perpendiculum erit. Plano enim D C ad perpendiculum ſit recta B A. Dico plano alteri E F, priori parallelo, eandem A B ad perpendiculum eſſe. Non enim. Duci igitur poterit in plano E F recta, quæ angulum cum A B obliquum faciat[d]. Ducatur B K. Duarum autem A B, B K planum ſecabit planum B C in lineâ rectâ[e]. Secet in A K. Angulus igitur B A K rectus eſt[d]. Angulus autem A B K obliquus[f]. Duo igitur B A K, A B K duobus rectis non ſunt æquales. Rectæ igitur A K, B K, cum in eodem ſint plano, in puncto aliquo convenient[g]. Concurſus ſit punctum K. Jam cum omne punctum in rectâ A K ſit in plano D C, et omne punctum in rectâ B K in plano E F; punctum K, quod in utrâque eſt rectâ, planis duobus D C, E F commune erit. Plana igitur D C, E F non ſunt inter ſe parallela. Quod hypotheſi contrarium eſt. Si ſint igitur duo plana parallela &c. *Q. E. D.*

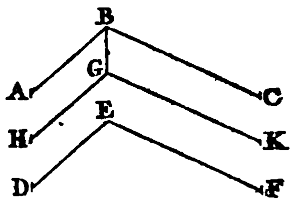
[d] Def. 3. hujus.
[e] 3. hujus.
[f] Per conſtruct.
[g] Ax. 12. primi.

PROP.

[XV.] PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes A B, B C duabus rectis lineis sese tangentibus D E, E F parallelæ sint, et non in eodem plano. Dico plana, quæ per A B, B C, D E, E F transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur a puncto B ad planum, quod per D E, E F transit, perpendicularis B G, quæ plano in



puncto G occurrat; et per G ducatur ipsi quidem E D parallela G H; ipsi vero E F parallela G K. Itaque quoniam B G perpendicularis est ad planum per D E, E F; et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, et in eodem sunt plano, rectos faciet angulos[d]. Contingit autem ipsam utraque earum G H, G K, quæ sunt in eodem plano. Rectus igitur est uterque angulorum B G H, B G K. Et quoniam B A parallela est ipsi G H, (nimirum cum utraque earum ipsi D E parallela sit) anguli G B A, B G H duobus rectis sunt æquales[e]. Rectus autem est B G H. Ergo et G B A rectus erit, ideoque G B ad B A est perpendicularis. Eâdem ratione et G B est perpendicularis ad B C. Cum igitur recta linea B G duabus rectis lineis B A, B C se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit B G etiam ad planum per B A, B C ductum perpendicularis[f]. Atqui est ad planum per D E, E F perpendicularis. Ergo B G perpendicularis est ad utrumque planorum, quæ per A B, B C, D E, E F transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt[g]. Parallelum igitur est planum per A B, B C plano per D E, E F. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana, parallela erunt. *Q. E. D.*

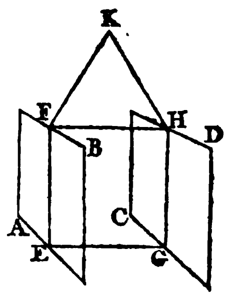
[d] Def. 3. hujus.
[e] 29. primi.
[f] 4. hujus.
[g] 14. hujus.

PROP.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

Duo plana parallela A B, C D a plano aliquo E F H G secentur; communes autem ipsorum sectiones sint E F, G H. Dico E F ipsi G H parallelam esse. Si enim non sint parallelæ, E F, G H productæ inter se convenient, vel ad partes F H, vel ad partes E G. Producantur prius ad partes F H, et conveniant in K. Quoniam igitur E F K est in plano A B; et omnia quæ in E F K sumuntur puncta, in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ sunt in E F K, est ipsum K punctum. Ergo K est in plano A B. Eâdem ratione et K est in C D plano. Ergo plana A B, C D producta inter se convenient. Non conveniunt autem, cum parallelà ponantur. Non igitur E F, G H rectæ lineæ productæ convenient ad partes F, H. Similiter demonstrabimus neque ad partes E, G convenire, si producantur. Quæ autem neutrâ ex parte conveniunt, parallelæ sunt. Ergo E F ipsi G H est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. *Q. E. D.*

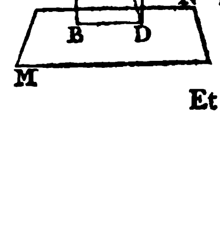


PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si duæ rectæ lineæ a parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

Duæ rectæ lineæ A B, C D a parallelis planis G H, K L, M N secentur in punctis A, E, B, C, F, D. Dico ut A E recta linea ad ipsam E B, ita esse C F ad F D. Jungantur enim A C, B D, A D; et occurrat A D plano K L in puncto X; et E X, X F jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela K L, M N a plano E B D X secantur, communes ipsorum sectiones E X, B D parallelæ sunt [h]. Eâdem ratione, quoniam duo plana parallela G H, K L a plano A X F C secantur, communes ipsorum sectiones A C, F X sunt parallelæ.

[h] 16. hujus.



Et

Et quoniam uni laterum trianguli A B D, videlicet ipſi B D, parallela ducta eſt E X, ut A E ad E B, ita erit A X ad X D[i]. Rurſus, quoniam uni laterum trianguli A D C, nempe ipſi A C, parallela ducta eſt X F, erit ut A X ad X D, ita C F ad F D[i]. Oſtenſum autem eſt ut A X ad X D, ita eſſe A E ad E B. Ut igitur A E ad E B, ita eſt C F ad F D[k]. Quare ſi duæ rectæ lineæ a parallelis ſecentur planis, in eaſdem proportiones ſecabuntur. *Q. E. D.*

[i] 2. ſexti.

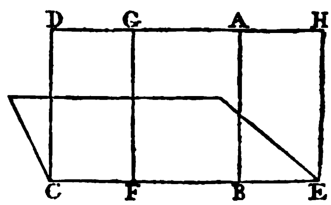
[k] 11. quinti.

[XVIII.]

PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos; et omnia quæ per ipſum tranſeunt plana, eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam A B ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. Dico et omnia plana, quæ per ipſam A B tranſeunt, ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe. Producatur enim per A B planum D E, ſitque plani D E, et ſubjecti plani communis ſectio C E; et ſumatur in C E quodvis punctum F; a quo ipſi C E ad rectos angulos, in D E plano, ducatur F G. Quoniam igitur A B ad ſubjectum planum eſt perpendicularis; et ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt et in eodem ſunt plano, perpendicularis erit[l]. Quare etiam ad C E eſt perpendicularis. Angulus igitur A B F rectus eſt: ſed et G F B eſt rectus. Ergo A B parallela eſt ipſi F G. Eſt autem A B ſubjecto plano ad rectos angulos. Et F G igitur eidem plano ad rectos angulos erit[m]. At planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno planorum, reliquo plano ad rectos angulos ſint[n]: at communi planorum ſectioni C E, in uno plano D E, ad rectos angulos ducta F G, oſtenſa eſt ſubjecto plano ad rectos eſſe angulos. Ergo planum D E rectum eſt ad ſubjectum planum. Similiter demonſtrabuntur et omnia quæ per A B tranſeunt plana ſubjecto plano recta eſſe. Si igitur recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos; et omnia quæ per ipſam tranſeunt plana, eidem plano ad rectos angulos erunt. *Q. E. D.*



[l] Def. 3. hujus.

[m] 8. hujus.

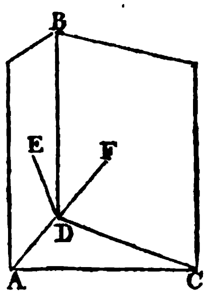
[n] Def. 4. hujus.

PROP.

PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

Si duo plana, se invicem secantia, plano alicui sint ad rectos angulos, et communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia A B, B C subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit B D. Dico B D subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim. Plana A B, B C secent subjectum planum, secundum rectas A D, C D. Jam neutri illarum ad rectos erit illa B D. Nam si alterutri illarum ad rectos esset, esset etiam ad rectos subjecto plano A D C [o]; cujus contrarium posuimus. A puncto igitur D ducatur, in plano quidem A B, ipsi A D rectæ lineæ ad rectos angulos D E: in plano autem B C ducatur ipsi C D ad rectos angulos D F. Et quoniam planum A B ad subjectum planum rectum est, et communi ipsorum sectioni A D ad rectos angulos in plano A B ducta est D E; erit D E ad subjectum planum perpendicularis [o]. Similiter ostendemus et D F perpendicularem esse ad subjectum planum. Quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ sunt ex eâdem parte; quod fieri non potest [p]. Recta igitur B D subjecto plano non est non ad rectos. Quare D B subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana, se invicem secantia, plano alicui sint ad rectos angulos, et communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*



[o] Def. 4. hujus.

[p] 13. hujus.

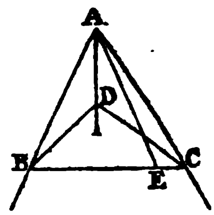
PROP. XX. THEOR. [XX.]

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis B A C, C A D, D A B contineatur. Dico angulorum B A C, C A D, D A B duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim B A C, C A D, D A B anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Sin minus, trium maximus sit B A C. Manifestum est maximum

B A C,

B A C cum reliquorum alterutro, tertio majorem esse. Sed dico duos B A D, C A D simul sumptos, maximo B A C majores esse. Ad rectam enim lineam A B, et ad punctum in ipsâ A, constituatur angulo D A B, in plano per B A, A C transeunte, æqualis angulus B A E [q].



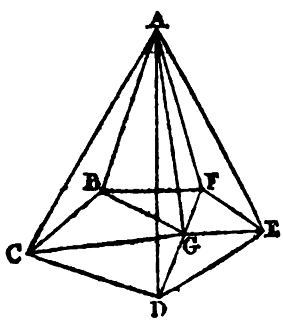
In rectâ A D sumatur utcunque punctum D, ponaturque ipsi A D æqualis A E; et per E ducta B E C secet rectas lineas A B, A C in punctis B, C; et D B, D C jungantur. Itaque quoniam D A est æqualis A E, communis autem A B; duæ D A, A B æquales sunt duabus A E, A B; et angulus D A B æqualis est angulo B A E. Basis igitur D B basi B E est æqualis [r]. Et quoniam duæ D B, D C ipsâ B C majores sunt [s], quarum D B æqualis ostensa est ipsi B E; erit reliqua D C quam reliqua E C major. Quod cum D A sit æqualis A E, communis autem A C, et basis D C major basi E C; erit angulus D A C angulo E A C major [t]. Sed ex constructione est D A B angulus æqualis ipsi B A E. Quare D A B, D A C anguli angulo B A C majores sunt. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. *Q. E. D.*

[q] 23. primi. [r] 4. primi. [s] 20. primi. [t] 25. primi.

[XXI.] PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit angulus solidus ad A planis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B comprehensus. Dico planos illos, simul sumptos, quatuor rectis esse minores. Plana angulorum omnium, qui solidum ad A comprehendunt, secentur plano, cujus communes cum illis interfectiones sint rectæ B C, C D, D E, E F, F B, quæ figuram aliquam rectilineam (trigonam, tetragonam, vel etiam polygoniam, prout numerus angulorum fuerit qui solidum componunt) in plano illo secante formabunt.



A puncto

A puncto A in planum illud ad perpendiculum deducatur AG, quæ plano in G occurrat[s]. Jungantur GB, GC, GD, [s] 11. hujus.
GE, GF. Jam quot sunt triangula ABC, ACD, ADE, AEF, AFB vertice communi A, tot erunt in plano GBC, GCD, GDE, GEF, GFB vertice communi G. Quapropter anguli omnes omnium triangulorum, vertice communi A, simul sumpti, angulis omnibus omnium triangulorum in plano, vertice communi G, simul sumptis, æquales erunt. Sed anguli omnes omnium triangulorum in plano, vertice communi G, anguli sunt figuræ rectilinearis BCDEF cum angulis omnibus circa punctum G. Anguli igitur omnes omnium triangulorum vertice communi A, angulis omnibus figuræ BCDEF cum angulis circa punctum G æquales sunt. Jam vero cum solidus angulus ad B tribus planis angulis contineatur, ABF, ABC, CBF, duo quilibet eorum reliquo majores erunt[t]. Duo igitur ABC, ABF reliquo CBF majores. [t] 20. hujus.
Eodem modo ostendemus (propter angulum solidum ad C tribus ACB, ACD, BCD comprehensum) duos ACB, ACD simul reliquo BCD majores. Et sic per angulos reliquos omnes ad puncta D, E, F pergendo, efficiemus tandem angulos omnes ad bases triangulorum omnium ABC, ACD, ADE, AEF, AFB, quorum vertex communis A, angulis omnibus figuræ BCDEF majores esse. Jam vero cum anguli omnes triangulorum omnium, vertice communi A, angulis omnibus figuræ planæ BCDEF cum omnibus circa punctum G æquales sint, (id enim ostensum) omnes autem ad bases triangulorum omnibus figuræ planæ majores; omnino omnes ad verticem triangulorum communem A, qui sunt omnes, qui solidum ad A comprehendunt, omnibus circa punctum G minores erunt. Omnes autem circa G quatuor rectis sunt æquales[u]. Omnes igitur, qui solidum ad A comprehendunt, simul sumpti, quatuor rectis sunt minores. [u] Cor. 2. 15. prim
Q. E. D.

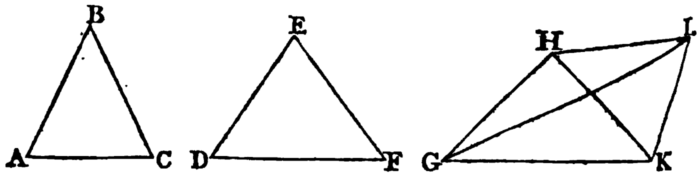
* SCHOLION.

Theonis demonstrationem repudiavimus, utpote propositionis generalis minime generalem. Demonstrationi huic nostræ haud absimilem, collatione factâ angulorum planorum solidum continentium cum angulis figuræ in plano polygoniæ, sed alio modo concinnatam, et ante nos Simpsonus protulit; qui tamen casum anguli solidi, tribus planis comprehensi, ab aliis inutiliter separavit.

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis, quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani, A B C, D E F, G H K, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti. Et æquales sint lineæ rectæ A B, B C, D E, E F, G H, H K.



Jungantur autem A C, D F, G K. Dico, ex tribus lineis rectis, quæ sint tribus illis A C, D F, G K singulæ singulis æquales, triangulum posse constitui. Et primum, si æquales inter se sint anguli tres, A B C, D E F, G H K, manifestum est, cum in hoc casu æquales sint rectæ A C, D F, G K, ex tribus, quæ illis æquales sint, triangulum posse constitui. Sed anguli illi ad B, E, H non sint inter se æquales. Et ad rectam H K, ad punctum H, constituatur angulus K H L, angulo A B C æqualis. Capiatur H L, uni ipsarum A B, B C, D E, E F, G H, H K æqualis, et jungantur G L, K L. Jam in triangulis A B C, K H L, cum sint duæ A B, B C duabus K H, H L æquales, et angulus A B C angulo K H L æqualis; erit basis A C, æqualis basi K L [x]. Et quoniam anguli A B C, G H K, simul sumpti, angulo D E F sunt majores; erit angulus G H L (qui duobus illis A B C, G H K, simul sumptis, est æqualis) angulo D E F major. Rursum quoniam duæ G H, H L duabus D E, E F, singulæ singulis, sunt æquales, et angulus G H L major angulo D E F; erit basis G L basi D F major [y]. Sed duæ G K, K L simul ipsâ G L sunt majores [z]. Multo igitur majores quam D F. Sed A C æqualis est ipsi K L. Duæ igitur G K, A C simul ipsâ D F sunt majores. Similiter demonstrabimus, et A C, D F simul ipsâ G K majores. Et D F, G K simul ipsâ A C majores. Fieri igitur potest, ut ex tribus lineis rectis, quæ tribus illis A C, D F, G K, singulæ singulis, sint æquales, triangulum constituatur. *Q. E. D.*

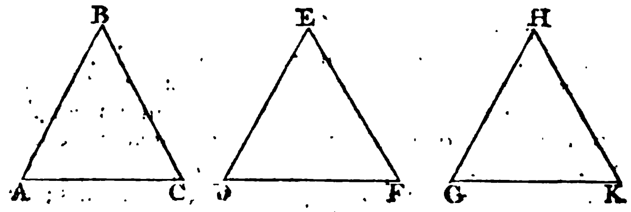
[x] 4. primi.
[y] 24. primi.
[z] 20. primi.

PROP.

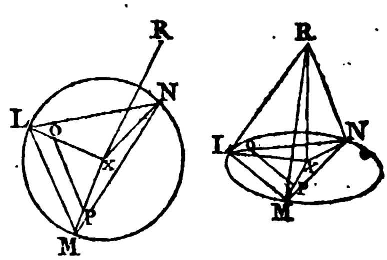
PROP. XXIII. PROBL. [XXIII.]

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. Oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani A B C, D E F, G H K, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres anguli quatuor rectis minores. Oportet ex

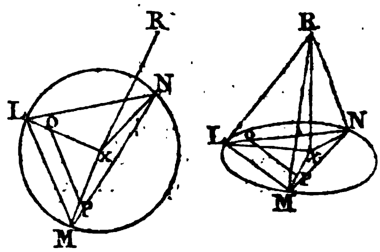


angulis, qui ipsis A B C, D E F, G H K æquales sint, solidum angulum constituere. Abscindantur æquales A B, B C, D E, E F, G H, H K; et A C, D F, G K jungantur. Fieri igitur potest ut ex rectis lineis, quæ ipsis A C, D F, G K æquales sint, constituatur triangulum [a]. Itaque constituatur L M N; ita ut L M quidem sit æqualis ipsi A C, M N vero ipsi D F; et præterea L N ipsi G K [b]; et circa L M N triangulum circulus L M N describatur [c]: sumaturque ipsius centrum X, quod vel erit intra triangulum L M N, vel in laterum ejus uno, vel extra. Sit primo intra; et L X, M X, N X jungantur. Dico A B majorem esse ipsâ L X. Si enim non ita sit, vel A B erit æqualis ipsi L X, vel eâ minor. Sit primo æqualis. Quoniam igitur A B est æqualis L X, atque est A B ipsi B C æqualis; erit L X æqualis B C. Est autem L X æqualis X M. Duæ igitur A B, B C duabus L X, X M æquales sunt, altera alteri; et A C basis basi L M æqualis ponitur. Quare angulus A B C angulo L X M est æqualis [d]. Eâdem ratione et angulus quidem D E F est æqualis angulo M X N, angulus vero G H K angulo



a 22. hujus.
b 22. primi.
c 5. quarti.
d 8. primi.

gulo N X L. Tres igitur anguli A B C, D E F, G H K tribus L X M, M X N, N X L æquales sunt. Sed tres L X M, M X N, N X L quatuor rectis sunt æquales [e]. Ergo et tres A B C, D E F, G H K æquales erunt quatuor rectis. Atqui ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. Non igitur A B ipsi L X est æqualis.

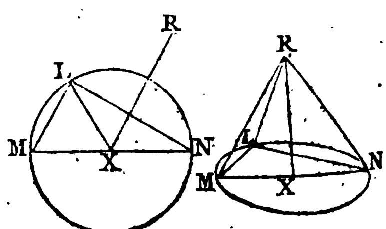


[e] Cor. 2. 15. primi.

Dico præterea neque A B minorem esse ipsâ L X. Si enim fieri potest, sit minor, et ponatur ipsi quidem A B æqualis X O, ipsi vero B C æqualis X P; et O P jungatur. Quoniam igitur A B est æqualis B C, et X O ipsi X P æqualis erit. Ergo et reliqua O L reliquæ P M est æqualis; ac propterea L M parallela est ipsi O P [f]; et L M X triangulum triangulo O P X æquiangulum. Est igitur ut X L ad L M, ita X O ad O P [g]; et permutando ut X L ad X O, ita L M ad O P. Major autem est L X quam X O. Ergo et L M quam O P est major. Sed L M posita est æqualis A C. Et A C igitur quam O P major erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ A B, B C duabus O X, X P æquales sunt, et basis A C major basi O P; erit angulus A B C angulo O X P major [h]. Similiter demonstrabimus et D E F angulum majorem esse angulo M X N, et angulum G H K angulo N X L; tres igitur anguli A B C, D E F, G H K tribus L X M, M X N, N X L sunt majores. At anguli A B C, D E F, G H K quatuor rectis minores ponuntur. Multo igitur anguli L X M, M X N, N X L minores erunt quatuor rectis. Sed et æquales [e]; quod est absurdum. Non igitur A B minor est quam L X. Ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo major sit necesse est.

[f] 2. sexti.
[g] 4. sexti.
[h] 25. primi.

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in M N, quod sit X, et X L jungatur. Dico rursus A B majorem esse ipsâ L X. Si enim non

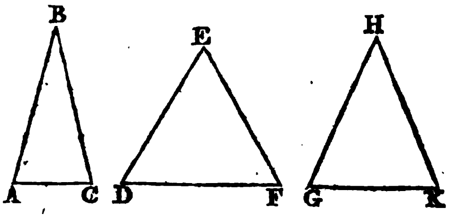


ita

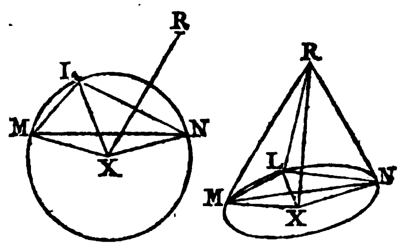
ita fit, vel A B eft æqualis L X, vel ipfâ minor. Sit primo æqualis. Duæ igitur A B, B C, hoc eft, D E, E F, duabus M X, X L, hoc eft, ipfi M N æquales funt. Sed M N ponitur æqualis D F. Ergo D E, E F ipfi D F funt æquales; quod fieri non poteft [p]. Non igitur A B eft æqualis L X. Similiter neque minor. Multo enim magis id, quod fieri non poteft, fequeretur. Ergo A B ipfâ L X major eft.

[p] 20. primi.

Sed fit centrum circuli extra triangulum L M N, quod fit X; et L X, M X, N X jungantur. Dico et fic A B ipfâ L X majorem effe. Si enim non ita fit, vel æqualis eft, vel minor. Sit primo æqualis. Ergo duæ A B, B C duabus M X, X L æquales funt, altera alteri; et bafis A C eft æqualis bafi M L. Angulus igitur A B C æqualis eft angulo M X L. Eâdem ratione et G H K angulus ipfi L X N eft æqualis; ac propterea totus M X N



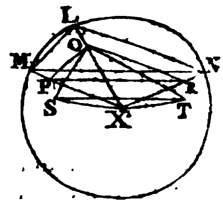
æqualis duobus A B C, G H K. Sed et anguli A B C, G H K angulo D E F majores funt. Et angulus igitur M X N ipfo D E F eft major. At quoniam duæ D E,



E F duabus M X, X N æquales funt, et bafis D F æqualis bafi M N; erit M X N angulus angulo D E F æqualis. Oftenfus autem eft major; quod eft abfurdum. Non igitur A B eft æqualis L X.

 Dico

Dico vero neque minorem esse A B ipsâ L X. Si enim fieri potest, sit minor; et ipsi quidem A B æqualis ponatur X O, ipsi vero B C æqualis X P; et O P jungatur. Quoniam igitur A B ipsi B C est æqualis; erit X O æqualis X P. Ergo et reliqua O L reliquæ P M æqualis.



[k] 2. sexti. Parallela igitur est L M ipsi P O[k]; et triangulum L M X triangulo P X O æquiangulum est. Quare ut X L ad

[l] 4. sexti. L M, ita X O ad O P[l]; et permutando ut L X ad X O, ita L M ad O P. Major autem est L X quam X O. Ergo L M quam O P est major. Sed L M est æqualis A C. Et A C igitur quam O P major erit. Itaque quoniam duæ A B, B C duabus O X, X P sunt æquales, altera alteri; et basis A C major est basi O P; erit angulus A B C angulo

[m] 25. primi. O X P major[m]. Similiter si X R sumatur æqualis utrivis ipsarum X O, X P, et jungatur O R; ostendemus angulum G H K angulo O X R majorem. Constituatur ad rectam lineam L X, et punctum in ipsâ X, angulo quidem A B C æqualis angulus L X S, angulo autem G H K æqualis L X T; et ponatur utraque X S, X T ipsi O X æqualis; junganturque O S, O T, S T. Et quoniam duæ A B, B C duabus O X, X S æquales sunt, et angulus A B C æqualis angulo O X S; erit basis A C, hoc est, L M basi O S æqualis. Eâdem ratione, et L N est æqualis ipsi O T. Quod cum duæ M L, L N duabus O S, O T sint æquales; et angulus M L N major angulo S O T†; erit et basis M N basi S T major. Sed M N est æqualis D F. Ergo et D F quam S T major erit. Quoniam igitur duæ D E, E F duabus S X, X T æquales sunt, et basis D F major basi S T; erit angulus D E F angulo S X T major. Æqualis autem est angulus S X T angulis A B C, G H K. Ergo D E F angulus angulis A B C, G H K major est; sed et minor; quod fieri non potest.

Utcunque igitur cadat centrum circuli, recta A B major erit quam L X.

† *Angulus autem* M L N *angulo* S O T *major sic ostenditur. In triangulo isoscele* L X M, *angulus ad verticem* L X M *angulo* O X S, *ad verticem isoscelis*

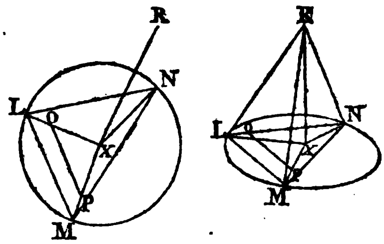
[o] Ex construct. O X S, *minor est*[o]. *Quapropter angulus* X L M *ad basin isoscelis* L X M *angulo* X O S *ad basin isoscelis* O X S *major erit*[p]. *Simili modo ostendatur angulus*

[p] 5. & 32. primi. X L N *angulo* X O T *major. Totus igitur* M L N, *ex duobus* X L M, X L N *compositus, toto* S O T, *ex duobus* X O S, X O T *composito, major.* Q. E. D.

Consti-

Constituatur a puncto X circuli L M N plano ad rectos angulos X R [n]. Et excessui, quo quadratum ex A B superat quadratum ex L X, ponatur æquale quadratum, quod sit ex R X; et R L, R M, R N jungantur. Quoniam igitur R X perpendicularis est ad planum

n 12. hujus.



L M N circuli, et ad unamquamque ipsarum L X, M X, N X erit perpendicularis [o]. Et quoniam L X est æqualis X M, communis autem et ad rectos angulos X R; erit basis L R æqualis basi R M [p]. Eâdem ratione, et R N utrique ipsarum R L, R M est æqualis. Tres igitur rectæ lineæ R L, R M, R N inter se æquales sunt. Et quoniam quadratum ex X R ponitur æquale excessui, quo quadratum ex A B superat quadratum ex L X; erit quadratum ex A B quadratis ex L X, X R æquale. Quadratis autem ex L X, X R æquale est quadratum ex R L [q]; rectus enim angulus est L X R. Ergo quadratum ex A B quadrato ex R L æquale erit; ideoque A B ipsi R L est æqualis. Sed ipsi quidem A B æqualis est unaquæque ipsarum B C, D E, E F, G H, H K: ipsi vero R L æqualis utraque ipsarum R M, R N. Unaquæque igitur ipsarum A B, B C, D E, E F, G H, H K unicuique ipsarum R L, R M, R N est æqualis. Quod cum duæ R L, R M duabus A B, B C æquales sint, et basis L M ponatur æqualis basi A C: erit angulus L R M æqualis angulo A B C [r]. Eâdem ratione, et angulus quidem M R N angulo D E F, angulus autem L R N angulo G H K est æqualis. Ex tribus igitur angulis planis L R M, M R N, L R N, qui æquales sunt tribus datis A B C, D E F, G H K, solidus angulus constitutus est ad R. *Q. E. F.*

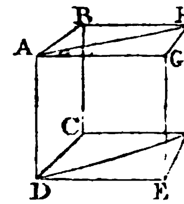
o Def. 3. hujus.
p 4. primi.
q 47. primi.
r 8. primi.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, et æqualia, et parallelogramma erunt.

Solidum enim C D G H parallelis planis A C, G F; B G, C E; F B, A E contineatur. Dico opposita ejus plana, et æqualia, et parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela B G, C E a plano A C secantur, communes

[s] 16. hujus. ipsorum sectiones parallelæ sunt[s]: ergo A B ipsi C D est parallela. Rursus quoniam duo plana parallela B F, A E secantur a plano A C, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt[s]: parallela igitur est A D ipsi B C. Ostensa autem est et A B parallela C D. Ergo A C parallelogrammum erit. Similiter demonstrabimus, et unumquodque ipsorum C E, F G, G B, B F, A E parallelogrammum esse. Jungantur A H, D F. Et quoniam parallela est A B quidem ipsi D C; B H vero ipsi C F; erunt duæ A B, B H, sese tangentes, duabus D C, C F, sese tangentibus, parallelæ; et non in eodem plano: quare æquales



[t] 10. hujus. angulos continebunt[t]. Angulus igitur A B H angulo D C F est æqualis. Et quoniam duæ A B, B H duabus
[u] 34. primi. D C, C F æquales sunt[u]; et angulus A B H æqualis
[x] 4. primi. angulo D C F; erit basis A H basi D F æqualis[x]; et A B H triangulum æquale triangulo D C F. Quod cum ipsius quidem A B H trianguli duplum sit B G parallelogrammum; ipsius vero D C F trianguli, duplum parallelo-
[y] 41. primi. grammum C E[y]: erit B G parallelogrammum æquale parallelogrammo C E. Similiter demonstrabimus et A C parallelogrammum parallelogrammo G F; et parallelogrammum A E parallelogrammo B F æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, et æqualia, et parallelogramma sunt. *Q. E. D.*

Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidum parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, et æqualia esse, et similia; quippe quæ et singulos angulos æquales, et circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

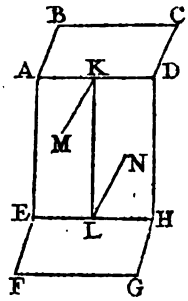
* LEMMA.

Si quo plana parallela secentur plano, similiter ei inclinata sunt.

Plana parallela A B C D, E F G H plano A E H D secentur. Dico plana A B C D, E F G H plano A E H D similiter inclinata esse. Sint rectæ A D, E H communes plani A E H D cum planis parallelis intersectiones. Rectæ
[z] 16. hujus. igitur A D, E H erunt inter se parallelæ[z]. In rectâ A D sumatur punctum quodvis K. A puncto K, in plano A E H D, rectæ A D ad perpendiculum educatur K L, quæ

rectæ

rectæ E H, ipsi A D parallelæ, in L occurrat. Ab eodem puncto K, in plano A B C D, ad perpendiculum rectæ A D educatur K M. Angulus L K M planorum A E H D, A B C D mutua erit inclinatio [a]. Planum rectarum M K, K L secet planum E F G H in rectâ L N. Rectæ igitur K M, L N, quæ communes sunt plani M K L cum planis parallelis A B C D, E F G H intersectiones, inter se parallelæ erunt [b]. Sed A K, E L parallelæ; id enim ostensum. Angulus igitur N L E angulo A K M æqualis [c]. Angulus autem A K M rectus [d]. Rectus igitur N L E. Recta igitur N L in plano E F G H ad perpendiculum est rectæ E H. Sed recta K L in plano A E H D ad perpendiculum erit eidem E H, cum ad perpendiculum sit rectæ A D [d], cui parallela est E H. Angulus igitur K L N planorum A E H D, E F G H est mutua inclinatio [e]. Sed angulus L K M planorum A E H D, A B C D est mutua inclinatio; id enim ostensum. Et propter parallelas K M, L N, anguli L K M, K L N sunt inter se æquales [f]. Plana igitur A B C D, E F G H plano A E H D similiter sunt inclinata. *Q. E. D.*



[a] Def. 6. hujus.
[b] 16. hujus.
[c] 10. hujus.
[d] Per constr.
[e] Def. 6. hujus.
[f] 29. primi.

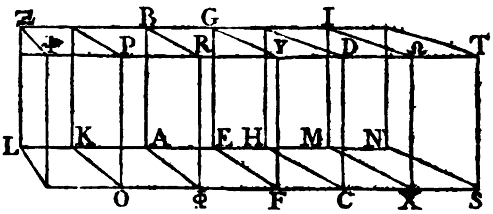
Cor. *. Parallela plana parallelis planis similiter sunt inclinata.

PROP. XXV. THEOR. [XXV.]

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum A B C D plano Y E secetur, oppositis planis R A, D H parallelo. Dico ut E F Φ A basis ad basim E H C F, ita esse A B F Y solidum ad solidum E G C D. Producatur enim A H ex utrâque parte; et ponantur ipsi quidem E H æquales quotcunque H M, M N; ipsi vero A E, æquales quotcunque A K, K L; et compleantur parallelogramma L O, K Φ, H X, M S; et solida L P, K R, H Ω, M T. Quoniam igitur æquales inter se sunt L K, K A, A E rectæ lineæ; erunt et parallelogramma L O, K Φ, A F inter se æqualia [g]; quin et

[g] 1. sexti.



et similia esse manifestum est: itemque æqualia et similia inter se parallelogramma K Ξ, K B, A G; et adhuc parallelogramma L Ψ, K P, A R, inter se æqualia; op-
[g] 24. hujus. posita enim sunt[g]; et hæc quoque inter se similia. Quin et plana parallela L Ψ, K P, A R, E Y parallelis Ψ G, L F similiter esse inclinata; parallela item F Ψ, H Ξ parallelis Y Ξ, F L; necnon parallelis Ψ L, Y E similiter esse inclinata, ex Lemmate et Corollario ejus manifestum est. Eâdem ratione, et parallelogramma E C, H X, M S æqualia inter se sunt, et similia: itemque parallelogramma H G, H I, I N inter se æqualia, et similia. Et horum omnium, sicut priorum, plana parallela parallelis aliis similiter sunt inclinata. Et insuper parallelogramma D H, M Ω, N T. Tria igitur plana solidorum L P, K R, A Y tribus planis æqualia sunt, et similia, et similiter inclinata. Sed tria tribus oppositis sunt æqualia, et similia, et similiter in-
[h] Cor. Def. 11. hujus. clinata. Ergo solida L P, K R, A Y inter se æqualia erunt[h]. Eâdem ratione, et solida E D, H Ω, M T sunt æqualia inter se. Quotuplex igitur est basis L F ipsius A F basis, totuplex est et L Y solidum solidi A Y. Eâdem ratione, quotuplex est N F basis ipsius basis H F, totuplex est et solidum N Y ipsius E D solidi. Et si basis L F est æqualis basi N F, et solidum L Y solido N Y æquale erit; et si basis L F superat N F basim, et L Y solidum N Y superabit; et si minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus A F, F H, et duobus solidis A Y, E D; sumpta sunt æquimultiplicia, basis quidem A F, et A Y solidi, videlicet basis L F, et solidum L Y; basis vero H F, et E D solidi, nempe basis N F, et solidum N Y. Et demonstratum est, si basis L F superat basim N F, et L Y solidum solidum N Y superare; et si æqualis, æquale; et si minor minus. Est igitur ut
[i] Def. 5. quinti. A F basis ad basim F H, ita A Y solidum ad solidum E D[i]. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis

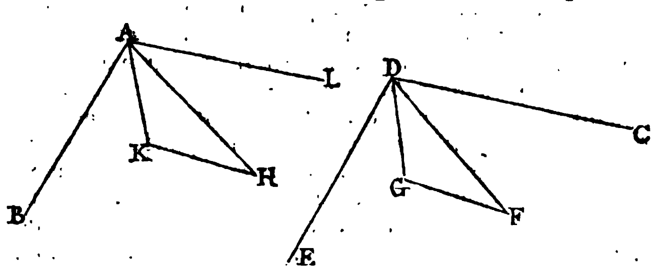
fitis planis parallelo; erit ut bafis ad bafim, ita folidum ad folidum. *Q. E. D.*

Cor. * Omnis parallelepipedi parallelogramma contigua fimiliter inter fe, atque oppofita contigua, inclinata funt.

PROP. XXVI. PROBL. [XXVI.]

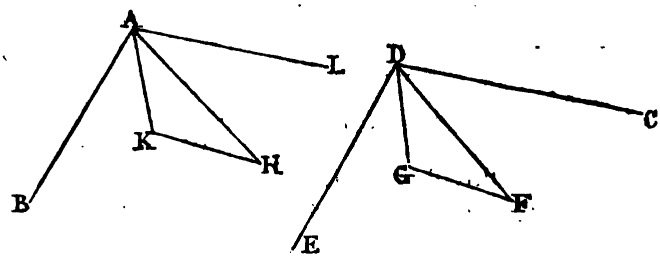
Ad datam rectam lineam, et ad datum in ipfâ punctum, dato angulo folido æqualem folidum angulum conftituere.

Sit data quidem recta linea A B, datum autem in ipfâ punctum A, et datus folidus angulus ad D. Oportet



ad datam rectam lineam A B, et ad datum in ipfâ punctum A, dato angulo folido ad D æqualem folidum angulum conftituere. Solidus ad D vel tribus angulis planis continetur, vel pluribus. Primum tribus contineatur E D C, E D F, F D C. Sumatur in lineâ D F quodvis punctum F; a quo ad planum per E D, D C tranfiens ducatur perpendicularis F G [k], quæ plano in puncto G occurrat; jungaturque D G: et ad rectam lineam A B, [k] et ad datum in ipfâ punctum A, angulo quidem E D C æqualis angulus conftituatur B A L [l]; angulo autem E D G [l] in ipfo plano B A L conftituatur æqualis B A K. Deinde ipfi D G ponatur æqualis A K, et a puncto K, plano per B A L ad rectos angulos, erigatur H K [m]; ponaturque ipfi [m] G F æqualis K H; et H A jungatur. Dico angulum folidum ad A, qui angulis B A L, B A H, H A L continetur, æqualem effe folido angulo ad D, angulis E D C, E D F, F D C contento. Admoveatur enim punctum A puncto D; recta autem A B rectæ D E applicetur, et planum B A L plano E D C fuperimponatur. Ita propter angulos B A L, E D C æquales [n], recta A L rectæ D C fe applicabit;

[k] 11. hujus.
[l] 23. primi.
[m] 10. hujus.
[n] Per conftruct.

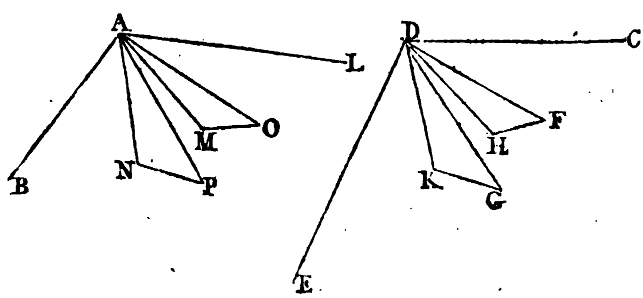


applicabit; et propter æquales angulos B A K, E D G, recta A K rectæ D G. Sed recta A K æqualis rectæ D G [n]. Punctum igitur K puncto G incidet. Planis autem B A L, E D C congruentibus, punctis etiam K, G in unum convenientibus, rectæ K H, G F, quæ a punctis illis ad perpendiculum eductæ sunt congruentibus planis; et ipsæ congruent. Et cum K H ipsi G F æqualis sit [n], punctum H ipsi F incidet. Et punctis A, D in unum quoque compositis, rectæ A H, D F congruent. Tribus autem rectis A B, A L, A H tribus D E, D C, D F singulatim congruentibus, angulus solidus ad A solido ad D congruet, et, congruendo, ei æqualis erit. *Q. E. D.*

[n] Per construct.

CAS. 2. Jam vero solidus ad D contineatur angulis planis plus tribus. Puta, planis E D C, C D F, F D G, G D E.

Sumantur in rectis D F, D G, puncta quælibet F, G. Et a punctis F, G in planum E D C ad perpendiculum



deducantur rectæ F H, G K [o], quæ plano illi in punctis H, K occurrant. Jungantur D H, D K. Jam vero ad rectam A B, ad punctum in eâ A, angulo E D C æqualis consti-

[o] 11. hujus.

constituatur B A L; item in plano B A L angulo E D H æqualis B A M; et angulo E D K æqualis B A N. Capiantur A M, A N illis D H, D K singulatim æquales. A punctis M, N plano B A L ad perpendiculum educantur M O, N P[p]; capiantur N P, M O illis K G, H F singulatim æquales. Denique jungantur A P, A O. Dico factum esse, quod fieri oportuit. Nempe ad rectam A B, et punctum in eâ A, constitutum esse angulum solidum, planis angulis B A L, L A O, O A P, P A B contentum, æqualem solido ad D, planis E D C, C D F, F D G, G D E contento. p 12. hujus.

Puncto enim A, ut in casu priore, puncto D admoto, rectâ A B rectæ D E applicatâ, planoque B A L plano E D C superimposito; propter angulos B A L, B A M, B A N angulis E D C, E D H, E D K, singulos singulis, æquales[q], rectæ A L, A M, A N rectis D C, D H, D K singulatim se applicabunt. Unde propter rectas A M, A N rectis D H, D K, singulas singulis, æquales, puncta M, N punctis H, K singulatim incident. Unde propter rectas M O, N P plano B A L, rectasque H F, K G plano E D C, ad perpendiculum eductas; et propter illas M O, N P alteris H F, K G æquales; efficietur puncta O, P punctis F, G singulatim incidere. Quapropter rectæ A O, A P rectis D F, D G singulatim congruent. Ita vero rectæ A B, A L, A O, A P rectis D E, D C, D F, D G, singulæ singulis, congruent. Angulus igitur solidus ad A solido ad D congruet, et, congruendo, illi æqualis erit. Ad datam igitur rectam lineam &c. *Q. E. F.* q Per construct.

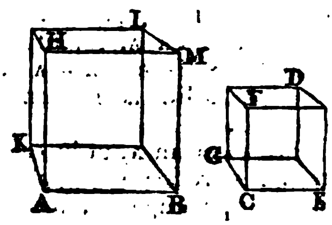
*Cor.** Ex constructione manifestum est angulos planos, qui solidum ad A constituunt, planis, qui solidum ad D, æquales esse; et plana planis similiter esse inclinata. Rectis enim A B, A L, A O, A P rectis D E, D C, D F, D G congruentibus, congruent tum anguli plani, tum angulorum plana. Hoc tamen haud ita intelligendum est, quasi solidi anguli æquales esse nesciant, nisi planis angulis æqualibus, et planis similiter inclinatis contineantur; sed eâ conditione futuros solidos, qui ope hujus problematis constituuntur æquales.

PROP.

[XXVII.] PROP. XXVII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidem linea A B; datum vero solidum parallelepipedum C D. Oportet ad datam rectam lineam A B, dato solido parallelepipedo C D simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum describere.



Constituatur ad rectam lineam A B, et ad datum in ipsa punctum A, angulo solido ad C æqualis angulus, qui angulis planis

[p] 26. hujus. B A H, H A K, K A B contineatur [q]. Hi plani planis solidum ad C continentibus, singuli singulis, æquales

[q] Cor. * 26. hujus. erunt, et æqualium plana similiter inclinata erunt [r]. Sunto æquales B A H, E C F; H A K, F C G; B A K, E C G. Et fiat ut E C ad C G, ita B A ad A K; ut autem

[r] 12. sexti. G C ad C F, ita K A ad A H [r]. Ergo ex æquali ut E C ad C F, ita erit B A ad A H. Compleatur parallelogrammum B H, et A L solidum. Quoniam igitur est ut E C ad C G, ita B A ad A K; erit parallelogrammum K B parallelogrammo G E simile: nempe, cum circa æquales angulos E C G, B A K latera sunt proportionalia. Eadem quoque ratione parallelogrammum K H simile est parallelogrammo G F, et parallelogrammum H B parallelogrammo F E. Tria igitur parallelogramma solidi A L tribus parallelogrammis solidi C D similia sunt, et similiter inclinata: sed tria tribus oppositis in utroque solido sunt æqualia,

[s] Cor. 24. hujus. et similia [s], et similiter inclinata [t]. Ergo totum A L solidum toti solido C D simile erit. Ad datam igitur re-

[t] Cor. * 25. hujus. ctam lineam A B, dato solido parallelepipedo C D simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum A L descriptum est. Q. E. F.

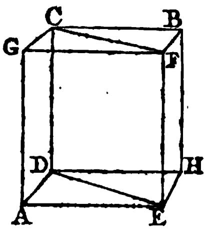
[XXVIII.] PROP. XXVIII. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Sit solidum parallelepipedum A B. Oppositorum ejus parallelogrammorum C G F B, D A E H ducantur diagonales C F, D E. Jam cum recta C D parallela et æqualis sit rectæ G A (nempe cum opposita sint paral-

lelogrammi

lelogrammi C A latera) cum eidem G A recta F E parallela et æqualis sit; rectæ C D, F E inter se sunt parallelæ et æquales [t]. In plano igitur sunt rectæ quatuor C F, D E, C D, F E [u]. Dico solidum A B a plano C D E F bifariam secari. Quoniam enim æquale et simile est C G F triangulum triangulo C B F, triangulum vero A D E triangulo D E H [x]; est autem et C A parallelogrammum parallelogrammo B E æquale et simile [y], oppositum enim est; et parallelogrammum G E æquale et simile parallelogrammo C H: quoniam etiam parallelepipedi A B contigua quælibet parallelogramma similiter oppositis inter se sunt inclinata [z]: quoniam denique planum C D E F parallelis planis G B, A H similiter est inclinatum, necnon parallelis A F, C H; A C, E B: erit prisma contentum duobus triangulis C G F, A D E, et tribus parallelogrammis G E, A C, C E, æquale prismati, quod continetur duobus triangulis C F B, D E H, et tribus parallelogrammis C H, B E, C E; etenim planis, et numero et magnitudine æqualibus, et similibus, et similiter inclinatis, continentur. Ergo totum A B solidum a plano C D E F bifariam secatur. *Q. E. D.*

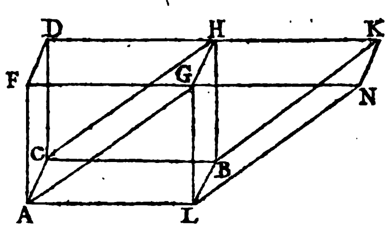


[t] 9. hujus, et Ax. 1. primi.
[u] 7. hujus.
[x] 34. primi.
[y] 24. hujus.
[z] Cor. 25. hujus.

PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

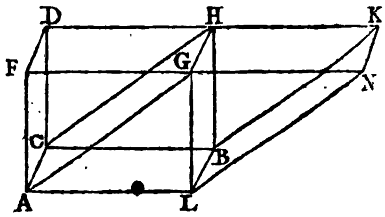
Solida parallelepipeda, quæ in eâdem sunt basi, et eâdem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eâdem basi A B solida parallelipida A H, A K, eâdem altitudine; quorum stantes A F, A G, L G, L N; C D, C H, B H, B K sint in eisdem rectis lineis F N, D K. Dico solidum A H solido A K æquale esse. Parallelepipedi A K stans parallelogrammum C G stanti L H opposito alterius parallelepipedi A H, vel ad ipsum planum D N occurrit, vel productum supra ipsum, vel infra.



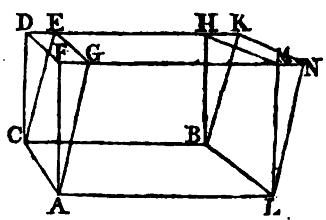
CAS.

CAS. 1. * Primum occurrat stans C G stanti L H ad ipsum planum D N. Ita vero plana C G, L H ipsum D N in eâdem lineâ rectâ H G secant; et parallelogramma D G, G K; necnon A H, B G, latus commune habent H G. Parallelepipedum autem A H plano A G H C per diagonales secatur. Parallelepipedum item A K per diagonales plano B H G L. Prisma igitur triangulis duobus A L G, C B H, et parallelogrammis tribus B A, B G, G C comprehensum, dimidium erit parallelepipedi A H, et idem prisma parallelepipedi A K dimidium [a]. Solidum igitur A H solido A K æquale. *Q. E. D.*



[a] 28. hujus.

CAS. 2. Jam vero stantia C G, L H non nisi producta supra planum D N conveniant. Quoniam igitur parallelogrammum est utrumque ipsorum C H, C K; erit C B utrique ipsarum D H, E K æqualis [b]: ergo et D H est æqualis E K. Communis auferatur E H. Reliqua igitur D E æqualis est reliquæ H K. Quare et D E C triangulum est æquale et simile triangulo H K B [c]. Parallelogrammum autem D G est æquale et simile parallelogrammo H N. Eâdem ratione et A F G triangulum æquale et simile est triangulo L M N. Est autem parallelogrammum C F parallelogrammo B M, et parallelogrammum C G parallelogrammo B N æquale et simile, opposita enim sunt [d]. Præterea plana A D, A E similiter inter se ac parallela illis plana L H, L K inclinata sunt. Planum etiam D N planis triangulorum D C E, F A G, H B K, M L N parallelis similiter est inclinatum. Quin et idem planum D N parallelogrammorum A D, L H planis parallelis similiter est inclinatum; necnon planis parallelogrammorum A E, L K parallelis [d]. Ergo et prisma contentum duobus triangulis A F G, D E C et tribus paral-

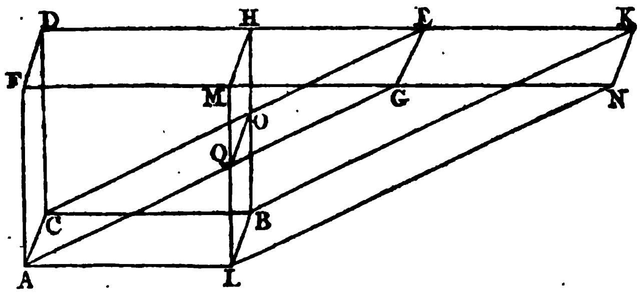


[b] 34. primi.
[c] 8. primi.
[d] 24. hujus.
[d] Per Lem. et Cor. * 24. hujus.

lelogrammis

lelogrammis A D, D G, G C eſt æquale priſmati, quod duobus triangulis L M N, H B K et tribus parallelogrammis B M, N H, B N continetur. Commune apponatur ſolidum, cujus baſis quidem parallelogrammum A B, oppoſitum autem ipſi G E H M. Ergo totum A H ſolidum parallelepipedum toti ſolido parallelepipedo A K eſt æquale. *Q. E. D.*

CAS. 3.* Denique conveniant ſtantia C G, L H infra planum D N, ſitque communis eorum interſectio O Q,



quæ rectæ C A, ac proinde rectis H M, E G parallela erit. (Nimirum cum O Q, C A communes ſint plani C G cum parallelis planis A D, L H interſectiones; et C A rectæ F D, atque idcirco utrique illarum H M, E G ſit parallela.) Priſma duobus triangulis A F G, C D E et tribus parallelogrammis A D, D G, G C comprehenſum æquale eſſe priſmati, duobus triangulis L M N, B H K et tribus parallelogrammis B M, N H, B N comprehenſo, eodem modo oſtendetur, quo in caſu priori. Æqualibus hiſce auferatur pars communis, priſma utique, quod duobus triangulis Q M G, O H E et tribus parallelogrammis Q H, H G, G O continetur. Quæ reliqua fuerint inter ſe æqualia erunt. Id eſt, ſolidum, trapeziis duobus Q M F A, O H D C et parallelogrammis quatuor O M, C F, M D, Q C comprehenſum, ſolido, trapeziis duobus L Q G N, B O E K et parallelogrammis quatuor B Q, E N, O G, B N comprehenſo, æquale erit. Hiſce ſolidis æqualibus commune apponatur priſma, duobus triangulis A L Q, C B O et tribus parallelogrammis Q B, Q C, C L comprehenſum, fiet ſolidum totum A H toti C K æquale. *Q. E. D.*

Ubicunque igitur conveniant ſtantia C G, L H, parallelepipedum parallelepipedo æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eâdem ſunt baſi, et eâdem altitudine, quorum ſtantes ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. *Q. E. D.*

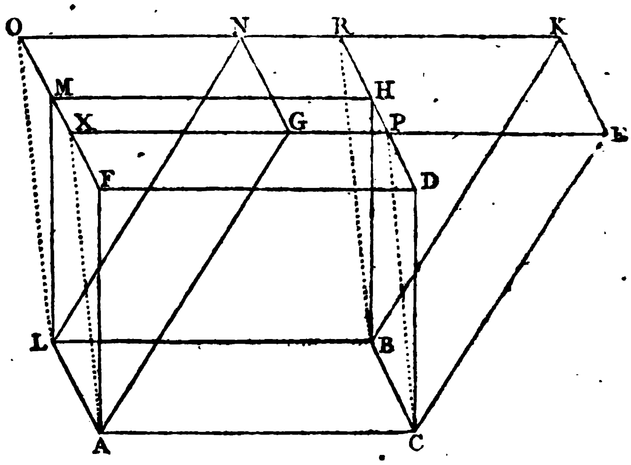
* SCHOLION.

Propoſitionem univerſam in caſus tres diſtribuendam Simpſonus primus, juniorum ſaltem, intellexit. Caſûs ſecundi et tertii elegantiſſimam ſane Viri magni demonſtrationem nos lubenter certe in noſtras ſchedas tranſtuliſſemus, niſi Euclidis ipſius veſtigia non perſequi religio eſſet. Secundi autem caſûs demonſtrationem (qualem nunc eam emendatam damus) ab Euclide minime abjudicamus, licet ita Simpſonus ſententiam tulerit.

[XXX.] PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda, quæ in eâdem ſunt baſi, et eâdem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in iiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia.

Sint in eâdem baſi A B ſolida parallelepipeda C M, C N, et eâdem altitudine, quorum ſtantes A F, A G, L M,



L N; C D, C E, B H, B K non ſint in eiſdem rectis lineis. Dico ſolidum C M ſolido C N æquale eſſe. Recta enim

D H,

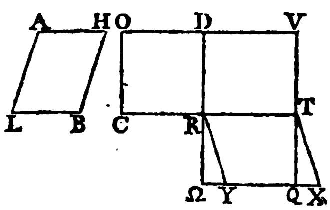
D H, si opus sit producta, rectis G E, N K, si opus sit productis, in punctis P, R occurrat. Recta item F M, si opus sit producta, eisdem G E, N K, si opus sit productis, in X, O occurrat. Et A X, L O, C P, B R jungantur. Solidum C M, cujus basis quidem A C B L parallelogrammum, oppositum autem ipsi F D H M, est æquale solido C O, cujus basis parallelogrammum A C B L et ei oppositum X P R O; in eâdem enim sunt basi A C B L, et ipsorum stantes A F, A X, L M, L O; C D, C P, B H, B R sunt in eisdem rectis lineis F O, D R [f]. Sed solidum C O, cujus basis quidem parallelogrammum A C B L, oppositum autem ipsi X P R O, est æquale solido C N, cujus basis A C B L parallelogrammum, et ipsi oppositum G E K N [f]. Etenim in eâdem sunt basi A C B L, et eorum stantes A G, A X, C E, C P; L N, L O, B K, B R sunt in eisdem rectis lineis G P, N R. Quare et C M solidum solido C N æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eâdem sunt basi, et eâdem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

[f] 29. hujus.

PROP. XXXI. THEOR. [XXXI.]

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, et eâdem altitudine, inter se sunt æqualia.

Sint in æqualibus basibus A B, C D solida parallelepipeda A E, C F, et eâdem altitudine. Dico solidum A E solido C F æquale esse. Sint primo stantes † H K, B E, A G, L M; O P, D F, C E, R S ad rectos angulos basibus A B, C D: angulus autem A L B angulo C R D

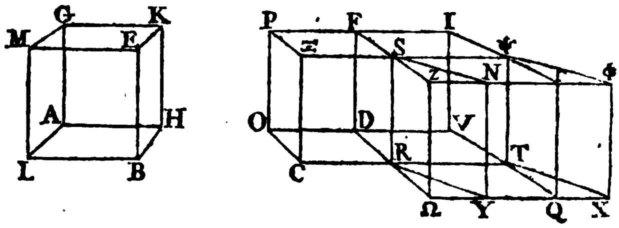


sit inæqualis, et producatur ipsi C R in directum R T: constituaturque ad rectam lineam R T, et ad punctum in ipsâ R, angulo A L B æqualis angulus T R Y [g]. Et ponatur ipsi quidem A L æqualis R T, ipsi vero L B æqualis R Y; et ad punctum Y ipsi R T parallela ducatur X Y, compleaturque parallelogrammum R X, et Y Y solidum. Quoniam igitur duæ T R, R Y duabus A L, L B æquales sunt, et angulos continent æquales; erit parallelogrammum R X æquale et simile parallelogrammo

[g] 23. primi.

† *Vide diagramma paginæ sequentis.*

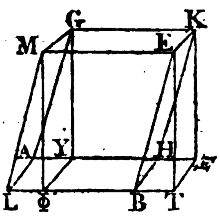
 R L,

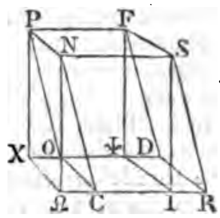


H L; et quoniam rursus A L est æqualis R T, et L M ipsi R S, angulosque æquales continent, parallelogrammum R Ψ parallelogrammo A M æquale et simile erit. Eâdem ratione L E parallelogrammum ipsi S Y æquale est et simile. Tria igitur parallelogramma solidi A E tribus parallelogrammis solidi Ψ Y æqualia et similia sunt. Præterea cum rectæ M L, S R plana L H, R X ad perpendiculum insistant; plano L H plana omnia per M L, plano autem R X omnia per R S, ad perpendiculum erunt [g]. Plano igitur L H ad perpendiculum sunt L E, L G plana; plano item R X plana R N, R Ψ. Rursum recta L M, cum ad perpendiculum sit plano L H, rectarum L A, L B utrique, cum sint in illo plano, ad perpendiculum erit. Est autem illa L M planorum L E, L G communis intersectio. Quare angulus A L B mutua est planorum L G, L E inclinatio [h]. Similiter ostendemus angulum Y R T planorum R N, R Ψ mutuam esse inclinationem. Anguli autem A L B, Y R T sunt inter se æquales. Plana igitur L G, L E similiter inter se, ac plana R N, R Ψ inclinata sunt. Solidi igitur A E tria contigua parallelogramma L H, L G, L E, quæ tribus solidi Ψ Y contiguis R X, R Ψ, R N ostensa sunt æqualia et similia, eadem tria inter se similiter eisdem tribus inclinata erunt; homologa utique homologis. Sed et tria tribus opposita, et æqualia sunt, et similia [i], et similiter inclinata [k]. Totum igitur A E solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo Ψ Y est æquale. Producantur D R, X Y, conveniantque inter se in puncto Ω; et per T ipsi D Ω parallela ducatur T Q; et producantur T Q, O D, et conveniant in V; compleanturque solida Ω Ψ, R I. Solidum igitur Ψ Ω, cujus basis est R Ψ parallelogrammum, oppositum autem ipsi Ω Γ, est æquale solido Ψ Y, cujus basis est R Ψ parallelogrammum, et oppositum ipsi Y Φ; in eâdem enim sunt basi R Ψ, et eâdem altitudine, et eorum stantes R Ω, R Y, T Q, T X; S Z,

[g] 18. hujus.
[h] Def. 6. hujus.
[i] Cor. 24. hujus.
[k] Cor.* 25. hujus.

S Z, S N, Ψ Γ, Ψ Φ in eisdem sunt rectis lineis Ω X, Z Φ [l]. [l] 29. hujus.
Sed solidum Ψ Y æquale est solido A E. Ergo et Ψ Ω solido A E est æquale. Præterea quoniam parallelogrammum R Y X T est æquale parallelogrammo Ω T [m], [m] 35. primi.
(etenim in eâdem est basi R T, et in eisdem parallelis R T, Ω X) et parallelogrammum R Y X T parallelogrammo C D æquale (quoniam utrumque est æquale ipsi A B) idcirco parallelogrammum Ω T æquale est parallelogrammo C D. Est autem aliud parallelogrammum D T. Est igitur ut C D basis ad basim D T, ita Ω T ad ipsam D T [n]. [n] 7. quinti.
Et quoniam solidum parallelepipedum C I secatur plano R F, planis oppositis parallelo; erit ut C D basis ad basim D T, ita solidum C F ad R I solidum [o]. Eâdem ratione, [o] 25. hujus.
quoniam solidum parallelepipedum Ω I secatur plano R Ψ, oppositis planis parallelo; ut Ω T basis ad basim D T, ita erit solidum Ω Ψ ad R I solidum [o]. Sed ut C D basis ad basim D T, ita basis Ω T ad ipsam T D. Ut igitur solidum C F ad R I solidum, ita solidum Ω Ψ ad solidum R I. Quod cum utrumque solidorum C F, Ω Ψ ad solidum R I eandem habeat proportionem, solidum C F solido Ω Ψ est æquale [p]. Solidum autem Ω Ψ ostensum est [p] 9. quinti.
est æquale solido A E. Ergo et A E ipsi C F æquale erit.





Sed non sint stantes A G, H K, B E, L M, C N, O P, D F, R S ad rectos angulos ipsis A B, C D basibus. Dico rursus solidum A E æquale esse solido C F. Ducantur a punctis K, E, G, M; P, F, N, S ad subjectum planum perpendiculares K Ξ, E T, G Y, M Φ; S I, F Ψ, N Ω, P X [q], quæ [q] 11. hujus.
plano in punctis Ξ, T, Y, Φ; Ψ, X, Ω, I occurrant; et jungantur Ξ T, Y Φ, Ξ Y, T Φ; X Ψ, X Ω, Ω I, Ψ I. Æquale igitur est K Φ solidum solido P I; in æqualibus enim sunt basibus K M, P S, et eâdem altitudine, et utriusque stantes ad rectos angulos sunt basibus. Sed K Φ solidum solido A E est æquale [r]: siquidem in eâdem sunt basi, et eâdem [r] 29. hujus.
altitudine, et utriusque stantes sunt in eisdem rectis

 lineis.

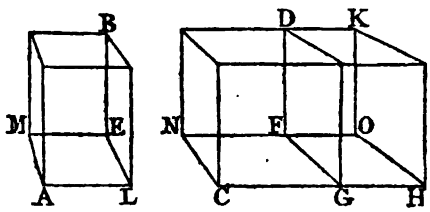
lineis. Pari ratione solidum P I solido C F est æquale. Ergo et solidum A E solido C F æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, et eâdem altitudine, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

[XXXII.]

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases.

Sint solida parallelepipeda A B, C D, quæ eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse, ut bases; hoc est, ut A E basis ad basim C F, ita solidum A B ad C D



solidum. Applicetur enim ad rectam lineam F G parallelogrammo A E æquale F H, in angulo F G H ipsi G C N æquali. Et a basi F H eâdem altitudine ipsi C D solidum parallelepipedum G K compleatur. Solidum igitur A B solido G K est æquale p; in æqualibus enim sunt basibus A E, E H, et eâdem altitudine. Itaque quoniam solidum parallelepipedum C K plano D G secatur oppositis planis parallelo; erit ut H F basis ad basim F C, ita solidum H D ad D C solidum q; atqui est basis quidem F H basi A E æqualis, solidum vero G K æquale solido A B. Est igitur et ut A E basis ad basim C F, ita solidum A B ad solidum C D. Quare solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt, ut bases. *Q. E. D.*

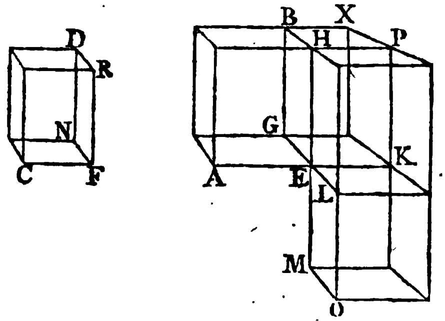
p 31. hujus.
q 25. hujus.

[XXXIII.]

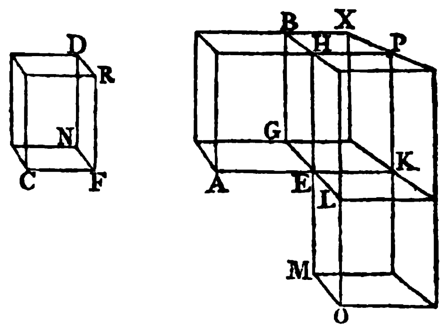
PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicatâ proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda A B, C D. Latus autem A E homologum sit lateri C F. Dico solidum A B ad C D solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet A E ad C F. Producantur enim E K, E L, E M in directum ipsis A E, G E, H E; et ipsi quidem



dem C F æqualis ponatur E K, ipsi vero F N æqualis E L; et adhuc ipsi F R æqualis E M; et K L parallelogrammum, et K O solidum compleatur. Quoniam igitur duæ K E, E L duabus C F, F N æquales sunt; sed et angulus K E L angulo C F N æqualis; quia et angulus A E G ipsi C F N ob similitudinem solidorum A B, C D: erit et K L parallelogrammum simile et æquale parallelogrammo C N. Eâdem ratione, et parallelogrammum K M æquale est et simile parallelogrammo C R; et adhuc parallelogrammum O E ipsi D F parallelogrammo. Tria igitur parallelogramma solidi K O tribus parallelogrammis C D solidi æqualia et similia sunt. Eadem autem tria inter se similiter eisdem tribus inclinata esse, manifestum est. Cum ex ipsâ constructione figuræ, solidi K O plana illa tria K L, K M, O E solidi A B sint plana ipsa A G, A H, E B. Quæ quidem similiter inter se ac solidi C D tria illa C N, C R, D F inclinata sunt, propter solidorum similitudinem. Sed in utroque solido tria tribus oppositis æqualia sunt, et similia, et similiter inclinata[r]. [r Cor. 24. hujus.] Totum igitur K O solidum æquale est et simile toti solido C D. Compleatur G K parallelogrammum; et a basibus quidem G K, K L parallelogrammis, altitudine vero eâdem ipsi A B, solida compleantur E X, L P. Et quoniam ob similitudinem solidorum A B, C D, est ut A E ad C F, ita E G ad F N; et E H ad F R; æqualis autem F C ipsi E K, et F N ipsi E L, et F R ipsi E M: erit ut A E ad E K, ita G E ad E L, et H E ad E M. Sed ut A E quidem ad E K, ita A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K[s]: ut autem G E ad E L, ita G K[s] [s 1. sexti.] ad K L; et ut H E ad E M, ita P E ad K M[s]. Ut igitur A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K, ita



G K ad K L, et P E ad K M. Sed ut A G quidem ad G K, ita A B solidum ad solidum E X[t]: ut autem G K ad K L, ita solidum E X ad P L solidum; et ut P E ad K M, ita P L solidum ad solidum K O. Et ut igitur solidum A B ad solidum E X, ita E X ad P L, et P L ad K O[u]. Si autem quatuor sint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam[x]. Ergo et A B solidum ad solidum K O triplicatam habet proportionem ejus, quam A B ad E X. Sed ut A B ad E X, ita A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K; et A E recta linea ad ipsam E K. Quare et A B solidum ad solidum K O triplicatam proportionem habebit ejus, quam A E habet ad E K. Æquale autem est solidum K O solido C D, et recta linea E K rectæ C F est æqualis. Ergo et A B solidum ad solidum C D triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipsius homologum A E habet ad C F homologum latus. *Q. E. D.*

[t] 32. hujus.
[u] 11. quinti.
[x] Def. 11. quinti.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum, quod fit a primâ, ad solidum, quod a secundâ, simile, et similiter descriptum; quoniam et prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam.

* SCHOLION.

Quod in hâc propositione demonstrandâ Euclides assumpsit, proportionum, quæ eædem inter se sunt, earum triplicatas quoque inter se easdem esse; ut et ejus contrarium, proportiones inter se easdem esse, quarum triplicatæ

A——— B——— C——— D———
E——— F——— G——— H———

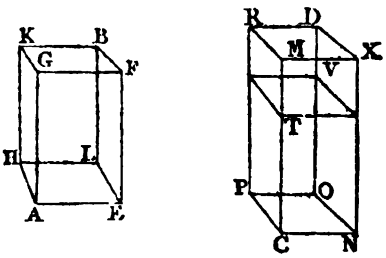
plicatæ sunt eædem; operæ pretium facturi sumus, si brevi demonstratione utrumque confirmemus, cum sine confirmatione temere assumi nonnulli judicarint. Primum dico, proportionum, quæ inter se eædem sunt, easdem esse triplicatas. Sint quatuor A, B, C, D continue proportionales, et aliæ quatuor E, F, G, H continue proportionales. Ita proportio primæ A ad quartam D triplicata erit ejus, quam prima A habet ad secundam B; et proportio primæ E ad quartam H triplicata ejus, quam prima eadem E habet ad secundam F [y]. [y] Def. 11. quinti.
Sit autem A ad B, ut E ad F. Erit igitur et B ad C, ut F ad G; et C ad D ut G ad H. Quare ex æquo A ad D ut E ad H [z]. Proportionum igitur, quæ eædem inter se [z] 22. quinti.
sunt, earum eædem erunt triplicatæ. Sed positis ut prius quatuor proportionalibus A, B, C, D, item aliis quatuor E, F, G, H; sit A ad D, ut E ad H. Dico et A ad B ut E ad F. Non enim. A igitur vel major vel minor quam ad B in ratione E ad F. Sit major primum. Erit igitur et B major quam ad C ut F ad G; et C major quam ad D ut G ad H [a]. Minor itaque ali- [a] 13. quinti.
qua quam A habet ad B rationem eam, quam E ad F [b]; [b] Def. 7. quinti.
et B ad majorem quam C rationem eam, quam F ad G [c]. Ex æquo igitur minor quam A ad majorem quam C ra- [c] 10. quinti.
tionem habet, quam E ad G. A igitur ad majorem quam C majorem rationem habet, quam E ad G. Omnino igitur ad ipsam C longe majorem. Pari ratione, cum major sit A ad C, quam ut E ad G, et C major quam ad D ut G ad H, ostendetur A longe major quam ad D ut E ad H. Quod est absurdum; cum A sit ad D, ut E ad H. Non igitur minor quam A habebit ad B rationem eam, quam E ad F. Eodemque modo ostendetur neque major. Est igitur A ad B, ut E ad F. Proportiones igitur, quarum triplicatæ sunt eædem, inter se eædem erunt.

PROP.

[XXXIV.] PROP. XXXIV. THEOR.

Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases et altitudines; et quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases et altitudines, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia solida parallelepipeda A B, C D. Dico ipsorum bases et altitudines reciprocari, hoc est, ut E H basis ad basim N P, ita esse altitudinem solidi C D ad solidi A B altitudinem. Sint enim primo stantes A G, E F, L B, H K; C M, N X, O D, P R ad rectos angulos basibus ipsorum. Dico ut E H basis ad basim N P, ita esse C M ad A G.



Capiatur enim in C M ipsi A G æqualis C T; et a basi quidem N P, altitudine autem C T, solidum parallelepipedum V C compleatur. Quoniam igitur solidum A B solido C D est æquale, aliud autem aliquod est V C, et
[c] 7. quinti. æqualia ad idem eandem habent proportionem [c]; erit ut A B solidum ad solidum C V, ita C D solidum ad solidum C V. Sed ut A B solidum ad solidum C V, ita basis E H
[d] 32. hujus. ad N P basim [d]; æque alta enim sunt A B, C V solida. Ut autem solidum C D ad ipsum C V, ita M P basis ad
[e] 25. hujus. [f] 1. sexti. basim P T [e], et M C ad C T [f]. Et igitur ut basis E H ad N P basim, ita M C ad C T. Est autem C T æqualis A G. Ergo et ut E H basis ad basim N P, ita M C ad A G. Quare solidorum parallelepipedorum A B, C D bases et altitudines reciprocantur.

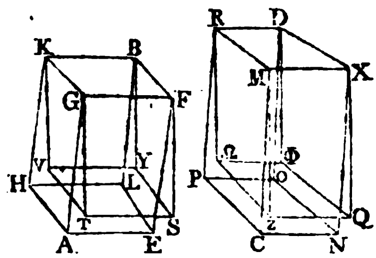
Rursus solidorum parallelepipedorum A B, C D bases et altitudines reciprocentur: sitque ut E H basis ad basim N P, ita solidi C D altitudo ad altitudinem solidi A B. Dico solidum A B solido C D æquale esse. Ponatur ipsi A G æqualis rursus C T, et similiter solidum C V compleatur. Itaque quoniam est ut E H basis ad basim N P, ita M C ad ipsam A G; æqualis autem est A G ipsi C T: erit ut basis E H ad N P basim, ita M C ad C T. Sed ut
[g] 32. hujus. basis E H ad N P basim, ita A B solidum ad solidum V C [g];

æq

æque alta enim ſunt ſolida A B, C V. Ut autem M C ad C T, ita et M P baſis ad baſim P T, et ſolidum C D ad C V ſolidum [h]. Et igitur ut ſolidum A B ad ſolidum C V, ita C D ſolidum ad ſolidum C V [i]. Quod cum utrumque ſolidorum A B, C D ad ipſum C V eandem proportionem habeat; erit A B ſolidum ſolido C D æquale [k]. *Q. E. D.*

[h] 1. ſexti, et 25. hujus.
[i] 11. quinti.
[k] 9. quinti.

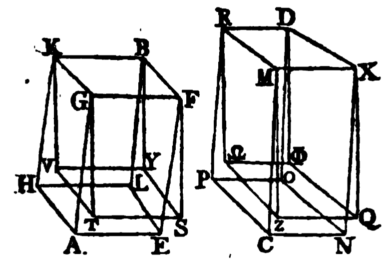
Non ſint autem ſtantes F E, B L, G A, K H; X N, D O, M C, R P ad rectos angulos baſibus ſolidorum. Dico et



ſic, æqualibus exiſtentibus ſolidis A B, C D, baſes et altitudines reciprocari. Scilicet ut E H baſis ad baſim N P, ita eſſe altitudinem ſolidi C D ad ſolidi A B altitudinem. Ducantur enim a punctis F, G, B, K; X, M, D, R ad plana baſium E H, N P perpendiculares, quæ planis in punctis S, T, Y, V; Q, Z, Ω, Φ occurrant; et compleantur ſolida F V, X Ω. Itaque ſolidum A B ſolido B T eſt æquale; in eâdem namque ſunt baſi F K, et eâdem altitudine, ſtantes autem non ſunt in eiſdem rectis lineis [l]. Pari ratione ſolidum D C eſt æquale ſolido D Z. Erit igitur et ſolidum B T ſolido D Z æquale. Æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum, quorum altitudines baſibus ipſorum ſunt ad rectos angulos, baſes et altitudines reciprocantur [m]. Eſt igitur ut F K baſis ad baſim X R, ita ſolidi D Z altitudo ad altitudinem ſolidi B T. Atqui eſt baſis quidem F K baſi E H æqualis, baſis vero X R æqualis baſi N P [n]. Quare ut E H baſis ad baſim N P, ita eſt altitudo ſolidi D Z ad ſolidi B T altitudinem. Eædem autem ſunt altitudines ſolidorum D Z, D C, itemque ſolidorum B T, B A. Eſt igitur ut E H baſis ad baſim N P, ita ſolidi D C altitudo ad altitudinem ſolidi A B. Ergo ſolidorum parallelepipedorum A B, C D baſes et altitudines reciprocantur.

[l] 30. hujus.
[m] Ex ante demonſtratis.
[n] 24. hujus.

Rurſus ſolidorum parallelepipedorum A B, C D baſes et

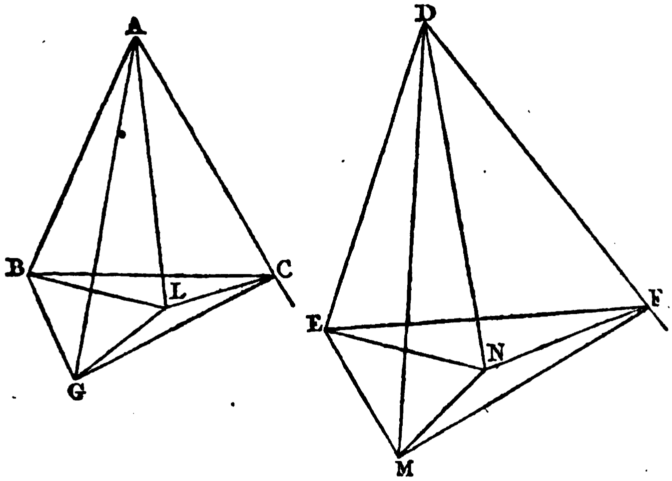


et altitudines reciprocentur; fitque ut E H bafis ad bafim N P, ita altitudo folidi C D ad folidi A B altitudinem. Dico folidum A B folido C D æquale effe. Iifdem namque conftructis, quoniam ut E H bafis ad bafim N P, ita folidi C D altitudo ad altitudinem folidi A B; et bafis quidem E H eft æqualis bafi F K; N P vero ipfi X R: erit ut F K bafis ad bafim X R, ita altitudo folidi C D ad folidi A B altitudinem. Eædem autem funt altitudines folidorum A B, B T; neonon ipforum C D, D Z. Eft igitur ut F K bafis ad bafim X R, ita folidi D Z altitudo ad altitudinem folidi B T. Quare folidorum B T, D Z parallelepipedorum bafes et altitudines reciprocantur. Quorum autem folidorum parallelepipedorum altitudines funt ad rectos angulos bafibus ipforum, et bafes et altitudines reciprocantur; ea inter fe funt æqualia. Ergo B T folidum folido D Z eft æquale. Sed folidum quidem B T æquale eft folido B A, etenim in eâdem funt bafi F K, et eâdem altitudine, ftantes autem non funt in eifdem rectis lineis. Pari autem ratione folidum D Z eft æquale folido D C. Ergo et folidum A B folido C D eft æquale. *Q. E. D.*

[XXXV.] PROP. XXXV. THEOR.

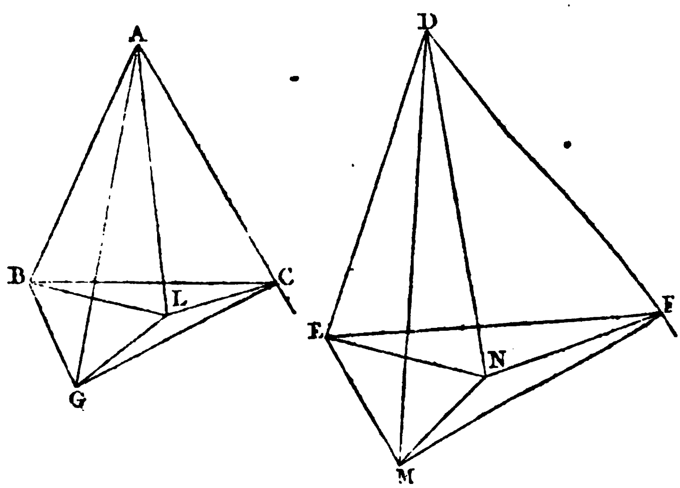
Si fint duo anguli plani æquales, quorum verticibus fublimes rectæ lineæ infiftant, quæ cum rectis lineis a principio pofitis angulos contineant æquales, alterum alteri; in fublimibus autem fumantur quævis puncta, atque ab ipfis ad plana, in quibus funt anguli, perpendiculares ducantur; et a punctis, quæ a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum fublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales B A C, E D F; et a punctis A, D fublimes rectæ lineæ A G, D M conftituantur, quæ



quæ cum rectis lineis a principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem M D E æqualem angulo G A B, angulum vero M D F angulo G A C æqualem; et sumantur in ipsis A G, D M quævis puncta G, M, a quibus ad plana per B A C, E D F ducantur perpendiculares G L, M N, occurrentes planis in punctis L, N; et L A, N D jungantur. Dico angulum G A L angulo M D N æqualem esse. A puncto enim L ad rectas A B, A C deducantur ad perpendiculum L B, L C. A puncto quoque N in rectas D E, D F deducantur ad perpendiculum N E, N F. Et jungantur G B, G C; M E, M F. Jungantur quoque B C, E F. Ita rectæ G B, G C rectis A B, A C, necnon M E, M F rectis D E, D F, ad perpendiculum erunt[l]. In [l] Cor. 1. triangulis igitur A B G, D E M æquales sunt anguli 11. hujus. A B G, D E M; rectus enim uterque. Angulus autem B A G angulo E D M æqualis[k]. Reliquus igitur A G B [k] ex hyp. reliquo D M E æqualis, et triangulum A B G triangulo D E M simile[l]. Quare A B ad D E, et B G ad E M, [l] 4. sexti. ut A G ad D M. Pari ratione, propter angulos G C A, M F D rectos, angulosque C A G, F D M inter se æquales, simile erit triangulum A C G triangulo D F M; et A C ad D F, et C G ad F M, ut A G ad D M. Jam vero cum sit A B ad A G, ut D E ad D M, et A G ad A C, ut D M ad D F; ex æquo erit A B ad A C, ut D E ad D F. Angulus autem B A C angulo E D F æqualis[k]. Triangula igitur

B A C,



B A C, E D F habent angulum angulo æqualem, et latera circa æquales angulos proportionalia. Æquiangula igitur sunt triangula B A C, E D F, et æquales habent angulos, quibus latera homologa subtenduntur[m]. Angulus igitur A B C angulo D E F est æqualis, et angulus A C B angulo D F E. Præterea latus B C erit ad latus E F, ut A B ad D E, et A C ad D F[n]. Rursum cum æquales sint anguli A B L, D E N, rectus enim uterque[o], æquales item A B C, D E F, et reliquus C B L reliquo F E N æqualis erit. Pari ratione propter angulos A C L, D F N rectos, angulosque A C B, D F E æquales, anguli B C L, E F N inter se æquales erunt. Æquiangula igitur sunt triangula B L C, E N F. Latera igitur circa æquales angulos proportionalia habent[n]. Quare B L est ad E N, ut B C ad E F. Sed B C est ad E F, ut A B ad D E, et A B ad D E, ut B G ad E M. Est igitur B L ad E N, ut B G ad E M[p]. Sed cum rectæ G L, M N ad perpendiculum sint planis B A C, E D F, in quibus sunt rectæ L B, N E, recti sunt anguli G L B, M N E[q]. Duo igitur triangula G L B, M N E angulum angulo æqualem habent (rectum utique G L B recto M N E), et circa alios G B L, M E N latera proportionalia, nempe B L ad E N, ut B G ad E M; reliquos autem angulos B G L, E M N, rectis singulatim minores. Æquiangula igitur sunt triangula G L B, M N E, et æquales habent angulos, circa quos latera sunt proportionalia[r]; angulum scilicet G B L angulo M E N, et reliquum

[m] 6. sexti.
[n] 4. sexti.
[o] Per construct.
[p] 11. quinti.
[q] Def. 3. hujus.
[r] 7. sexti.

reliquum BGL reliquo EMN [s]. Similia igitur sunt triangula GLB, MNE, et GB est ad ME, ut GL ad MN [t]. Sed GB est ad ME, ut AG ad DM (id enim initio ostensum.) Quare GL est ad MN, ut AG ad DM [u]. Sed cum rectæ GL, MN ad perpendiculum sint planis BAC, EDF, in quibus sunt rectæ LA, ND, recti sunt anguli GLA, MND. Duo igitur triangula GLA, MND angulum angulo æqualem habent (rectum utique GLA recto MND) et circa alios angulos AGL, DMN latera proportionalia; nempe AG ad DM, ut GL ad MN; angulos autem reliquos GAL, MDN rectis singulatim minores. Æquiangula igitur sunt triangula GLA, MND, et æquales habent angulos, circa quos latera sunt proportionalia [x]. Nempe angulum AGL angulo DMN, et reliquum GAL reliquo MDN æqualem. Anguli igitur GAL, MDN sunt inter se æquales. Si sint igitur duo anguli plani &c. *Q. E. D.*

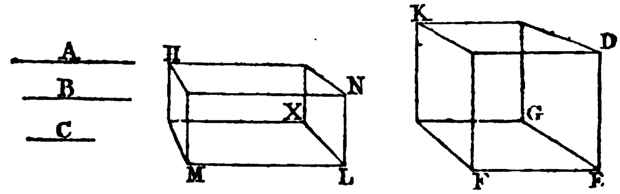
[s] 7. sexti.
[t] 4. sexti.
[u] 11. quinti.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis a principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri; perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana, in quibus sunt primi anguli, ducantur, inter se æquales esse. Nam triangulorum similium GAL, MDN si latera homologa GA, MD inter se æqualia sint; homologa etiam GL, MN erunt inter se æqualia.

PROP. XXXVI. THEOR. [XXXVI.]

Si tres rectæ lineæ proportionales sint; solidum parallelepipedum, quod a tribus fit, æquale est solido parallepipedo, quod fit a mediâ, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C; sit scilicet ut A ad B, ita B ad C. Dico solidum, quod fit ex ipsis A, B, C, æquale esse solido, quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E, contentus tribus angulis planis DEG, GEF, FED; et ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum DE, GE, EF; et solidum parallelepipedum EK compleatur. Rectæ autem A ponatur æqualis LM; et ad rectam lineam LM, et ad punctum in ipsâ L, constituatur angulo solido ad E æqualis angulus, contentus tribus planis



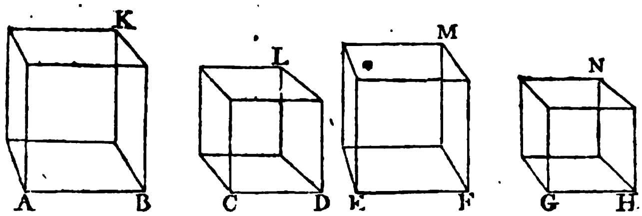
[x] 26. hujus. planis N L X, X L M, M L N[x]; et ponatur ipsi quidem B æqualis L N, ipsi vero C æqualis L X. Quoniam igitur est ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem est A ipsi L M, et B unicuique ipsarum L N, E F, E G, E D, et C ipsi L X; erit ut L M ad E F, ita G E ad L X; et circum æquales angulos M L X, G E F latera sunt reciproca. Ergo M X parallelogrammum parallelogrammo [y] 14. sexti. G F est æquale[y]. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt G E F, X L M, et in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur L N, E D æquales inter se, et cum rectis lineis a principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares, quæ a punctis N, D ad plana per X L M, G E F ducuntur, inter [z] Cor. 35. hujus. se æquales[z]. Ergo solida L H, E K eâdem sunt altitudine. Quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, et eâdem altitudine, inter se sunt æ- [a] 31. hujus. qualia[a]. Ergo solidum H L æquale est solido E K. Atqui est solidum quidem H L, quod fit a tribus A, B, C, solidum vero E K, quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod fit a tribus, æquale est solido parallelepipedo, quod fit &c. *Q. E. D.*

[XXXVII.] PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint; et quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia sint; et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, E F, G H, sit scilicet ut A B ad C D, ita E F ad G H, et describantur ab ipsis A B, C D, E F, G H similia et similiter posita solida parallelepipeda K A, L C, M E, N G. Dico ut K A ad L C, ita esse M E ad N G. Quoniam enim solidum parallelepipedum K A simile est ipsi L C, habebit

K A



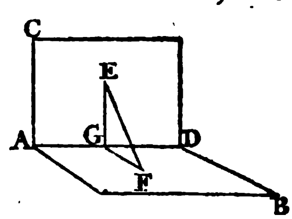
KA ad LC triplicatam proportionem ejus, quam AB habet ad CD[b]. Eâdem ratione, et solidum ME ad ipsum NG triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet EF ad GH[b]. Atqui est ut AB ad CD, ita EF ad GH. Ut igitur AK ad LC, ita ME ad NG. [b] 33. hujus.

Sed sit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. Dico, ut recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH. Quoniam enim rursus AK ad LC triplicatam proportionem habet ejus, quam AB habet ad CD[b]; habet autem et ME ad NG triplicatam proportionem ejus, quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. *Q. E. D.*

PROP. XXXVIII. THEOR. XXXVIII.]

Si planum ad planum rectum sit; et ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe CD ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AD, et in ipso CD plano, quodvis punctum E sumatur. Dico perpendicularem, quæ a puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AD. Non enim; sed, si fieri potest, cadat extra, ut EF; et plano



AB in puncto F occurrat: a puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem et plano CD ad rectos angulos erit[c]; et EG jungatur. Quoniam igitur recta FG plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG, quæ est in eodem [c] Def. 4. hujus.

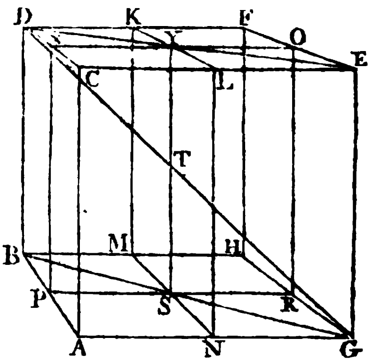
[d] Def. 3. hujus. C D plano: erit angulus F G E rectus[d]. Sed et E F plano A B ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus E F G. Quare trianguli E F G duo anguli duobus
[e] 17. primi. rectis sunt æquales; quod est absurdum[e]. Non igitur a puncto E ad A B planum perpendicularis ducta extra rectam lineam D A cadet. Ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. *Q. E. D.*

[XXXIX.]

PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio, et solidi parallelepipedi diagonalis, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo A F, oppositorum planorum C F, A H latera bifariam secentur in punctis



K, L, M, N, X, O, P, R. Et jungantur K L, M N; K M, L N; X O, P R; X P, O R. Æquales sunt rectæ D K, C L, æqualium utique D F, C E dimidiæ. Sed et parallelæ. Parallelæ igitur et æquales K L, D C, quæ illas
[f] 33. primi. D K, C L conjungunt[f]. Simili modo ostendentur M N, B A parallelæ et æquales. Jam vero cum K L parallela sit ipsi D C, erit et B A, quæ eidem D C est parallela, pa-
[g] 9. hujus. rallela ipsi K L[g]. Sed eadem B A ipsi M N est parallela. Quare K L, M N inter se sunt parallelæ. Quare et rectæ K M, L N, quæ puncta K, M; L, N, in parallelis K L, M N sumpta, conjungunt, in eodem sunt, in quo ipsæ
[h] 7. hujus. parallelæ, plano[h]. Plana igitur est figura K M N L. Simili modo plana ostendetur figura X P O R. Oppositorum

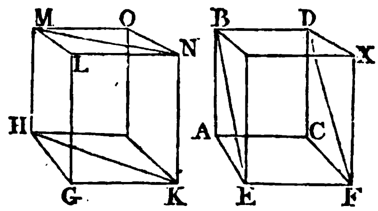
fitorum igitur planorum C F, A H lateribus in punctis K, L, M, N, X, O, P, R bifariam divifis, per fectiones plana ducuntur K N, X R. Communis planorum fectio fit Y S, et folidi parallelepipedi diagonalis fit D G. Dico Y S, D G fefe bifariam fecare. Jungantur enim D Y, Y E, B S, S G. Quoniam igitur D X parallela eft ipfi O E, alterni anguli D X Y, Y O E inter fe æquales funt [h]. Et quoniam D X quidem eft æqualis O E, X Y vero ipfi Y O, et angulos æquales continent; erit bafis D Y æqualis bafi Y E; et triangulum D X Y triangulo Y O E, et reliqui anguli reliquis angulis æquales [i]. Angulus igitur X Y D eft æqualis angulo O Y E, et ob id recta linea eft D Y E [k], et D Y, Y E funt æquales. Eâdem ratione, et B S G recta eft, et B S æqualis S G. Et quoniam C A ipfi D B æqualis eft et parallela, et eadem C A æqualis et parallela ipfi E G; erit et D B ipfi E G æqualis et parallela; et ipfas conjungunt rectæ lineæ D E, G B: parallela igitur eft D E ipfi B G [l]. Et fumpta funt in utrâque ipfarum quævis puncta D, Y, G, S, et junctæ funt D G, Y S. Ergo D G, Y S in uno funt plano [m]; neque tamen inter fe parallelæ; nimirum cum Y S (ipfi K M parallela) parallela erit D B, cui non eft parallela D G. Rectæ igitur D G, Y S, quæ in eodem plano non funt parallelæ, fibi invicem in puncto aliquo occurrent. Occurrant in T. Dico igitur in T bifariam dividi; hoc eft, Y T ipfi T S, D T vero ipfi T G æqualem effe. Nam cum D E fit parallela B G, erit et E D T angulus angulo B G T æqualis, alterni enim funt [h]. Eft autem et D T Y angulus æqualis ipfi G T S [a]. Duo igitur funt triangula D T Y, G T S duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum fubtenditur, videlicet D Y ipfi G S: dimidia enim funt ipforum D E, B G. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt [o]. Quare D T quidem eft æqualis T G, Y T vero ipfi T S. Si igitur in folido parallelepipedo, &c. *Q. E. D.*

[h] 29. primi.
[i] 4. primi.
[k] 14. primi.
[l] 33. primi.
[m] 7. hujus.
[a] 15. primi.
[o] 26. primi.

[XL.] PROP. XL. THEOR.

Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, et parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æque alta A B C D E F, G H K L M N. Et unum quidem basim habeat parallelogrammum A F,



alterum vero G H K triangulum, et duplum sit A F parallelogrammum trianguli G H K. Dico prisma A B C D E F prismati G H K L M N æquale esse. Compleantur enim A X, G O solida. Et quoniam parallelogrammum A F trianguli G H K est duplum; est autem et H K parallelogrammum duplum trianguli G H K [q]: erit A F parallelogrammum parallelogrammo H K æquale. Quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, et eâdem altitudine, inter se æqualia sunt [r]. Æquale igitur A X solidum solido G O. Atque est solidi quidem A X dimidium A B C D E F prisma, solidi vero G O dimidium est prisma G H K L M N [s]. Ergo A B C D E F prisma prismati G H K L M N est æquale. Si igitur sint duo prismata æque alta, &c. *Q. E. D.*

[q] 41. primi.
[r] 31. hujus.
[s] 28. hujus.

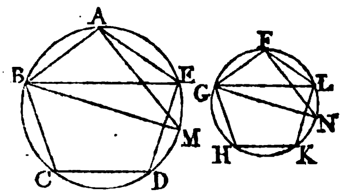
EUCLIDIS

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Similia polygona circulis inscripta inter se sunt, ut diametrorum quadrata.

SINT circuli ABCDE, FGHKL, et in ipsis similia polygona ABCDE, FGHKL; diametri autem circulorum sint BM, GN. Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Junganturenim BE, AM, GL, FN. Et quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; idcirco BAE angulus angulo GFL est æqualis, atque ut BA ad AE, ita est GF ad FL. Duo igitur triangula sunt BAE, GFL, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL; circa æquales autem angulos latera proportionalia. Quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum est[a]; ac propterea angulus AEB æqualis[a] 6. sexti. est angulo FLG. Sed angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis[b]; in eâdem enim circumferentiâ[b] 21. tertii. consistunt. Angulus autem FLG æqualis est angulo FNG[b]. Ergo et AMB angulus est æqualis angulo FNG. Est autem et rectus angulus BAM æqualis recto GFN[c]. Quare et reliquus trianguli AMB angulus re-[c] 31. tertii. liquo trianguli FGN æqualis. Æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN. Ergo ut BM ad GN, ita BA ad GF[d]. Sed proportionis quidem[d] 4. sext BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad quadratum ex GN; proportionis vero BA ad GF duplicata



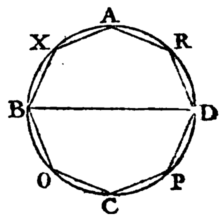
 plicata

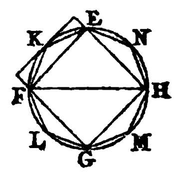
plicata eſt proportio A B C D E polygoni ad polygonum
[e] 20. ſexti. F G H K L [e]: eſt igitur ut quadratum ex B M ad quadratum ex G N, ita polygonum A B C D E ad F G H K L polygonum. Quare ſimilia polygona, quæ in circulis deſcribuntur, inter ſe ſunt, ut diametrorum quadrata. *Q. E. D.*

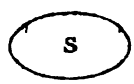
[II.] PROP. II. THEOR.

Circuli inter ſe ſunt, ut diametrorum quadrata.

Sint circuli A B C D, E F G H, diametri autem ipſorum ſint B D, F H. Dico ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita eſſe circulum A B C D ad E F G H circulum. Si enim non ita ſit; erit ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita circulus A B C D, vel ad ſpatium aliquod minus circulo E F G H, vel ad majus. Sit primum ad minus, quod ſit S. Et in circulo E F G H deſcribatur quadratum E F G H. Itaque deſcriptum in circulo quadratum majus eſt dimidio circuli E F G H; quoniam ſi per puncta E, F, G, H contingentes circulum ducamus, erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium E F G H †. Deſcripto autem circa circulum quadrato minor eſt circulus. Ergo quadratum E F G H majus eſt dimidio circuli E F G H. Secentur bifariam circumferentiæ E F, F G, G H, H E in punctis K, L, M, N: et E K, K F, F L, L G, G M, M H, H N, N E jungantur. Unumquodque igitur triangulorum E K F, F L G, G M H, H N E majus eſt dimidio ſegmenti circuli, in quo conſiſtit: quoniam ſi per puncta K, L, M, N contingentes circulum ducamus, et parallelogramma, quæ ſunt in rectas lineas E F, F G,



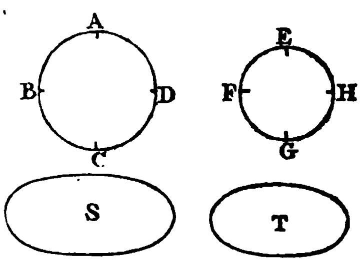




† *Nimirum quadratum circulo circumſcriptum quadrato ex diametro circuli eſt æquale. Id enim ex conſtructione ſeptimæ quarti manifeſtum eſt. Quadratum igitur circulo* E F G H *circumſcriptum quadrato ex* F H *eſt æquale.*
[f] 31. tertii. *Sed, propter angulum* F E H *in ſemicirculo rectum* [f], *quadratum ex* F H *qua-*
[g] 47. primi. *dratis duobus ex* F E, E H, *ſimul ſumptis, eſt æquale* [g]. *Et cum æquales inter ſe ſint rectæ* F E, E H *(quadrati utique inſcripti latera) duo ex* F E, E H *quadrata, quadrati ex alterutrâ, id eſt, inſcripti quadrati, duplo ſunt æqualia. Quadratum igitur ex diametro* F H, *ac proinde quadratum circulo circumſcriptum, inſcripti duplum eſt. Et inſcriptum viciſſim dimidium circumſcripti.*

G H,

G H, H E, compleamus; erit unumquodque triangulorum E K F, F L G, G M H, H N E dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt [f]. Sed ſegmentum minus eſt parallelogrammo. Quare unumquodque triangulorum E K F, F L G, G M H, H N E majus eſt dimidio ſegmenti circuli, in quo conſiſtit. Haſce igitur circumferentias bifariam ſecantes, et jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quædam circuli ſegmenta, quæ minora erunt exceſſu, quo circulus E F G H ipſum S ſpatium ſuperat. Etenim duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod relinquitur, rurſus majus quam dimidium, et hoc ſemper fiat; relinquetur tandem magnitudo aliqua, quæ minori magnitudine expoſitâ ſit minor [g]. Itaque relicta ſint ſegmenta circuli E F G H in rectis lineis E K, K F, F L, L G, G M, M H, H N, N E, quæ minora ſint exceſſu, quo circulus E F G H ipſum S ſpatium ſuperat. Ergo reliquum E K F L G M H N polygonum majus erit ſpatio S. Deſcribatur etiam in circulo A B C D, polygono E K F L G M H N ſimile polygonum A X B O C P D R. Eſt igitur ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita polygonum A X B O C P D R ad E K F L G M H N polygonum [h]. Sed et ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita A B C D circulus ad ſpatium S. Ergo et ut circulus A B C D ad ſpatium S, ita polygonum A X B O C P D R ad E K F L G M H N polygonum [i]. Major autem eſt circulus A B C D eo, quod in ipſo eſt polygono. Quare et ſpatium S majus eſt polygono E K F L G M H N [k]. Sed et minus [l]. Quod fieri non poteſt. Non igitur eſt ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita A B C D circulus ad ſpatium aliquod minus circulo E F G H. Similiter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita circulum E F G H ad aliquod ſpatium minus circulo A B C D. Dico igitur neque eſſe ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita circulum



[f] 41. primi.
[g] 1. decimi.
[h] 1. hujus.
[i] 11. quinti.
[k] 14. quinti.
[l] ex hyp.

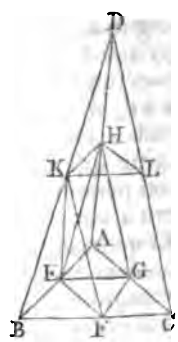
A B C D ad aliquod ſpatium majus circulo E F G H. Si enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium S. Erit igitur invertendo ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita ſpatium S ad A B C D circulum. Sed quoniam S majus eſt E F G H circulo; erit ut ſpatium S ad A B C D circulum, ita circulus E F G H ad aliquod ſpatium minus circulo A B C D [m]. Ergo et ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita E F G H circulus ad aliquod ſpatium minus circulo A B C D, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Non igitur ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita eſt circulus A B C D ad ſpatium aliquod majus E F G H circulo. Oſtenſum autem eſt neque ad minus. Quare ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita erit A B C D circulus ad circulum E F G H. Circuli igitur inter ſe ſunt, ut diametrorum quadrata. Q. E. D.

[m] 14. quinti.

[III.] PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis, triangularem habens baſim, dividitur in duas pyramides æquales et ſimiles inter ſe, quæ triangulares baſes habent, ſimileſque toti; et in duo priſmata æqualia; quæ quidem priſmata dimidio totius pyramidis ſunt majora.

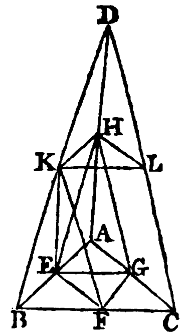
Sit pyramis, cujus baſis quidem A B C triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem A B C D dividi in duas pyramides æquales et ſimiles inter ſe, triangulares baſes habentes, et ſimiles toti; et in duo priſmata æqualia; et duo priſmata dimidio totius pyramidis eſſe majora. Secentur enim A B, B C, C A, A D, D B, D C bifariam in punctis E, F, G, H, K, L; et E H, E G, G H, H K, K L, L H, E K, K F, F G jungantur. Quoniam igitur A E quidem eſt æqualis E B, A H vero ipſi H D; erit E H ipſi D B parallela [n]. Eâdem ratione et H K eſt parallela ipſi A B. Parallelogrammum igitur eſt H E B K. Quare H K eſt æqualis E B [o]. Sed E B ipſi A E eſt æqualis. Ergo et A E ipſi H K æqualis erit. Eſt autem et A H æqualis H D. Duæ igitur A E, A H duabus K H, H D æquales ſunt, altera alteri, et angulus E A H æqualis angulo K H D [p]; baſis igitur



[n] 2. ſexti.
[o] 34. primi.
[p] 29. primi.

igitur E H basi K D est æqualis [q]. Quare triangulum [q] 4. primi.
A E H æquale est et simile triangulo H K D. Eâdem ratione et triangulum A H G triangulo H L D æquale est et simile. Et quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes E H, H G duabus rectis lineis sese tangentibus K D, D L parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos continebunt [r]. Ergo angulus E H G est æqualis [r] 10. undecimi.
angulo K D L. Rursus quoniam duæ rectæ lineæ E H, H G duabus K D, D L æquales sunt, altera alteri, et angulus E H G æqualis angulo K D L; erit basis E G basi K L æqualis [s]: æquale igitur est et simile triangulum [s] 4. primi.
E H G triangulo K D L. Eâdem ratione et A E G triangulum est æquale et simile triangulo H K L. Planum autem D B A, seu D K H, planis parallelis H K L, A B C similiter est inclinatum. Et eisdem planis parallelis planum D C A, seu D L H, similiter est inclinatum. Eisdem etiam planum D B C, seu D K L, similiter est inclinatum. Quare pyramis, cujus basis quidem est A E G triangulum, vertex autem punctum H, æqualis et similis est pyramidi, cujus basis est triangulum H K L, et vertex D punctum. Simili modo ostendetur pyramis, cujus basis quidem triangulum A B C, vertex autem punctum D, similis pyramidi, cujus basis triangulum H K L, et vertex punctum D. Planis enim numero æqualibus et similibus et similiter inclinatis continentur. Sed pyramis, cujus basis quidem H K L triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum A E G, et vertex H punctum. Quare et pyramis, cujus basis triangulum A B C, et vertex punctum D, similis est pyramidi, cujus basis A E G triangulum, et vertex punctum H. Utraque igitur ipsarum A E G H, H K L D pyramidum similis est toti pyramidi A B C D. Et quoniam B F est æqualis F C, erit E B F G parallelogrammum duplum trianguli G F C [t]. [t] 41. primi.
Et quoniam duo prismata æque alta sunt, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia [u]. Ergo prisma, [u] 40. undecimi.
contentum duobus triangulis B K F, E H G, et tribus parallelogrammis E B F G, E B K H, K H G F, est æquale prismati, quod duobus triangulis G F C, H K L, et tribus parallelogrammis K F C L, L C G H, H K F G continetur. Et manifestum est utrumque ipsorum prismatum, et cujus basis est E B F G parallelogrammum, opposita autem ipsi H K recta linea, et cujus basis est G F C triangulum,

gulum, et oppositum ipsi triangulum K L H, majus esse utrâque pyramidum, quarum bases quidem A E G, H K L triangula, vertices autem puncta H, D: quoniam si jungamus E F, E H rectas lineas, prisma quidem, cujus basis est E B F G parallelogrammum, et opposita ipsi recta linea K H, majus est pyramide, cujus basis E B F triangulum, vertex autem punctum K. Sed pyramis, cujus basis triangulum E B F, et vertex K punctum, est æqualis pyramidi, cujus basis A E G triangulum, et vertex punctum H [u]; æqualibus enim et similibus planis continentur, et similiter inclinatis. Quare et prisma, cujus basis parallelogrammum E B F G, opposita autem ipsi recta linea H K, majus est pyramide, cujus basis A E G triangulum, et vertex punctum H. Prisma vero, cujus basis parallelogrammum E B F G, et opposita ipsi recta linea H K, est æquale prismati, cujus basis G F C triangulum, et ipsi oppositum triangulum H K L: et pyramis, cujus basis triangulum A E G, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi, cujus basis H K L triangulum, et vertex punctum D. Ergo duo prismata, de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus, quarum bases triangula A E G, H K L, vertices autem H, D puncta. Tota igitur pyramis, cujus basis A B C triangulum, vertex autem punctum D, divisa est in duas pyramides æquales, et similes inter se, et similes toti: et in duo prismata æqualia: suntque duo prismata æqualia dimidio totius pyramidis majora. Q. E. D.



[u] Def. 10. undecimi.

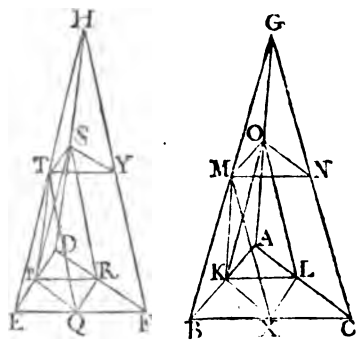
[IV.]

PROP. IV. THEOR.

Si sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant, dividatur autem utraque ipsarum, et in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, et in duo prismata æqualia; et factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat: erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita et in unâ pyramide prismata omnia ad prismata omnia in alterâ pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant A B C, D E F, vertices autem sint puncta G, H; et

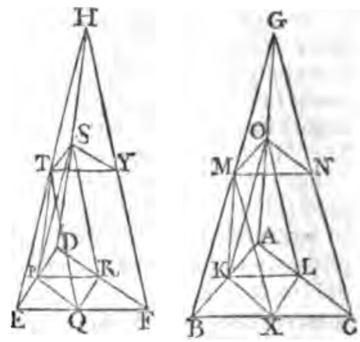
et dividatur utraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, et in duo prismata æqualia; et factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur: atque hoc semper fiat. Dico ut A B C basis ad basim D E F, ita esse prismata omnia, quæ sunt in pyramide A B C G ad prismata omnia, quæ in pyramide D E F H, multitudine æqualia. Quoniam enim B X quidem



est æqualis X C, A L vero æqualis L C; erit X L ipsi A B parallela[x], et triangulum A B C triangulo L X C simile. [x] 2. sexti.
Eâdem ratione et triangulum D E F simile est triangulo R Q F. Et quoniam B C quidem est dupla C X, E F vero dupla ipsius F Q, ut B C ad C X, ita erit E F ad F Q. Et descripta sunt ab ipsis B C, C X similia et similiter posita rectilinea A B C, L X C; ab ipsis vero E F, F Q similia et similiter posita rectilinea D E F, R Q F. Est igitur ut B A C triangulum ad triangulum L X C, ita triangulum D E F ad R Q F triangulum[y]; et permutando ut trian- [y] 22. sexti.
gulum A B C ad triangulum D E F, ita L X C triangulum ad triangulum R Q F. Sed ut L X C triangulum ad triangulum R Q F, ita prisma, cujus basis est triangulum L X C, oppositum autem ipsi O M N, ad prisma, cujus basis R Q F triangulum, et oppositum ipsi S T Y[z]. Ut [z] 28. et 32. undecimi.
igitur A B C triangulum ad triangulum D E F, ita prisma, cujus basis est triangulum L X C, oppositum autem ipsi O M N, ad prisma, cujus basis R Q F triangulum, et oppositum ipsi S T Y[a]. Et quoniam duo prismata, quæ in [a] 11. quinti.
pyramide A B C G inter se æqualia sunt, sed et quæ in pyramide D E F H prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma, cujus basis parallelogrammum K L X B, opposita vero ipsi recta linea M O, ad prisma, cujus basis L X C triangulum, et oppositum ipsi O M N, ita prisma, cujus basis parallelogrammum E P R Q, et opposita recta linea S T, ad prisma, cujus basis R Q F triangulum, oppositum vero ipsi S T Y. Quare componendo, ut prismata K B X L M O, L X C M N O ad prisma L X C M N O,

ita

ita prismata P E Q R S T, R Q F S T Y ad prisma R Q F S T Y. Et permutando, ut prismata K B X L M O, L X C O M N ad prismata P E Q R S T, R Q F S T Y, ita prisma L X C M N O ad prisma R Q F S T Y. Ut autem prisma L X C M N O ad prisma R Q F S T Y, ita ostensa est basis L X C ad R Q F basim, et A B C basis ad basim D E F. Ergo et ut triangulum A B C ad triangulum D E F, ita quæ in pyramide A B C G duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide D E F H. Similiter autem, et si factas pyramides dividamus eodem modo velut O M N G, S T Y H, erit ut O M N basis ad basim S T Y, ita quæ in pyramide O M N G duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide S T Y H. Sed ut O M N basis ad basim S T Y, ita basis A B C ad D E F basim. Et ut igitur A B C basis ad basim D E F, ita quæ in pyramide A B C G duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide D E F H; et quæ in pyramide O M N G duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide S T Y H; et quatuor ad quatuor. Eadem autem ostendentur et in factis prismatibus ex divisione pyramidum A K L O, et D P R S, et omnium simpliciter multitudine æqualium. *Q. E. D.*

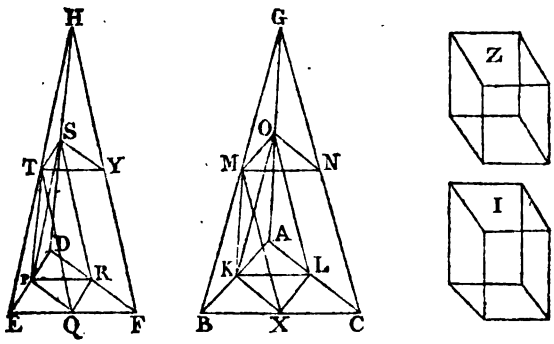


[V.] PROP. V. THEOR.

Pyramides, quæ eâdem sunt altitudine, et triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eâdem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula A B C, D E F, vertices autem puncta G, H. Dico ut A B C basis ad basim D E F, sic esse pyramidem A B C G ad D E F H pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut A B C basis ad basim D E F, sic A B C G pyramis, vel ad solidum minus pyramide D E F H, vel ad majus. Sit primum ad solidum minus, sitque Z. Et dividatur pyramis D E F H in duas pyramides æquales inter se, et similes toti, et in duo prismata æqualia. Sunt duo igitur prismata dimidio totius pyramidis majora[a]. Et rursus

[a] 3. hujus.



sus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, atque hoc semper fiat, quoad sumantur quædam pyramides a pyramide D E F H, quæ sint minores excessu, quo pyramis D E F H solidum Z superat. Itaque sumantur, et sint exempli causâ, pyramides D P R S, S T Y H. Erunt igitur reliqua in pyramide D E F H prismata solido Z majora. Dividatur etiam A B C G pyramis in totidem partes similes pyramidi D E F H. Ergo ut A B C basis ad basim D E F, ita quæ in pyramide A B C G prismata ad prismata, quæ in pyramide D E F H [b]. Sed ut [b] A B C basis ad basim D E F, ita pyramis A B C G ad solidum Z. Et igitur ut A B C G pyramis ad solidum Z, ita quæ in pyramide A B C G prismata ad prismata, quæ in pyramide D E F H. Major autem est pyramis A B C G prismatibus, quæ in ipsâ sunt. Ergo et solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide D E F H, est majus. Sed et minus [c]; quod fieri non potest. Non igitur ut [c] A B C basis ad basim D E F, ita est pyramis A B C G ad solidum aliquod minus pyramide D E F H. Similiter ostendemus neque ut D E F basis ad basim A B C, ita esse pyramidem D E F H ad solidum aliquod pyramide A B C G minus. Dico igitur neque esse ut A B C basis ad basim D E F, ita A B C G pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide D E F H. Si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum I. Erit igitur invertendo ut D E F basis ad basim A B C, ita solidum I ad A B C G pyramidem. Cum autem solidum I majus est pyramide E D F H, erit ut solidum I ad A B C G pyramidem, ita D E F H pyramis ad solidum aliquod minus pyramide A B C G. Et ut igitur D E F basis ad basim A B C, ita pyramis D E F H ad solidum

[b] 4. hujus.

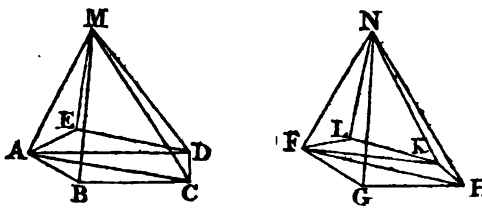
[c] ex prius demonstratis.

solidum aliquod pyramide A B C G minus, quod est absurdum, ut modo ostensum est. Non igitur ut A B C basis ad basim D E F, ita est A B C G pyramis ad solidum aliquod majus pyramide D E F H. Ostensum autem est, neque ad minus. Quare ut A B C basis ad basim D E F, ita est pyramis A B C G ad D E F H pyramidem. Pyramides igitur, quæ eâdem sunt altitudine, et triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

[VI.] PROP. VI. THEOR.

Pyramides, quæ eâdem sunt altitudine, et polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eâdem altitudine pyramides, quæ polygonas bases habeant A B C D E, F G H K L; vertices autem M, N puncta. Dico ut A B C D E basis ad basim F G H K L,



ita esse A B C D E M pyramidem ad pyramidem F G H K L N. Dividatur enim basis quidem A B C D E in triangula A B C, A C D, A D E; basis vero F G H K L dividatur in triangula F G H, F H K, F K L. Et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides, quæ a principio. Quoniam igitur est ut triangulum A B C ad triangulum A C D, ita A B C M pyramis ad pyramidem A C D M[d]: et componendo ut A B C D trapezium ad triangulum A C D, ita A B C D M pyramis ad pyramidem A C D M. Sed et ut A C D triangulum ad A D E, ita pyramis A C D M ad A D E M pyramidem[d]. Ergo ex æquali, ut A B C D basis ad basim A D E, ita A B C D M pyramis ad pyramidem A D E M. Et rursus componendo ut A B C D E basis ad basim A D E, ita A B C D E M pyamis ad pyramidem A D E M. Eâdem ratione, et ut F G H K L basis ad basim F K L, ita et F G H K L N pyramis ad F K L N pyramidem. Et quodiam duæ pyramides sunt A D E M, F K L N, quæ triangulares bases habent, et eâdem sunt altitudine; erit ut

[d] 5. hujus.

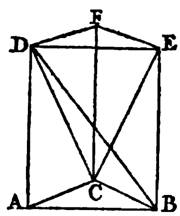
ut A D E basis ad basim F K L, ita A D E M pyramis ad pyramidem F K L N [e]. Quod cum sit ut A B C D E basis ad basim A D E, ita A B C D E M pyramis ad pyramidem A D E M; ut autem A D E basis ad basim F K L, ita A D E M pyramis ad pyramidem F K L N: erit ex æquali, ut basis A B C D E ad F K L basim, ita A B C D E M pyramis ad pyramidem F K L N. Sed et ut F K L basis ad basim F G H K L, ita erat et F K L N pyramis ad pyramidem F G H K L N. Quare rursus ex æquali, ut A B C D E basis ad basim F G H K L, ita est A B C D E M pyramis ad pyramidem F G H K L N. Pyramides igitur, quæ eâdem sunt altitudine, et polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

[e] 5. hujus.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

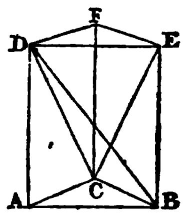
Sit prisma, cujus basis quidem triangulum A B C, oppositum autem ipsi D E F. Dico prisma A B C D E F dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim B D, E C, C D. Et quoniam parallelogrammum est A B E D, cujus diagonalis B D; erit A B D triangulum triangulo E B D æquale [f]. Ergo pyramis, cujus basis triangulum A B D, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi, cujus basis E D B triangulum, et vertex punctum C [g]. Sed pyramis, cujus basis E D B triangulum, et vertex punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum E B C, et vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. Ergo et pyramis, cujus basis triangulum A B D, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi, cujus basis E B C triangulum, et vertex punctum D. Rursus quoniam F C B E parallelogrammum est, cujus diagonalis C E, triangulum E C F triangulo C B E est æquale [f]. Ergo et pyramis, cujus basis B E C triangulum, vertex autem punctum D, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum E C F, et vertex punctum D [g]. Sed pyramis, cujus basis quidem B C E triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est æqualis pyramidi, cujus basis triangulum A B D, et vertex



[f] 34. primi.

[g] 5. hujus.

tex C punctum. Quare et pyramis, cujus basis triangulum C E F, et vertex punctum D, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum A B D, et vertex C punctum. Prisma igitur A B C D E F dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis, cujus basis A B D triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum C A B, et vertex D punctum, iisdem namque planis continetur; pyramis autem, cujus basis triangulum A B D, et vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis, cujus basis A B C triangulum, et oppositum ipsi D E F: pyramis igitur, cujus basis triangulum A B C, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet A B C triangulum, et oppositum ipsi triangulum D E F. *Q. E. D.*



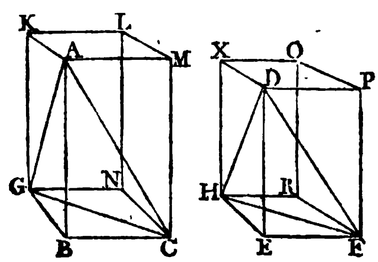
Cor. 1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, et altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, et oppositam ipsi eandem, dividitur in prismata, quæ triangulares bases habent, et quæ ipsis opponuntur.

Cor. 2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides, quæ triangulares bases habent, in triplicatâ sunt proportione homologorum laterum.

Sint similes et similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula A B C, D E F; vertices autem



G, H, puncta. Dico A B C G pyramidem ad pyramidem

D E F H,

DEFH triplicatam proportionem habere ejus, quam BC habet ad EF. Compleantur enim BGML, EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, triangula tria ABC, ABG, GBC, tribus DEF, DEH, HEF singula singulis similia erunt, et similes similium inclinationes [h]. Sed propter [h] Def. 9. similia triangula ABC, DEF, angulus ABC æqualis est undecimi. angulo DEF, et AB ad BC ut DE ad EF [l]. Quoniam igi- [l] Def. 1. tur est ut AB ad DE; ita BC ad EF, et circum æquales an- sexti. gulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. Eâdem ratione, et parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, et parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. Tria igitur parallelogramma BM, KB, BN tribus EP, EX, ER sunt similia. Sed et plana similium similiter inclinata. Et tria quidem MB, BK, BN tribus oppositis æqualia et similia sunt, et similiter inclinata, tria vero EP, EX, ER tribus oppositis æqualia et similia, et similter incltnata [k]. Quare solida BGML, EHPO si- [k] 24. un- milibus planis et numero æqualibus et similiter incli- decimi. natis continentur; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO [h]. Similia autem solida parallelepipeda in triplicatâ sunt proportione homologorum laterum [l]. Ergo solidum BGML ad solidum EHPO [l] 33. un- triplicatam habet proportionem ejus, quam habet latus decimi. homologum BC ad EF homologum latus. Sed ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH [m]; pyramis enim sexta pars est ip- [m] 15. quinti. sius solidi, cum prisma, quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum [n]. Quare et pyramis [n] Cor. 1. ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem 7. hujus. habebit ejus, quam BC habet ad EF. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc perspicuum est, et similes pyramides, quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicatâ proportione homologorum laterum. Ipsis enim divisis in similes pyramides triangulares bases habentes: quoniam et similia polygona, quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, et numero æqualia et homologa totis; erit ut una pyramis in unâ pyramide, triangularem habens basim, ad pyramidem in alterâ, triangularem basim habentem, ita et omnes pyramides in unâ pyramide, triangulares habentes bases, ad omnes in alterâ, triangulares bases habentes; hoc est, ita pyramis ipsa, mult-

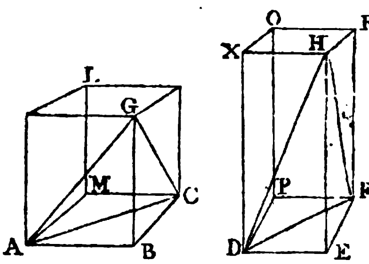
angulam habens basim, ad pyramidem, quæ multangulam basim habet. Sed pyramis, triangularem habens basim, ad pyramidem, quæ triangularem basim habet, est in triplicatâ proportione homologorum laterum. Et pyramis igitur, polygonam habens basim, ad pyramidem, similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

[IX.]

PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, et triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales: et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales; illæ sunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares bases habeant A B C, D E F, vertices vero G, H puncta. Dico pyramidum A B C G, D E F H bases et altitudines



reciprocari; scilicet ut A B C basis ad basim D E F, ita esse pyramidis D E F H altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Compleantur enim BGML, EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis A B C G est æqualis pyramidi D E F H, atque est pyramidis quidem A B C G sextuplum B G M L solidum, pyramidis vero D E F H sextuplum solidum E H P O; erit solidum B G M L solido E H P O æquale [m]. Æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines reciprocantur [n]. Est igitur ut B M basis ad basim E P, ita E H P O solidi altitudo ad altitudinem solidi B G M L. Sed ut B M basis ad basim E P, ita A B C triangulum ad triangulum D E F [a]. Ergo et ut A B C triangulum ad triangulum D E F, ita solidi E H P O altitudo ad altitudinem solidi B G M L. Sed solidi quidem E H P O altitudo eadem est cum altitudine pyramidis D E F H; solidi vero B G M L altitudo eadem

[m] 15. quinti.
[n] 34. undecimi.

eadem eſt cum altitudine pyramidis A B C G: eſt igitur ut ABC baſis ad baſim D E F, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G. Quare pyramidum A B C G, D E F H baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales. Et ſi pyramidum A B C G, D E F H baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales, ſitque ut A B C baſis ad baſim D E F, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G: dico A B C G pyramidem pyramidi D E F H æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt D E F H pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G; ut autem A B C baſis ad baſim D E F, ita B M parallelogrammum ad parallelogrammum E P: erit et ut parallelogrammum B M ad E P parallelogrammum, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G. Sed pyramidis quidem D E F H altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi E H P O; pyramidis vero A B C G altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi B G M L: eſt igitur ut B M baſis ad baſim E P, ita E H P O ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi B G M L. Quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes et altitudines reciprocantur, ea ſunt æqualia [o]. Solidum igitur parallelepipedum B G M L æquale eſt ſolido parallelepipedo E H P O. Atque eſt ſolidi quidem B G M L ſexta pars pyramis A B C G: ſolidi vero E H P O itidem ſexta pars pyramis D E F H. Ergo pyramis A B C G pyramidi D E F H eſt æqualis. Æqualium igitur pyramidum, et triangulares baſes habentium, baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales: et quarum pyramidum, triangulares baſes habentium, baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales; illæ ſunt æquales. *Q. E. D.*

[o] 34. undecimi.

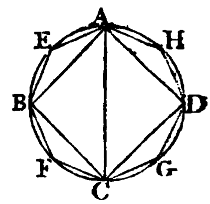
PROP. X. THEOR. [X.]

Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet et altitudinem æqualem.

Habeat conus eandem baſim, quam cylindrus, videlicet circulum A B C D, et altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt, cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus non ſit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. Sit primo major quam triplus. Et deſcribatur in A B C D circulo quadratum A B C D. Ergo quadratum A B C D majus eſt

 quam

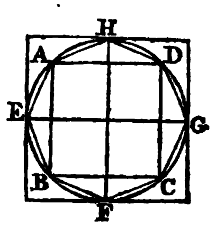
quam dimidium A B C D circuli. Et a quadrato A B C D erigatur prisma æque altum cylindro. Quod quidem prisma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam si circa circulum A B C D quadratum describatur, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti. Et sint ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æque alta, nimirum prismata ipsa. Quare prismata inter se sunt ut bases[p]. Et prisma igitur erectum a quadrato A B C D dimidium est prismatis erecti a quadrato, quod circa circulum A B C D describitur. Atqui est cylindrus minor prismate erecto a quadrato, quod describitur circa circulum A B C D. Prisma igitur erectum a quadrato A B C D æque altum cylindro, dimidio cylindri est majus. Secentur circumferentiæ A B, B C, C D, D A bifariam in punctis E, F, G, H; et A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A jungantur. Unumquodque igitur triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A majus est dimidio portionis circuli A B C D, in quâ consistit[q]. Erigantur ab unoquoque triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A prismata æque alta cylindro. Ergo et unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri, quæ ad ipsum est. Quoniam si per puncta E, F, G, H parallelæ ipsis A B, B C, C D, D A ducantur, et compleantur in ipsis A B, B C, C D, D A parallelogramma, a quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea, quæ sunt in triangulis A E B, B F C, C G D, D H A[p]. Et sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. Ergo et prismata, quæ in triangulis A E B, B F C, C G D, D H A, majora sunt dimidio portionum cylindri, quæ ad ipsa sunt. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, et hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri, quæ sint minores excessu, quo cylindrus coni triplum superat. Relinquantur jam, et sint A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A. Reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem, quæ cylindri, majus est quam triplum coni. Sed prisma, cujus



[p] Cor. 2. 7. hujus.

[q] ostenditur ad 2. hujus.

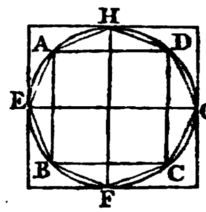
cujus basis A E B F C G D H polygonum, et altitudo eadem, quæ cylindri, triplum est pyramidis, cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem, qui coni [r]. Et pyramis igitur cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem, qui coni, major est cono, qui basim habet A B C D circulum. Sed et minor: (ab ipso enim comprehenditur.) Quod fieri non potest. Non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. Erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. Describatur in A B C D circulo quadratum A B C D. Ergo quadratum A B C D majus est quam dimidium A B C D circuli. Et a quadrato A B C D erigatur pyramis, verticem habens eundem, quem conus; pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum A B C D dimidium ejus, quod circa circulum descriptum est; et si a quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ et prismata appellantur, erit quod a quadrato A B C D erigitur, dimidium ejus, quod erectum est a quadrato circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases [s]. Quare et tertiæ partes ipsarum. Pyramis igitur, cujus basis quadratum A B C D, dimidia est ejus pyramidis, quæ a quadrato circa circulum descripto erigitur. Sed pyramis, erecta a quadrato descripto circa circulum, major est cono; ipsum namque comprehendit. Ergo pyramis, cujus basis A B C D quadratum, vertex autem idem, qui coni, major est quam coni dimidium. Secentur circumferentiæ A B, B C, C D, D A bifariam in punctis E, F, G, H. Et jungantur A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A. Et unumquodque igitur triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A majus est quam dimidium portionis circuli A B C D, in quâ consistit. Erigantur ab unoquoque triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A pyramides, verticem habentes eundem, quem conus. Ergo et unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab uno-



[r] Cor. 1. 7. hujus.

[s] Cor. 2. 7. hujus.

quoque triangulorum erigentes pyramides, verticem habentes eundem, quem conus, et hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quaſdam coni portiones, quæ minores erunt exceſſu, quo conus tertiam cylindri partem ſuperat[r]. Relinquantur; et ſint quæ in ipſis A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A. Reliqua igitur pyramis, cujus baſis polygonum AEBFCGDH, et vertex idem, qui coni, major eſt quam tertia cylindri pars. Sed pyramis, cujus baſis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem, qui coni, tertia pars eſt priſmatis, cujus baſis polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem, quæ cylindri. Priſma igitur, cujus baſis A E B F C G D H polygonum, et altitudo eadem, quæ cylindri, majus eſt cylindro, cujus baſis eſt circulus A B C D. Sed et minus: (ab ipſo enim comprehenditur.) Quod fieri non poteſt. Non igitur cylindrus minor eſt quam triplus coni. Oſtenſum autem eſt neque majorem eſſe quam triplum. Ergo cylindrus coni triplus ſit neceſſe eſt; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem quam ipſe baſim habentis, et altitudinem æqualem. *Q. E. D.*

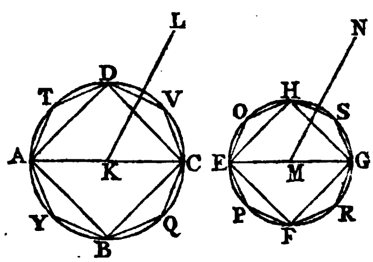


r 1. decimi.

[XI.] PROP. XI. THEOR.

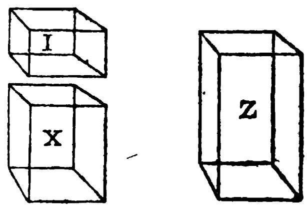
Coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint in eâdem altitudine coni et cylindri, quorum baſes circuli A B C D, E F G H, axes autem K L, M N, et diametri baſium A C, E G. Dico ut A B C D circulus



ad circulum E F G H, ita eſſe conum A L ad E N conum. Si enim non ita ſit; erit ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita conus A L ad aliquod ſolidum minus cono E N,

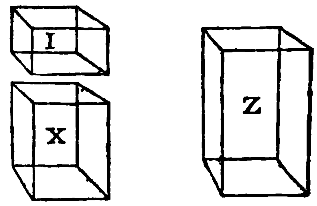
EN, vel ad majus. Sit primo ad minus, quod sit X. Et quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I



solidum. Conus igitur EN ipsis solidis X, I est æqualis. Describatur in EFGH circulo quadratum EFGH, quod majus est dimidio circuli. Erigatur a quadrato EFGH pyramis æque alta cono. Pyramis igitur erecta major est coni dimidio. Nam si circa circulum quadratum describamus, et ab ipso erigamus pyramidem æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidium: etenim inter se sunt ut bases[s]. [s] 6. hujus.
Conus autem circumscriptâ pyramide est minor. Ergo pyramis, cujus basis quadratum EFGH, vertex autem idem, qui coni, major est coni dimidio. Secentur circumferentiæ EF, FG, GH, HE bifariam in punctis P, R, S, O; et OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH, HO jungantur. Unumquodque igitur triangulorum HOE, EPF, FRG, GSH majus est quam dimidium segmenti circuli, in quo consistit. Erigatur ab unoquoque triangulorum HOE, EPF, FRG, GSH pyramis æque alta cono. Ergo et unaquæque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, et jungentes rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt[t]. Relinquantur, et sint quæ in ipsis [t] 1. decimi.
HO, OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH. Reliqua igitur pyramis, cujus basis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem, quæ coni, major est solido X. Describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile et similiter positum polygonum DTAYBQCV, et ab ipso erigatur pyramis æque alta cono AL. Quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS[u]; [u] 1. hujus.
ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus ad circulum EFGH[x]; erit ut ABCD [x] 2. hujus.
circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS[y]. Sed ut ABCD circulus [y] 11. quinti
ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum; et ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS,

 ita

ita pyramis, cujus basis D T A Y B Q C V polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum H O E P F R G S, et vertex punctum N. Ut igitur conus A L ad X solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum D T A Y B Q C V, et vertex punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum H O E P F R G S, et vertex N punctum. Conus autem A L major est pyramide, quæ est in ipso. Majus igitur est solidum X pyramide, quæ est in cono E N. Sed et ostensum est minus. Quod fieri non potest. Non igitur ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita est A L conus ad solidum aliquod minus cono E N. Similiter demonstrabitur neque ut E F G H circulus ad circulum ABCD, ita esse conum E N ad aliquod solidum minus cono A L. Dico præterea neque esse ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita A L conum ad aliquod solidum majus cono E N. Si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Z. Ergo invertendo ut E F G H circulus ad circulum A B C D, ita erit solidum Z ad A L conum. Sed cum sit solidum Z majus cono E N; erit ut solidum Z ad A L conum, ita conus E N ad aliquod solidum minus cono A L. Et igitur ut E F G H circulus ad circulum A B C D, ita conus E N ad aliquod solidum minus cono A L, quod fieri non posse ostensum est. Non igitur ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita conus A L ad aliquod solidum majus cono E N. Ostensum autem est neque esse ad minus. Ergo ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita est conus A L ad E N conum.

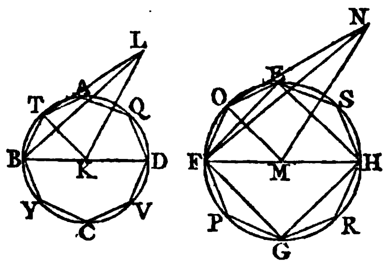


[x] 15. quinti. Sed ut conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum [x]; [y] 10. hujus. est enim uterque utriusque triplus [y]. Et igitur ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

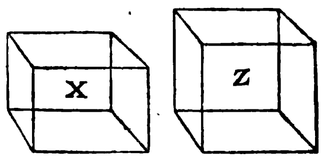
[XII.] PROP. XII. THEOR.

Similes coni et cylindri inter se sunt in triplicatâ proportione diametrorum, quæ sunt in basibus.

Sint similes coni et cylindri, quorum bases quidem circuli A B C D, E F G H, diametri vero basium B D, F H, et



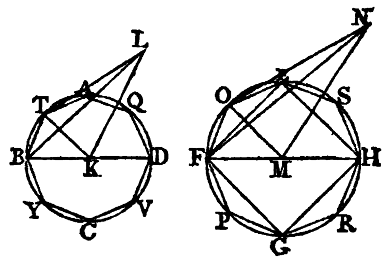
et axes conorum vel cylindrorum K L, M N. Dico conum, cujus basis A B C D circulus, vertex autem punctum L, ad conum, cujus basis circulus E F G H, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus, quam habet B D ad F H. Si enim non habet conus A B C D L ad conum E F G H N triplicatam proportionem ejus, quam B D habet ad F H, habebit A B C D L conus ad aliquod solidum minus cono E F G H N triplicatam proportionem, vel ad majus. Habeat primo ad minus, quod sit X. Et describatur in E F G H circulo quadratum E F G H. Quadratum igitur E F G H



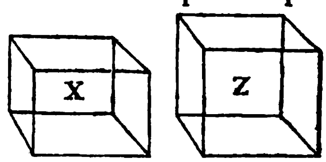
majus est dimidio E F G H circuli. Et erigatur a quadrato E F G H pyramis æque alta cono. Ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. Itaque secentur E F, F G, G H, H E circumferentiæ bifariam in punctis O, P, R, S, et jungantur E O, O F, F P, P G, G R, R H, H S, S E. Unumquodque igitur triangulorum E O F, F P G, G R H, H S E majus est dimidio segmenti circuli E F G H, in quo consistit. Et erigatur ab unoquoque triangulorum E O F, F P G, G R H, H S E pyramis, eundem verticem habens, quem conus. Ergo et unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. Secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides, eundem habentes verticem, quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam coni portiones, quæ minores erunt excessu, quo conus E F G H N ipsum X solidum superat [z]. Relinquantur, et sint quæ in ipsis E O, O F, F P, P G, G R, R H, H S, S E. Reliqua igitur pyramis, cujus basis quidem polygonum

[z] 1. decimi.

E O F-



E O F P G R H S, vertex autem N punctum, major est solido X. Describatur etiam in circulo A B C D, polygono E O F P G R H S simile et similiter positum polygonum A T B Y C V D Q: a quo erigatur pyramis, eundem verticem habens, quem conus; et triangulorum continentium pyramidem, cujus basis quidem

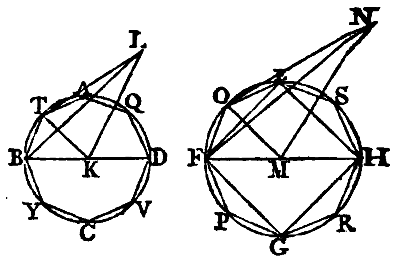


est polygonum A T B Y C V D Q, vertex autem punctum L, unum sit L B T; triangulorum vero continentium pyramidem, cujus basis E O F P G R H S polygonum, et vertex punctum N, unum sit N F O; et jungantur K T, M O. Quoniam igitur conus A B C D L similis est cono E F G H N, erit ut B D ad F H, ita K L axis ad axem
[x] Def. 24. undecimi. M N [x]. Ut autem B D ad F H, ita B K ad F M [y]. Itaque
[y] 15. quinti. ut B K ad F M, ita K L ad M N; et permutando ut B K ad K L, ita F M ad M N. Et cum perpendicularis utraque est, et circa æquales angulos B K L, F M N latera sunt proportionalia: simile igitur est B K L triangulum
[z] 6. sexti. triangulo F M N [z]. Rursus quoniam est ut B K ad K T, ita F M ad M O, et circa æquales angulos B K T, F M O latera sunt proportionalia (etenim quæ pars est angulus B K T quatuor rectorum, qui sunt ad K centrum, eadem est pars et angulus F M O quatuor rectorum, qui sunt ad centrum M) erit triangulum B K T triangulo F M O simile [z]. Et quoniam ostensum est ut B K ad K L, ita esse F M ad M N; æqualis autem est B K ipsi K T, et F M ipsi M O: erit ut T K ad K L, ita O M ad M N; et circa æquales angulos T K L, O M N latera sunt proportionalia; recti enim sunt: triangulum igitur L K T simile est triangulo M N O. Quod cum ob similitudinem triangulorum B K L, F M N, sit ut L B ad B K, ita N F ad F M; ob similitudinem vero triangulorum B K T, F M O, ut

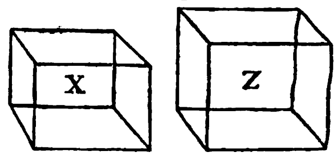
K B

K B ad B T, ita M F ad F O: erit ex æquali ut L B ad B T, ita N F ad F O. Rursus cum ob similitudinem triangulorum L T K, N O M, sit ut L T ad T K, ita N O ad O M; et ob similitudinem triangulorum K B T, O M F, ut K T ad T B, ita M O ad O F: ex æquali erit ut L T ad T B, ita N O ad O F. Ostensum autem est et ut T B ad B L, ita O F ad F N. Quare rursus ex æquali ut T L ad L B, ita O N ad N F. Triangulorum igitur L T B, N O F proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt L T B, N O F triangula, et inter se similia[y]. Sed cum angulorum planorum æqualium T B K, O F M verticibus rectæ sublimes B L, F N insistant, quæ cum rectis B T, F O; B K, F M angulos æquales faciunt; angulum scilicet T B L angulo O F N æqualem, et angulum K B L angulo M F N: similes erunt planorum L B T, L B K inter se et tertio T B K, atque planorum N F O, N F M inter se et tertio O F M, inclinationes[z]. Quare et pyramis, cujus basis triangulum B K T, vertex autem L punctum, similis est pyramidi, cujus basis F M O triangulum, et vertex punctum N; similibus enim planis continentur, et multitudine æqualibus, et similiter inclinatis. Pyramides autem similes, et quæ triangulares bases habent, in triplicatâ sunt proportione homologorum laterum[a]. Ergo pyramis B K T L ad pyramidem F M O N triplicatam habet proportionem ejus, quam B K habet ad F M. Similiter a punctis quidem A, Q, D, V, C, Y ad K, a punctis vero E, S, H, R, G, P ad M ducentes rectas lineas, et a triangulis erigentes pyramides, vertices eosdem habentes, quos coni; ostendemus et unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B K latus ad homologum latus M F, hoc est, quam B D ad F H. Sed ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia[b]. Est igitur et ut B K T L pyramis ad pyramidem F M O N, ita tota pyramis, cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem, cujus basis polygonum E O F P G R H S, et vertex punctum N. Quare et pyramis, cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum E O F P G R H S, et vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus, quam B D habet ad F H. Ponitur autem conus, cujus basis circulus A B C D, vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam

[y] 5. sexti.
[z] 2 Cor. 30. hujus. Vide Addenda.
[a] 8. hujus.
[b] 12. quinti.



catam proportionem habere ejus, quam B D ad F H. Ut igitur conus, cujus basis circulus A B C D, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est pyramis, cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum E O F P G R H S, et vertex punctum N. Dictus autem conus major est pyramide, quæ in ipso; etenim eam comprehendit. Majus igitur est et solidum X pyramide, cujus basis polygonum E O F P G R H S, vertex autem punctum N. Sed et minus. Quod fieri non potest. Non igitur conus, cujus basis A B C D circulus, et vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono, cujus basis circulus E F G H, et vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus, quam B D habet ad F H. Similiter demonstrabimus neque conum E F G H N ad aliquod solidum minus cono A B C D L triplicatam proportionem habere ejus, quam habet F H ad B D. Itaque dico neque A B C D L conum ad solidum majus cono E F G H N triplicatam habere proportionem ejus, quam B D habet ad F H. Si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. Invertendo igitur, solidum Z ad conum A B C D L triplicatam proportionem habet ejus, quam F H ad B D. Cum autem est solidum Z majus cono E F G H N; erit ut solidum Z ad conum A B C D L, ita E F G H N conus ad aliquod solidum minus cono A B C D L. Ergo et conus E F G H N ad solidum aliquod minus cono A B C D L triplicatam proportionem habebit ejus, quam F H habet ad B D, quod fieri non posse demonstratum est. Non igitur A B C D L conus ad solidum aliquod majus cono E F G H N triplicatam proportionem habet ejus, quam B D ad F H. Ostensum autem est



neque

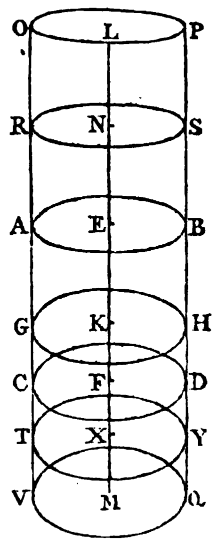
neque ad minus. Quare conus A B C D L ad E F G H N conum triplicatam proportionem habet ejus, quam B D ad F H. Ut autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum [c]. Cylindrus enim in eâdem existens basi, in quâ conus, et ipsi æque altus, coni triplus est [d]. Cum ostensum sit, omnem conum tertiam partem esse cylindri, eandem quam ipse basim habentis, et æqualem altitudinem. Ergo et cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus, quam B D habet ad F H. Similes igitur coni et cylindri inter se sunt in triplicatâ proportione diametrorum, quæ sunt in basibus. *Q. E. D.*

[c] 15. quinti.
[d] 10. hujus.

PROP. XIII. THEOR. [XIII.]

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Cylindrus enim A D plano G H secetur oppositis planis A B, C D parallelo. Planum autem G H occurrat axi E F in K puncto. Dico ut B G cylindrus ad cylindrum G D, ita esse E K axem ad axem K F. Producatur enim E F axis ex utrâque parte ad puncta L, M; et ipsi quidem E K axi ponantur æquales quotcunque E N, N L; ipsi vero F K æquales quotcunque F X, X M; et per puncta L, N, X, M, ducantur plana ipsis A B, C D parallela: atque in planis per L, N, X, M circa centra L, N, X, M intelligantur circuli O P, R S, T Y, V Q æquales ipsis A B, C D; et cylindri P R, R B, D T, T Q intelligantur. Quoniam igitur axes L N, N E, E K inter se sunt æquales, erunt cylindri P R, R B, B G inter se ut bases [e]. Æquales autem sunt bases. Ergo et cylindri P R, R B, B G sunt æquales. Quod cum axes L N, N E, E K inter se æquales sint, itemque cylindri P R, R B, B G inter se æquales; sitque ipsorum L N, N E, E K multitudo æqualis multitudini ipsorum P R, R B, B G: quotuplex est axis K L ipsius E K axis, totuplex erit et P G cylindrus cylindri G B. Eâdem ratione et quotuplex est M K axis ipsius axis K F, totuplex est et Q G cylindrus cylindri G D. Et si quidem axis



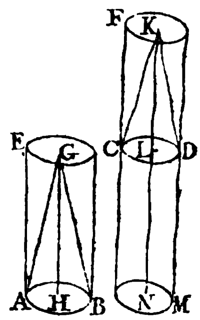
[e] 11. hujus.

axis K L ſit æqualis axi K M, erit et P G cylindrus cylindro G Q æqualis; ſi autem axis L K major ſit axe K M, et cylindrus P G major erit cylindro G Q; et ſi minor, minor. Quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, videlicet axibus E K, K F, et cylindris B G, G D, ſumpta ſunt æquimultiplicia axis quidem E K, et B G cylindri, nempe axis K L, et cylindrus P G; axis vero K F, et cylindri G D æquimultiplicia, axis ſcilicet K M, et G Q cylindrus; et demonſtratum eſt, ſi L K axis ſuperat axem K M, et P G cylindrum ſuperare cylindrum G Q; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem. Eſt igitur axis E K ad axem K F, ut B G cylindrus ad cylindrum
[f] Def. 5. quinti. G D [f]. Quare ſi cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. *Q. E. D.*

[XIV.] PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus baſibus exiſtentes coni et cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus baſibus A B, C D cylindri E B, F D. Dico ut E B cylindrus ad cylindrum F D, ita eſſe G H axem ad axem K L. Producatur enim K L, axis ad punctum N; ponaturque ipſi G H axi æqualis L N; et circa axem L N intelligatur cylindrus C M. Quoniam igitur cylindri E B, C M eandem habent altitudinem, inter
[g] 11. hujus. ſe ſunt ut baſes [g]. Baſes autem ſunt æquales. Ergo et cylindri E B, C M inter ſe æquales erunt. Et quoniam cylindrus F M ſecatur plano C D, oppoſitis planis parallelo, erit ut C M
[h] 13. hujus. cylindrus ad cylindrum F D, ita axis L N ad K L axem [h]. Æqualis autem eſt cylindrus quidem C M cylindro E B; axis vero L N axi G H. Eſt igitur ut E B cylindrus ad cylindrum F D, ita axis G H ad K L axem. Ut autem E B cylindrus ad cylindrum F D, ita A B G conus ad
[i] 15. quinti. conum C D K [i]; cylindri ſunt enim conorum tripli [k].
[k] 10. hujus. Ergo et ut G H axis ad axem K L, ita eſt A B G conus ad conum C D K, et cylindrus E B ad F D cylindrum. In baſibus igitur æqualibus exiſtentes coni et cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines. *Q. E. D.*

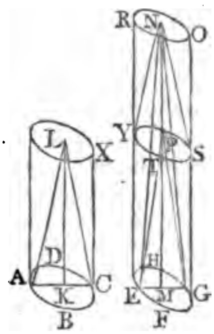


PROP.

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Æqualium conorum et cylindrorum baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales; et quorum conorum et cylindrorum baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales, illi inter ſe ſunt æquales.

Sint æquales coni et cylindri, quorum baſes quidem ſint A B C D, E F G H circuli, diametris A C, E G; axes autem K L, M N; qui quidem et conorum vel cylindorum ſunt altitudines. Dico cylindrorum A X, E O baſes et altitudines reciproce proportionales eſſe, hoc eſt, ut A B C D baſis ad baſim E F G H, ita eſſe altitudinem M N ad altitudinem K L. Altitudo enim K L vel æqualis eſt altitudini M N, vel non æqualis. Sit primo æqualis. Atque eſt A X cylindrus æqualis cylindro E O. Qui autem eandem habent altitudinem coni et cylindri, inter ſe ſunt ut baſes[l]. Æqualis igitur eſt baſis A B C D baſi E F G H. Eſt igitur ut baſis A B C D ad E F G H baſim, ita M N altitudo ad altitudinem K L. Non ſit autem altitudo K L altitudini M N æqualis. Altera igitur ipſarum major. Major ſit M N; et auferatur ab ipſâ M N altitudini L K æqualis P M, et per P ſecetur E O cylindrus plano T Y S, oppoſitis planis circulorum E F G H, R O parallelo; intelligaturque cylindrus E S, cujus baſis quidem E F G H circulus, altitudo autem P M. Quoniam igitur A X cylindrus æqualis eſt cylindro E O, alius autem aliquis eſt cylindrus E S; erit ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. Sed ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita baſis A B C D ad E F G H baſim[l]; cylindri enim A X, E S eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus E O ad E S cylindrum, ita M N altitudo ad altitudinem M P[m]; nam cylindrus E O ſecatur plano T Y S, oppoſitis planis parallelo. Eſt igitur ut A B C D baſis ad baſim E F G H, ita altitudo M N ad M P altitudinem. Æqualis autem eſt M P altitudo altitudini K L. Quare ut baſis A B C D ad E F G H baſim, ita M N altitudo ad altitudinem K L. Æqualium igitur

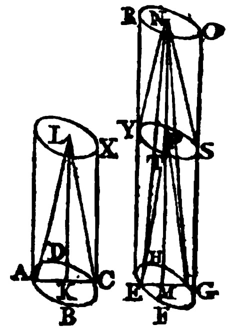


[l] 11. hujus.

[m] 13. hujus.

igitur cylindrorum A X, E O bases et altitudines reciproce sunt proportionales.

Sed si cylindrorum A X, E O bases et altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est, ut A B C D basis ad basim E F G H, ita altitudo M N ad K L altitudinem. Dico A X cylindrum cylindro E O æqualem esse. Iisdem enim constructis; quoniam ut A B C D basis ad basim E F G H, ita altitudo M N ad K L altitudinem; altitudo autem K L æqualis est altitudini M P: erit ut A B C D basis ad basim E F G H, ita M N altitudo ad altitudinem M P. Sed ut A B C D basis ad basim E F G H, ita A X cylindrus ad cylindrum E S;

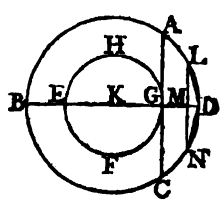


n 11. hujus. eandem enim habent altitudinem [n]. Ut autem M N altitudo ad altitudinem M P, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. Est igitur ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. Cylindrus igitur A X cylindro E O est æqualis. Similiter autem et in conis. *Q. E. D.*

[XVI.] PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum æquilaterum, et pari laterum numero describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli A B C D, E F G H circa idem centrum K. Oportet in majori circulo A B C D polygonum æquilaterum et pari laterum numero describere, non tangens minorem circulum E F G H. Ducatur per K centrum recta linea B D, atque a puncto G ipsi B D ad rectos angulos ducatur A G, et ad C producatur,



o 16. tertii. quæ A C circulum E F G H tanget [o]. Itaque circumferentiam B A D bifariam secantes, et ejus dimidium rursus bifariam, et hoc semper facientes, tandem relinquemus circumferentiam minorem ipsâ A D. Relinquatur, sitque L D: et a puncto L ad B D perpendicularis agatur L M, et ad N producatur; junganturque

L D,

L D, D N. Ergo L D ipsi D N est æqualis[p], et quoniam [p] 29. tertii.
L N parallela est A C, et A C tangit circulum E F G H; ipsa L N circulum E F G H non tanget. Et multo minus tangent circulum E F G H rectæ lineæ L D, D N. Quod si ipsi L D æquales deinceps circulo A B C D aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium et numero parium laterum non tangens minorem circulum E F G H. *Q.E.F.*

PROP. XVII. PROBL. [XVII.]

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod suâ superficie minorem non contingat.

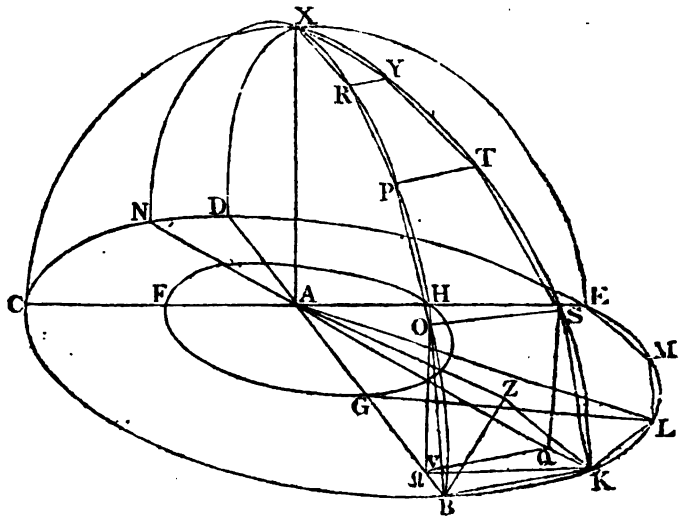
Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. Oportet in majori sphærâ describere solidum polyhedrum, quod suâ superficie minorem non contingat. Secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto: sectiones erunt circuli; quoniam diametro manente et semicirculo circumducto sphæra facta est[q]. Ergo in quâcunque positione semicirculum intelligamus, quod per centrum producitur planum in superficie sphæræ circulum efficiet; et constat circulum esse maximum, cum diameter sphæræ, quæ et semicirculi diameter est, maxima sit rectarum, quæ in circulo vel sphærâ ducuntur[r]. Sit igitur in majori quidem sphærâ circulus B C D E, in minori autem circulus F G H; et ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos B D, C E. Occurrat B D minori circulo in G; ducatur a puncto G ipsi A G ad rectos angulos G L, et jungatur A L. Itaque circumferentiam E B bifariam secantes, et dimidium ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem eâ parte circumferentiæ circuli B C D, quæ subtenditur a rectâ æquali ipsi G L. Relinquatur, sitque circumferentia B K. Minor igitur est recta B K quam G L; eritque B K latus polygoni æqualium et parium numero laterum non tangentis minorem circulum. Sint igitur polygoni latera in quadrante circuli B E, rectæ B K, K L, L M, M E; et juncta K A producatur ad N; et a puncto A plano circuli B C D E ad rectos angulos constituatur A X[s], quæ superficiei sphæræ in puncto X occurrat, et per A X et utramque ipsarum B D, K N plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphæræ maximos circulos. Itaque efficiant, et sint in diametris B D, K N eorum semicirculi B X D, K X N. Quoniam

[q] Def. 14. undecimi.

[r] 15. tertii.

[s] 12. undec.

K k igitur

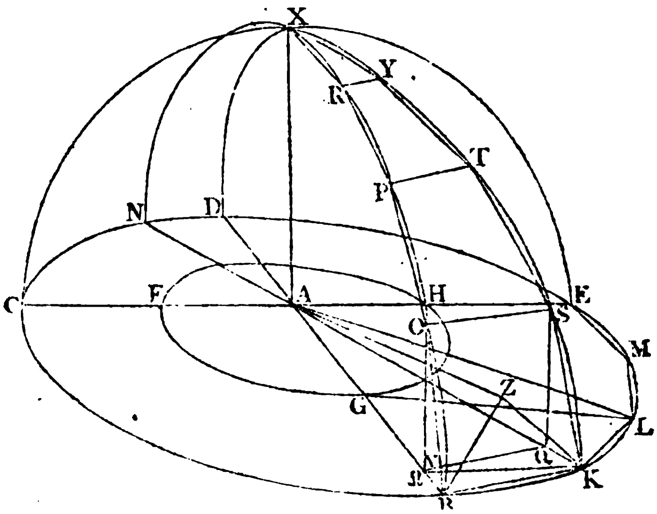


igitur X A recta est ad planum circuli B C D E, erunt omnia plana, quæ per ipsam X A transeunt, ad idem circuli planum recta [t]: quare et semicirculi B X D, K X N recti sunt ad idem planum. Et quoniam semicirculi B E D, B X D, K X N æquales sunt, in æqualibus *enim* consistunt B D, K N diametris; erunt et eorum quadrantes B E, B X, K X inter se æquales. Quot igitur latera polygoni sunt in quadrante B E, tot erunt et in quadrantibus B X, K X, æqualia ipsis B K, K L, L M, M E. Inscribantur, et sint B O, O P, P R, R X; K S, S T, T Y, Y X: junganturque S O, T P, Y R; et ab ipsis O, S ad planum circuli B C D E perpendiculares ducantur. Cadent hæ in communes planorum sectiones B D, K N; quoniam et plana semicirculorum B X D, K X N ad planum circuli B C D E recta sunt [u]. Itaque cadant, sintque O V, S Q; et V Q jungatur. Cum igitur in æqualibus semicirculis B X D, K X N æquales circumferentiæ sumptæ sint B O, K S, et ductæ perpendiculares O V, S Q; erit O V quidem ipsi S Q æqualis, B V vero æqualis K Q. Est autem et tota B A æqualis toti K A. Ergo et reliqua V A reliquæ Q A est æqualis. Igitur ut B V ad V A, ita K Q ad Q A: ideoque V Q ipsi B K parallela est [x]. Quod cum utraque ipsarum O V, S Q recta sit ad circuli B C D E planum, erit O V ipsi S Q parallela [y]. Ostensa autem est et ipsi æqualis. Ergo Q V, S O æquales sunt et parallelæ.

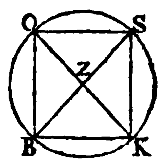
[t] 18. undecimi.
[u] 38. undecimi.
[x] 2. sexti.
[y] 6. undecimi.

lelæ [z]. Et quoniam Q V parallela est ipsi S O, sed et parallela ipsi K B; erit et S O ipsi K B parallela [a]; et ipsas conjungunt B O, K S. Ergo et K B O S quadrilaterum est in uno plano: nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, et in utrâque ipsarum quævis puncta sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem est plano, in quo parallelæ [b]. Et eâdem ratione ipsorum quadrilaterorum S O P T, T P R Y utrumque in uno est plano. Est autem in uno plano et triangulum Y R X [c]. Si igitur a punctis O, S, P, T, R, Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferentias B X, K X, ex pyramidibus composita, quarum bases quidem K B O S, S O P T, T P R Y quadrilatera, et triangulum Y R X; vertex autem punctum A. Quod si in unoquoque laterum K L, L M, M E, quemadmodum in K B eadem construamus; et in reliquis tribus quadrantibus, et in reliquo hemisphærio constituetur figura quædam polyhedra in sphærâ descripta, et composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, et Y R X triangulum, et aliæ ejusdem ordinis simili modo constructæ, cum vertex omnium communis sit punctum A. Dico dictam figuram polyhedram suâ superficie non contingere minorem sphæram, in quâ est circulus F G H. Ducatur a puncto A ad planum quadrilateri K B S O perpendicularis A Z [d], quæ plano in puncto Z occurrat; et B Z, Z K jungantur. Itaque quoniam A Z recta est ad quadrilateri K B S O planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, et in eodem sunt plano, rectos angulos faciet [e]. Ergo A Z ad utramque ipsarum B Z, Z K est perpendicularis. Et quoniam A B est æqualis A K, erit et quadratum ex A B quadrato ex A K æquale; et sunt quadrato quidem ex A B æqualia quadrata ex A Z, Z B, angulus enim ad Z rectus est [f]; quadrato autem ex A K æqualia ex A Z, Z K quadrata. Ergo quadrata ex A Z, Z B quadratis ex A Z, Z K æqualia sunt. Commune auferatur quadratum ex A Z. Reliquum igitur quod ex B Z reliquo quod ex Z K est æquale. Ergo recta B Z rectæ Z K æqualis. Similiter ostendemus, et quæ a puncto Z ad puncta O, S ducuntur utrique ipsarum B Z, Z K æquales esse. Circulus igitur centro Z et intervallo unâ ipsarum Z B, Z K descriptus etiam per puncta O, S transibit. Et quoniam in circulo est B K S O quadrilaterum, et sunt æquales O B, B K, K S, et minor

z 33. primi.
a 9. undecimi.
b 7. undecimi.
c 2. undecimi.
d 11. undecimi.
e Def. 3. undecimi.
f 47. primi.



O S; erit angulus B Z K obtusus†; ideoque B K major quam B Z. Sed et G L quam B K est major. Multo igitur major est G L quam B Z; et quadratum ex G L quadrato ex B Z majus. Et cum æqualis sit A L ipsi A B, erit quadratum ex A L quadrato ex A B æquale: sed quadrato quidem ex A L æqualia sunt quadrata ex A G, G L, quadrato autem ex A B, æqualia quadrata ex B Z, Z A; quadrata igitur ex A G, G L æqualia sunt quadratis ex B Z, Z A; quorum quadratum ex B Z minus est quadrato ex G L. Ergo reliquum ex Z A quadratum majus est quadrato ex A G; et ob id recta linea Z A major est rectâ A G. Sed punctum G est ad superficiem sphæræ minoris. Quare punctum Z extra illam sphæram. Recta autem A Z, in planum B O K S ad perpendiculum deducta, minima est rectarum omnium, quæ a puncto A in planum illud deduci poterunt. Quare aliud omne punctum plani B O K S, vel magis etiam quam punctum Z, extra sphæram minorem erit. Totum igitur planum B O K S extra sphæram minorem. Similiter et de alio quovis polyhedri plano ostendetur extra sphæram minorem esse.



† *Nimirum cum tres* B K, B O, K S *circulo* B K S O *inscriptæ, inter se æquales sint, quarta autem* O S *unaquâque trium minor, erit arcus* B K *quadrante major. Quapropter angulus* B Z K, *ad circuli centrum* Z *arcui* B K *insistens, recto major erit.*

Tota

Tota igitur polyhedri ſuperficies extra ſphæram illam. Duabus igitur ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum deſcriptum eſt, quod ſuâ ſuperficie minorem non contingit. *Q. E. F.*

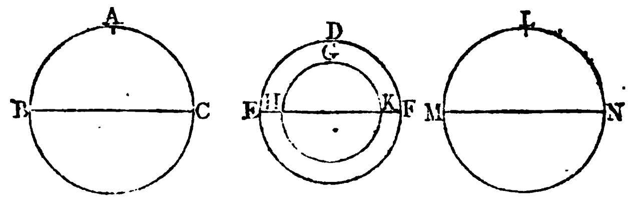
Cor. Quod ſi etiam in alterâ ſphærâ ſolido polyhedro deſcripto, in ſphærâ B C D E ſimile ſolidum polyhedrum deſcribatur; habebit ſolidum polyhedrum in ſphærâ B C D E ad ſolidum polyhedrum in alterâ ſphærâ triplicatam proportionem ejus, quam diameter ſphæræ BCDE habet ad alterius ſphæræ diametrum. Diviſis enim ſolidis in pyramides numero æquales, et ejuſdem ordinis: erunt pyramides ſimiles. Similes autem pyramides inter ſe in triplicatâ ſunt proportione homologorum laterum. Ergo pyramis, cujus baſis eſt K B O S quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in alterâ ſphærâ ejuſdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc eſt, quam habet A B ex centro ſphæræ, circa centrum A exiſtentis, ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. Similiter et unaquæque pyramis earum, quæ ſunt in ſphærâ circa centrum A, ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis, quæ ſunt in alterâ ſphærâ, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. Quare totum ſolidum polyhedrum, quod eſt in ſphærâ circa centrum A, ad totum ſolidum polyhedrum, quod in alterâ ſphærâ, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ, hoc eſt, quam habet B D diameter ad alterius ſphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

Sphæræ inter ſe in triplicatâ ſunt proportione ſuarum diametrorum.

Intelligantur ſphæræ A B C, D E F; quarum diametri B C, E F. Dico A B C ſphæram ad ſphæram D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F. Si enim non ita eſt, ſphæra A B C ad ſphæram minorem ipſâ D E F, vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Habeat primo ad minorem, videlicet ad G H K. Et intelligatur ſphæra D E F circa idem centrum, circa quod ſphæra G H K: deſcribaturque in majori ſphærâ D E F

ſolidum



ſolidum polyhedrum ſuperficie ſuâ non contingens minorem ſphæram G H K [g]; et in ſphærâ A B C deſcribatur ſolidum polyhedrum ſimile ei, quod in ſphærâ D E F deſcriptum eſt. Solidum igitur polyhedrum, quod in ſphærâ A B C, ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphærâ D E F, triplicatam proportionem habet ejus, quam B C ad E F [h]. Habet autem A B C ſphæra ad ſphæram G H K triplicatam proportionem ejus, quam B C ad E F. Ergo ut A B C ſphæra ad ſphæram G H K, ita ſolidum polyhedrum in ſphærâ A B C ad ſolidum polyhedrum in ſphærâ D E F; et permutando, ut A B C ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ipſâ eſt, ita G H K ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphærâ D E F. Major autem eſt ſphæra A B C ſolido polyhedro, quod eſt in ipſâ. Ergo et G H K ſphæra polyhedro, quod in ſphærâ D E F, eſt major. Sed et minor, ab ipſo enim comprehenditur; quod fieri non poteſt. Non igitur A B C ſphæra ad ſphæram minorem ipſâ D E F triplicatam proportionem habet ejus, quam B C ad E F. Similiter oſtendemus neque D E F ſphæram ad ſphæram minorem ipſâ A B C triplicatam habere proportionem ejus, quam habet E F ad B C. Dico inſuper ſphæram A B C neque ad majorem ſphæram ipſâ D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam B C ad E F. Si enim fieri poteſt, habeat ad majorem L M N. Invertendo igitur, ſphæra L M N ad A B C ſphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter E F ad B C diametrum. Ut autem ſphæra L M N ad A B C ſphæram, ita ſphæra D E F ad ſphæram quandam minorem ipſâ A B C, quoniam ſphæra L M N major eſt ipſâ D E F. Ergo et D E F ſphæra ad ſphæram minorem ipſâ A B C triplicatam proportionem habet ejus, quam E F ad B C; quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Non igitur A B C ſphæra ad ſphæram majorem ipſâ D E F triplicatam proportionem habet ejus, quam B C ad E F. Oſtenſum autem eſt neque ad minorem. Ergo A B C ſphæra ad ſphæram D E F triplicatam proportionem habebit ejus, quam B C ad E F. *Q. E. D.*

[g] 17. hujus.

[h] Cor. 17. hujus.

AD-

ADDENDA.

LIB. V. PROP. XXVI.

Cor. * (Clavii) Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, habeat autem et quinta quædam, primæ detracta, ad secundam eandem proportionem quam sexta quædam, tertiæ detracta, ad quartam; et reliqua primæ ad secundam eandem proportionem habet, quam reliqua tertiæ ad quartam.

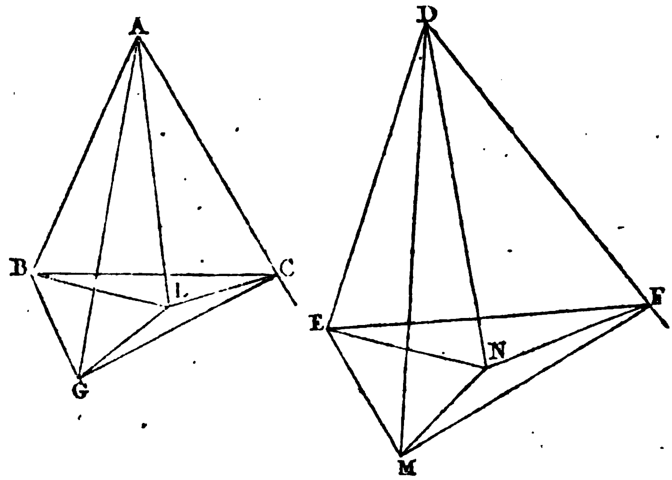
LIB. X. PROP. X.

Cor. * Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima autem secundæ potentiâ tantum sit commensurabilis; tertia quoque quartæ potentiâ tantum commensurabilis erit.

LIB. XI. PROP. XXXV.

Cor. 2.* Si sint duo anguli plani æquales (B A C, E D F) quorum verticibus (A, D) sublimes rectæ lineæ (A G, D M) insistant, quæ cum rectis principio positis (A B, D E, A C, D F) angulos æquales, alterum alteri, contineant; angulum quidem M D E angulo G A B, et angulum M D F angulo G A C æqualem; plana angulorum B A G, C A G similiter inter se, et tertio anguli B A C plano, sunt inclinata, atque plana angulorum E D M, F D M inter se, et tertio anguli E D F plano. Et solidus angulus ad A solido ad D æqualis est.

Sumptis enim A G, D M æqualibus, et a punctis G, M rectis G L, M N in plana B A C, E D F ad perpendiculum demissis; rectæ illæ G L, M N inter se æquales erunt [a]. [a] Cor. 1.
Junctisque L A, N D, anguli G A L, M D N inter se æquales [b]. Et figuris ut prius constructis, in triangulis [b] Per hanc
A B L, Prop.



A B L, D E N, ad B et E rectangulis, erit B L ad E N, ut A B ad D E. Sic enim ostensum. Similia igitur sunt triangula A B L, D E N, et æquales habent angulos, quibus latera homologa subtenduntur. Anguli igitur B A L, E D N inter se æquales. Hæc cum ita sint, plana B A G, C A G similiter inter se, et tertio A B C, atque plana E D M, F D M inter se, et tertio E D F inclinari, et angulum solidum ad A solido ad D æqualem esse, ex constructione vicesimæ sextæ hujus libri manifestum est. *Q. E. D.*

LIB. XI. PROP. XXXIX.

Cor. 1.* Duæ parallelepipedi cujusque diagonales se mutuo medias dividunt.

Cor. 2.* Parallelepipedi cujusque rectanguli diagonales inter se æquales sunt.

Ea autem parallelepipeda voco *rectangula*, quorum stantes rectæ lineæ ad perpendiculum sunt basium planis.

10
59
2898